Vollständige Anweisung

die

Lebensfähigkeit von Versicherungs-Anstalten

in Bezug auf

das menschliche Leben und Sterben

zu untersuchen.

Im Auftrage

des Central-Vereins für das Wohl der arbeitenden Klassen

allgemein verständlich vorgetragen

von

Dr. Carl Naedell.

Mitglied des Vereins.

Berlin, 1857.

Verlag von Otto Janke.

Vorrede.

Die Berechnungen für Versicherungsanstalten, ein Zweig der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wurden zugleich mit derselben erfunden, zu einer Zeit, wo das Versicherungswesen noch in seiner Wiege lag. Geschah es so, daß die Theorie der Praxis vorausgeeilt war, so kam es andrerseits, daß, nachdem von jenen Regeln Gebrauch gemacht worden, man bald vergaß, warum denn eigentlich gerechnet werden solle, und selbst Männer, die solche Anstalten zu begründen oder zu leiten hatten, der Meinung waren — und wie sich durch täglich neue Erscheinungen darthun ließe, auch heute noch der Meinung sind — daß Vorberechnungen überflüssig, ja wohl gar schädlich wären und die Sache auf andere Weise vortheilhafter anzufangen sei. Den aus der Bethätigung dieser Meinung vielfach hervorgegangenen Uebelständen für die Zukunft vorzubeugen, ist die Hauptaufgabe des ersten Abschnitts vorliegender Schrift. Indem ich die Wissenschaft umkehren lasse, zeige ich in der Einleitung, wie das Princip der Billigkeit das Fundament des Versicherungswesens sei und weise alsdann im ersten Abschnitt nach, daß dasselbe durch jede andere als die Abforderung der Beiträge nach dem durchschnittlichen Bedarf in den allermeisten Fällen verletzt werde. Es wird nämlich für alle Versicherungsbranchen, die das menschliche Leben oder Sterben in Bezug auf eine einzelne oder mehrere verbundenen Personen betreffen,

der jährliche Bedarf, so wie die Anzahl der beitragspflichtigen Mitglieder gesucht, wonach mir der Quotient beider Zahlen den auf jedes zahlende Mitglied kommenden Betrag, den jeweiligen Bedarf giebt und darnach bewiesen, daß derselbe unter allen Umständen, mit Ausnahme zweier sehr selten vorkommender Fälle, zuletzt immer eine Höhe erreiche, die mit dem Nutzen, welchen die Versicherung gewähren soll, in gar keinem Verhältniß steht, so daß bei Versicherungs-Anstalten, die keine Kapitalien ansammeln, die noch vorhandenen Mitglieder am Ende gezwungen werden, nach Darbringung bedeutender Opfer den angestrebten Zweck gänzlich aufzugeben. Auf diese Art geschieht es zugleich, daß die Begriffe: durchschnittliche Lebensdauer, Verbindungsdauer, Ueberlebensdauer, die man sonst nur zerstreut und als Vehikel zur weitern Fortführung der Rechnung zu behandeln pflegt, aus eigner Nothwendigkeit erscheinen, sich regelrecht unter einander gruppiren und in ihrem Zusammenhange einen eigenen Theil der Wissenschaft vom Versicherungswesen bilden.

Demnächst untersuche ich noch in diesem Abschnitt die verschiedenen Aushülfen, durch welche man glaubte, dem fehlerhaften Principe einen festern Halt geben zu können, weise nach, daß dieselben theils gar keine Abhülfe gewähren, theils das Uebel noch ärger machen und werde Schritt vor Schritt zu der Nothwendigkeit zu Grunde zu legender Durchschnittsberechnungen gedrängt, deren Princip in seiner größten Einfachheit am Schluß des ersten Abschnitts entwickelt und deren Richtigkeit durch Proben nachgewiesen wird.

Der zweite Abschnitt beginnt zunächst mit der Vorführung der Rechnungsfundamente: Mortalitäts-Tabellen, Verzinsung, Kapitals- und Beitragszahlung, und geht alsdann zu den einzelnen Rechnungsmethoden, in allgemeinster Form so wie unter bestimmten Nebenbedingungen, über. Ausgerüstet mit den im ersten Abschnitt aufgetretenen Begriffen läßt sich nun der Gegenstand so einfach und gleichwohl allgemein darstellen, daß das Ganze auf wenigen Bogen,

Seite 172 bis 217, so vollständig abgehandelt werden konnte, daß nicht leicht ein praktisches Resultat ausgelassen, eher noch manches Neue, z. B. die Behandlung der aufhörenden terminlichen Zahlungen (Seite 205), welche bei zeitweisen Versicherungen von Wichtigkeit sind (Seite 321), hinzugekommen sein dürfte. Darauf wird die Lehre vom Risiko (und die Garantie), zum erstenmal so elementar und vollständig behandelt, wie es für die Begründung einer Versicherungs-Anstalt nothwendig ist; — leider gelang es mir jedoch bis jetzt nicht, die Berechnung des Risikos bei der Bilanzziehung vollständig und zugleich einfach darzustellen. Der einzig unbewiesen gebliebene Satz (Seite 227) ist der Theorie der mittleren Fehler aus der Methode der kleinsten Quadrate entlehnt, jedem praktischen Analysten hinlänglich bekannt und hier meines Wissens zum erstenmal auf das Versicherungsgeschäft angewandt.

Der erste Theil des zweiten Abschnitts schließt mit einer Vergleichung der gefundenen Zahlenwerthe nach den verschiedenen Zinsfüßen und Mortalitäts-Tabellen, um zu beurtheilen, in wie weit man sich auf die Anwendbarkeit derselben verlassen könne, um in der Praxis leichter Schlüsse von einer Grundlage auf die andere zu ziehen, und endlich um nachzuweisen, in welchen Fällen man statt vieler Rechnungen nach den einzelnen Altern oder Altersverbindungen mit einer einzigen Rechnung nach den Durchschnittsaltern ausreicht. Der zweite Theil dieses Abschnitts lehrt die gefundenen Resultate praktisch anwenden, indem er die Kinderversorgungs- und Aussteuer-Kassen, die Altersversorgungs- und Invaliden-Kassen, die Sterbekassen und Lebensversicherungs-Anstalten, so wie die Wittwen- und Waisen-Kassen behandelt, alsdann zur Lehre von der Bilanzziehung, Vertheilung der Ausfälle und von der Abfindung übergeht und mit der Beurtheilung der Lebensfähigkeit von Versicherungs-Anstalten schließt, wobei zugleich die richtige Behandlung solcher Kassen, die einer statistischen Grundlage entbehren, vorgetragen wird.

Die in dieser Schrift neu beigebrachten Resultate sind meistentheils auf analytischem Wege gefunden, indem ich schon seit vielen Jahren mit einer streng mathematischen Bearbeitung dieses Gegenstandes beschäftigt bin. Indeß mit wissenschaftlichen Auseinandersetzungen allein ist es nicht mehr gethan; die Jetztzeit dringt mit eiserner Gewalt auf praktischen Erfolg und der Geschäftsmann, der sich aus Pflicht oder Neigung mit einer derartigen Wissenschaft zu beschäftigen hat, verlangt nicht mit Unrecht, von dem Vorstudium ihrer Hülfswissenschaften befreit zu bleiben. Zwar gelang es mir nicht, den Gegenstand so fließend und leicht faßlich wie etwa eine Reisebeschreibung darzustellen, aber ich war bemüht, denselben so abzuhandeln, daß er von jedem gebildeten Manne, dem das elementare Rechnen nicht fremd ist und die Neigung dazu nicht fehlt, ohne Weiteres verstanden werden könnte. Daher die vielen Tabellen, namentlich im ersten Abschnitte — mehr vielleicht, als die meisten Beurtheiler gut heißen möchten. Indeß handelte ich so aus innerer Ueberzeugung! Allerdings hat z. B. das theoretische Studium der Naturwissenschaften seinen großen Werth und ist dem gelehrten Forscher unerläßlich, — dem bloßen Praktiker gegenüber behilft man sich aber mit Experimenten. Was in diesem Falle die Experimente, sind in vorliegender Schrift die Tabellen; vermittelst derselben und ihrer Nachrechnung soll der Leser von der Richtigkeit der logischen Deduktionen a posteriori Ueberzeugung erlangen. Aber die Tabellen bezwecken noch mehr! Werden Jemandem, der sich nur einigermaßen mit dem Inhalt des ersten Abschnitts vertraut gemacht hat, Pläne von Versicherungs-Anstalten mit anderen als Durchschnittsbeiträgen zur Beurtheilung übergeben, so hat derselbe nur nach dem besondern Inhaltsverzeichniß die betreffende Tabelle aufzuschlagen und kann sich sofort aus dem Gange, den der jeweilige Bedarf nimmt, von der Lebensfähigkeit überzeugen oder ein Urtheil darüber gewinnen, wie bald eine Anstalt der Gefahr des Unterganges ausgesetzt sein dürfte.

Mit Ernst habe ich Einrichtungen gelobt oder getadelt, aber letzteren Falles, wiewohl ich Alles der Praxis entlehnt, mit Ausnahme der bereits eingegangenen Berliner Aussteuer-, Sterbe- und Unterstützungs-Kasse, kein Institut namhaft gemacht, es vielmehr dem Leser überlassen, sich die Beispiele dazu selbst aufzusuchen.

Die Tabellen der baaren Werthe sind nach Beendigung der ganzen Schrift noch einmal nach verschiedenen Methoden berechnet worden, weswegen die Resultate hier und da von denen des Textes um etwas abweichen werden. Andere kleine Fehler, die von dem ersten Erscheinen einer so zahlenreichen Schrift fast unzertrennlich sind, wolle der geneigte Leser gütigst entschuldigen.

Der Centralverein für das Wohl der arbeitenden Klassen sieht Spaarkassen und vorsichtig benutzte Versicherungsanstalten als Haupthülfen zu einem gedeihlichen Fortschritt an, und wie er in der Person des Herrn Assessor Schmidt einen competenten Bearbeiter für den Entwickelungsgang der Deutschen Spaarkassen gewonnen, hat er mich mit Ausarbeitung einer Schrift beauftragt, welche die Technik des Versicherungswesens möglichst gründlich und allgemein verständlich vortragen sollte. Möchte die vorliegende Arbeit diesem Zwecke entsprechen und zur richtigern Erkenntniß, bessern Einrichtung und allgemeinen zweckmäßigen Benutzung solcher Anstalten beitragen helfen. Der Nutzen davon wird sich weit über den Kreis der unmittelbar Betheiligten hinaus erstrecken. Das Kapital wendet sich nämlich in jetziger Zeit vorzugsweise der Spekulation und den industriellen Interessen zu, und wiewohl das Gute, was sich hieraus für die Zukunft entwickeln wird, nicht verkannt und gering angeschlagen werden darf, wird man doch Sorge zu tragen haben, den Uebelständen, die eine solche Richtung mit sich bringt, zeitig vorzubeugen. Den Grundbesitzern wird es dadurch immer schwieriger gemacht, gegen genügende Sicherheit Hypothekendarlehen aufzutreiben und hat man dem guten Gedeihen recht zahlreicher derartiger Anstalten, die nach ihrer ganzen Organi-

sation gehalten sind, ihre Gelder hypothekarisch anzulegen, alle Sorgfalt zuzuwenden. Comptoire, welchen von Hause aus ein bedeutendes Grundkapital zur Seite steht, dürften hierzu weniger geeignet sein, weil sie eben darauf eingerichtet werden, an jenen Spekulationen Theil zu nehmen.

Berlin, im August 1856.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Inhalt der Tabellen des ersten Abschnitts.

Einleitung.

Der Reiche, der sich in dem Besitz eines so großen Vermögens befindet, oder auch nur der Wohlhabende, dessen Einnahme so reichlich und sicher ist, den verschiedenen Ereignissen des menschlichen Lebens in geldlicher Beziehung gewachsen zu sein, haben nicht nöthig, auf spätere Bedürfnisse Rücksicht zu nehmen: wohingegen die Minderbegüterten und Aermeren den gesellschaftlichen Verhältnissen sich nicht entziehen können, welche es mit sich bringen, daß die Ausgaben nicht alle so gleichmäßig erfolgen, wie die Einnahmen. Zahlung des Miethszinses, Anschaffen von Feuerungsmaterial, von warmen Kleidern für den Winter und passenden für die übrigen Jahreszeiten, eintretende Krankheiten, Todesfälle u. dgl. m. erfordern größere und plötzlichere Ausgaben, als der tägliche Bedarf. Diesen Anforderungen gewachsen zu sein, giebt es für die zuletzt genannten Personen kein anderes Mittel, als daß sie spaaren, d. h. suchen, aus den Perioden des Minderbedarfs so viel wie nöthig zu erübrigen und nach und nach anzusammeln, daß damit die größeren Ausgaben ihrerzeit bestritten werden können.

So lange ein Volk, eine Provinz, oder einzelne Klassen sich noch in weniger entwickeltem Kulturzustande befinden, spaart jeder Einzelne für sich, in der Art, daß er nach und nach Betrag zu Betrag fügt und das Angesammelte sorgfältig unter eigenem Verschluß aufbewahrt. Bei größerer Einsicht in die staatswirthschaftlichen Verhältnisse gelangt man indessen zu der Ueberlegung, daß man durch diese Art des Spaarens dem Gemeinwohl und sich selbst schade; jenem, indem man ihm die nothwendigen Circulationsmittel vorenthält und dadurch den Verkehr hemmt, sich selbst aber, weil man die produktive Kraft, die in dem Gelde, gehörig benutzt, liegt, nicht der Art in Wirksamkeit setzt, daß man dasselbe bis zur nothwendigen Verausgabung Anderen gegen die üblichen Nutzungsgebühren überläßt. Zwar ist es im ehrlichen Verkehr nicht wohl thunlich, daß jeder einzelne Spaarer seine oft kleinen und unbedeutenden Erübrigungen unmittelbar gewinnbringend verwende; allein zur Vermittlung dienen die Spaarkassen, deren Zweck eben ist, die einzelnen kleinen Beträge von

allen Seiten herbeizuziehen, zu geringeren oder größereren Kapitalien zu vereinigen und zinstragend auszuleihen. Mit Recht verdienen diese Kassen die besondere Aufmerksamkeit der Menschenfreunde, die allgemeinste Verbreitung und Benutzung, so wie eine größere und größere Vervollkommnung. Wer sich über die Einrichtung und den Erfolg solcher Kassen Aufschluß verschaffen will, den verweisen wir auf die trefflichen Arbeiten von Runge und Schmidt, in den Mittheilungen des Centralvereins für das Wohl der arbeitenden Klassen.

So lange das Spaaren ein bloßer Gegenstand des Luxus bleibt, wir meinen, so weit die Wohlhabenden oder Reichen von Zeit zu Zeit Summen abstoßen, um sich nach deren Ansammlung gelegentlich größere Bequemlichkeit, oder eine größere und kostspieligere Erholung zu verschaffen, überläßt man am besten die Sache sich selbst; spaart aber der Unbegüterte, wohl gar der Arme, zur Bestreitung der dringendsten Bedürfnisse oder zur Erringung eines behaglicheren Daseins, so ist der Gegenstand geeignet, die Aufmerksamkeit der Gemeindebehörden auf sich zu lenken. Hat sich irgendwo ein Spaarverein von selbst gebildet, so wird die Behörde gut thun, sich wenig oder gar nicht hinein zu mischen. Sie hat vielmehr ihre Thätigkeit darauf zu beschränken, die etwa entgegenstehenden Hindernisse so geräuschlos wie möglich zu beseitigen, alle sogenannten polizeilichen Bedenken, bei Anderen sowohl wie bei sich selbst, zurückzuweisen und höchstens bei entschieden mangelhafter Einrichtung auf zweckmäßigere Bestimmungen zur zwanglosen Einführung hinzuwirken. Sollte es dessen ungeachtet nothwendig erscheinen, die Einrichtung oder die fernere Leitung einer solchen Spaarkasse seitens der Gemeindebehörde zu übernehmen, so darf dieses nur in dem entschiedenen Bewußtsein geschehen, die Sache besser machen zu können und zu wollen, als Andere. Zur guten Einrichtung einer Spaarkasse dürfte zu rechnen sein: vollständige Garantie für die pünktliche Zurückzahlung des Geldes, größte Bequemlichkeit für die Spaarer beim Einlegen und bei der Herausnahme der Erspaarnisse, sowohl hinsichtlich der Größe der einzelnen Beträge als der Zeit, möglich hohe Verzinsung, Freiwilligkeit der Benutzung und Unentgeltlichkeit der Verwaltung. Wie nothwendig in moralischer Hinsicht und zur Erweckung des Vertrauens die letzte Anforderung bei den Armen ist, hat der zu früh verstorbene Liedke, Begründer der nach ihm genannten Spaarvereine, in der Abhandlung: „Hebung der Noth der arbeitenden Klassen durch Selbsthilfe, Berlin 1845" aus seinen eigenen Erfahrungen als Armen-Commissions-Vorsteher nachgewiesen. — Würdigt eine Gemeindeverwaltung die Sache nur richtig, so wird sie einige Opfer für diesen Zweck nicht scheuen, denn sie weiß, daß ein einziger erspaarter Thaler die Verausgabung mehrerer derselben aus der Armenkasse und für das Gefängnißwesen unnöthig macht.

Das Spaaren geschieht, wie aus den oben angeführten Beispielen schon hervorgeht, in doppelter Richtung: einmal zur Erschwingung der größeren Ausgaben, die entweder in ganz bestimmten Terminen oder in ziemlich regelmäßigen Zeiträumen erforderlich sind, zum andern, zur Bestreitung außerordentlicher Erfordernisse bei eingetretenen, nicht vorherzusehenden Unglücksfällen. Jenes Spaaren kann aber nur durch ein ganz individuelles Nebeneinanderwirken, unter Vermittelung der Spaarkassen, geschehen, wobei Jedermann genau bis auf den Pfennig berechnen kann, was er zurück zu erwarten habe. Die Ausgaben für Wohnungsmiethe, Feuerung, Kleidung u. s. w. sind auch bei den weniger bemittelten Klassen zu verschiedenartig und treten meistentheils zu gleichzeitig auf, als daß ein gemeinschaftliches Verfahren oder eine geregelte Aushülfe des Einen durch den Andern stattfinden könnte, und beruhen auch die Liedkeschen Spaarvereine zu diesem Zwecke nur auf dem Principe des Zusammenwirkens, nicht auf dem des Ineinandergreifens. Das Spaaren zum zweiten Zwecke wird dagegen, bei der Unbestimmtheit des Eintretens, vermittelst des Spaarkassen-Systems nur unterstützt, nicht vollständig befriedigt. Von Todesfällen, Krankheiten und dergleichen Schicksalsschlägen wird, nach den Einrichtungen der Natur, von einer größeren Menge Menschen verhältnißmäßig immer nur eine geringe Anzahl gleichzeitig betroffen. Hierbei ist demnach eine gegenseitige Aushülfe nicht allein möglich, sondern auch für Unbemittelte meistentheils dringend nothwendig. Zu solchem gegenseitigen Beistande in allerlei Nöthen vereinigt sich denn auch in civilisirten Staaten eine größere oder geringere Menge Personen unter bestimmt festgesetzten Bedingungen, und nicht mit Unrecht hat ein Schriftsteller gesagt, daß man den Grad der Civilisation eines Volkes nach der Anzahl solcher Vereine bemessen könne. Zu dergleichen Vereinen gewisser Art pflegen sich denn auch begüterte Menschen zusammen zu thun, indem sie sich bei Feuerschäden, Hagelschlägen, Unfällen von Schiff oder Ladung auf offener See u. s. w. gegenseitigen Beistand ausbedingen; wohingegen Vereine gegen Wassersnoth nicht an ihrem Platze sein möchten, weil dergleichen Unfälle allzusehr von der besondern Lokalität abhängen, als daß ein größerer Verband möglich wäre, und bei wirklich eingetretenem Unglück im engeren Kreise jeder Einzelne gleichmäßig betroffen zu werden pflegt.

Das Heilbringende solcher Vereine gegen mögliche Unglücksfälle liegt nicht allein in der Hülfe, die dem Betroffenen wirklich gewährt wird, vielmehr ist der moralische Vortheil, welcher dem Menschen fortwährend darin zur Seite steht, daß er sich und die Seinigen auch in der größten Noth nicht aller Hülfe beraubt weiß, wodurch das Selbstbewußtsein gekräftigt und der regelmäßige und ungetrübte Fortgang der Berufsarbeiten gesichert bleibt, noch viel höher anzuschlagen. Der Mensch fühlt sich sicher und nennt dergleichen Einrichtungen, zum Gegensatz gegen die Spaarkassen, Versicherungs-Anstalten.

Andererseits darf diese Art der Vereinigung auch nicht zum bloß Mechanischen hinaufgeschroben werden, wodurch man die Leute am Ende mißmüthig und arbeitsscheu macht. Gebühren der Zukunft ihre Ansprüche, so steht der Gegenwart ein noch viel größeres Recht zu, und wäre es widersinnig, zur Zeit zu darben, um sich gegen künftige Schicksale, die am Ende nicht einmal eintreten, decken zu wollen. Der Kampf mit dem Geschicke ist eben so berechtigt, wie der fortwährend ungestörte Zustand. Weiß ein Geschäftsmann sein erübrigtes Geld stets in eigener Wirksamkeit zu nutzen, bleibt es ihm möglich, wenn es sein muß, ohne allzugroße Störung einen Theil desselben wieder aus dem Geschäfte herauszuziehen, so daß seine und der Seinigen Existenz als gesichert erscheint, so wird er gut thun, von solchen Anstalten wegzubleiben und sich nicht durch Werbebüchlein zur Vorstellung von möglichen Gefahren verleiten lassen, die den Versicherten am Ende gleichfalls erreichen und ihn zum Verluste alles bisher Erstrebten bringen können. Darum pflegen begüterte Leute solchen Anstalten nicht beizutreten und den Kampf mit dem Schicksal selbst aufzunehmen, auch wenn sie wissen, daß ein Theil ihres Vermögens auf dem Spiele steht. Wodurch sollte sich wohl ein Bankier, ein großer Kaufmann, Fabrikant oder Manufakturist gegen alle Wendungen seiner Geschäfte versichern können? und zu verlangen, daß er wenigstens einen Theil seines Vermögens in Sicherheit bringe, heißt eben den Geist der Geschäfte verkennen, wobei oft durch eine geschickte Hinzuziehung von wenigen Tausenden, viele Tausende, die sonst verloren gegangen wären, zu retten sind.

Die Versicherungs-Anstalten finden ihre Theilnehmer und sind für den größeren Theil einer Bevölkerung höchst nothwendig und unerläßlich; auch ihnen ist Freiheit der Bewegung und Concurrenz Lebensprincip. Sollen sie aber ihren wohlthätigen Zweck, so für das Individuum wie für die Gemeinde erreichen, so ist vor allen Dingen nöthig, daß sie lebensfähig, d. h. im Stande sind, allen ihren contraktlichen Verpflichtungen zu genügen, ohne einem einzigen Mitgliede die versprochene Hülfe zu versagen, oder einem andern, wenn auch geschützt durch den Wortlaut des Vertrages, allzu lästig zu werden. Die Versicherungs-Bedingungen werden nämlich in der Regel nach dem Ausfall früherer Erfahrungen festgestellt; man hat durch Beobachtungen ermittelt, wie oft unter einer gegebenen Anzahl von Fällen gleicher Art im Verlauf eines gewissen Ereignisses oder während einer gewissen Zeitdauer solche unglückliche Ausgänge vorkommen, gegen welche die Versicherungen abgeschlossen werden sollen. Die Möglichkeit von Seiten der Versicherungs-Anstalten die aufgestellten Bedingungen überall erfüllen zu können, beruht demnach beim *Beginne des Geschäfts* auf der Zweckmäßigkeit und Richtigkeit der Beobachtungen und deren Behandlung, auf der richtigen Festsetzung des Gleichgewichts zwischen den Einnahmen und Ausgaben auf Grund jener Erfahrungen; im *Verlauf des Geschäfts* aber auf

der Ermittelung, ob oder in wie weit die zu Grunde gelegten Erfahrungen mit den Erfolgen bei der Versicherungs-Anstalt selbst übereinstimmen oder nicht. Was die Beurtheilung der Beobachtung und deren Bearbeitung betrifft, so ist dies im Grunde genommen Sache des Statistikers, während die beiden anderen Theile dem technischen Berechner anheim fallen. Weil sich indeß jeder Arbeiter gern die Kenntniß des Materials, mit dem er arbeitet, verschafft, und weil bei Bearbeitung des Rohstoffes auch mathematische Rechnungsmethoden in Anwendung zu bringen sind, so pflegen die Techniker in der Regel auch den besondern für sie Interesse habenden Theil der allgemeinen Statistik mit zu bearbeiten. Da jedoch die genauere Erörterung dieses Gegenstandes ganz besondere Untersuchungen und mathematische Disciplinen erfordert, welche mit dem getitelten Zwecke dieser Schrift sonst nichts gemein haben, so werde ich davon nur gelegentlich und so weit es auf den Gang der Rechnung oder auf die Auslegung der berechneten Resultate Bezug hat, sprechen: während ich die beiden anderen Theile mit hinreichender Vollständigkeit und, wie ich glaube, genetisch darstellen werde.

Die Lebensfähigkeit einer Versicherungs-Anstalt wird demnach vor allem durch die Hinlänglichkeit der Einnahme gegen die Ausgabe, — des Habens gegen das Soll, — bedingt. Wenn das erstere dem letzteren gleich, so ist Lebensfähigkeit, wenn das erstere größer als das letztere, so ist mehr, wenn endlich das erstere kleiner als das letztere, so ist weniger als Lebensfähigkeit vorhanden.

Die Lebensfähigkeit ist also die Grundbedingung des ganzen Unternehmens, und jede Festsetzung, weche dieselbe trübt, welche unbestimmbare oder unausführbare Verpflichtungen von Seiten der Versicherungs-Anstalt oder der Versicherten enthält, ist bei der Abfassung der Statuten zu vermeiden, wenigstens in so weit die Anstalt eine allgemein zugängliche sein soll. Handelt es sich dagegen um besondere Versicherungsvereine für eine einzelne Kategorie von Personen, z. B. Lehrer, Prediger eines bestimmten Bezirks, welche nicht gerade nach der individuell von ihnen zu befürchtenden Gefahr klassificirt werden sollen, so muß der Rechner je nach den vorliegenden Umständen die möglichst richtigen Durchschnitts-Elemente zu ermitteln suchen, diese seinen Berechnungen zu Grunde legen und in der Folge, so oft sich Gelegenheit dazu bieten sollte, mit der eingetretenen Wirklichkeit vergleichen, um die etwa nöthig werdenden finanziellen Abänderungen eintreten zu lassen.

Die so eben besprochene Art der Lebensfähigkeit eines Versicherungsgeschäfts ist zwar zur Existenz desselben unumgänglich nothwendig, aber sie ist nicht die einzige, sie ist nur eine Bedingung im weiteren Sinne des Worts. Diese Bedingung war erfüllt bei vielen Sterbe-, bei den meisten Aussteuer-Kassen, und dieselben sind dennoch untergegangen, weil ihre inneren Einrichtungen die Nothwendigkeit des Unterganges mit sich brachten. Bei der Berliner Aussteuer-

Sterbe- und Unterstützungs-Kasse z. B. sollte für jede Versicherungssumme von 100 Rthl., so oft es nöthig, fünf Silbergroschen gezahlt werden; dieselbe war also lebensfähig im weiteren Sinne des Wortes und wäre für jeden Aussteuerfall von 100 Rthl. nur ein Beitrag zu leisten gewesen, so lange überhaupt noch 60000 Rthl. versichert blieben; sie hatte aber zur Zeit ihrer Geschäftseinstellung noch ein Versicherungs-Kapital von 5427400 Rthl., und konnte nicht fortbestehen, weil ihr die Lebensfähigkeit im engeren Sinne des Wortes fehlte. Die Grundbedingung dieser letzteren ist nämlich die Billigkeit, wonach es nothwendig, die Rechte und Pflichten der Mitglieder in das richtige Verhältniß zu setzen, so daß diejenigen Mitglieder, welche der Natur der Sache nach größere Rechte beanspruchen, in demselben Maaße auch größere Pflichten zu übernehmen haben. Wird dieses Princip verletzt, so werden einzelne Kategorien von Mitgliedern gegen andere begünstigt, diese also gegen jene zurückgesetzt, so daß sie gehalten sein sollen, ihre Waare für mehr zu kaufen, als dieselbe werth ist, wogegen sich das Gefühl, als unbillig, sträubt. Gegen das Princip der Billigkeit nun hatte die genannte Berliner Kasse schon darin gefehlt, daß sie für die zwei ersten Jahre ihres Bestehens allen Mitgliedern von der Geburt bis zum 20ten Lebensjahre auf ein eventuelles Versicherungs-Kapital von 2170500 Rthl., worunter 1081100 Rthlr. für Mitglieder unter 16 Jahren gezeichnet waren, gleiche Zahlungsverbindlichkeiten auferlegte und dennoch jedem derselben bei seiner Verheirathung das gleiche Kapital auszahlte.

Jeder vernünftige Mensch weiß, oder kann es wenigstens wissen, daß er beim Abschluß eines Versicherungs-Vertrages etwas wagt, indem bei der Möglichkeit, mehr herauszubekommen als hinzugeben, eben so gut das Gegentheil eintreffen kann; aber er verlangt mit Recht, den Vertrag so gestellt zu sehen, daß er weder übervortheilt noch in die Lage versetzt werde, wenn auch nur ab und zu, während eines kürzeren Zeitraums einen allzugroßen Beitrag oder gar am Ende vielmal mehr zahlen zu sollen, als der vorliegende Zweck selbst werth ist. Wird demnach durch die festgesetzten Bedingungen die Idee der Billigkeit verletzt, so werden diejenigen Personen, die sich im Nachtheile sehen, wiederum ausscheiden und solche zuletzt gar nicht mehr beitreten, wodurch denn auch die begünstigten Mitglieder ihren Zweck nicht erreichen können.

Es ist darüber gestritten worden, ob ein Sachverständiger seinen Bericht über die Möglichkeit des Bestehens eines Vereins nur auf die Lebensfähigkeit im weiteren Sinne des Wortes zu beschränken habe, oder ob und wie weit er sich auch auf die Lebensfähigkeit im engeren Sinne verbreiten darf. Ich meinestheils glaube, daß der Berichterstatter da, wo die unbilligen Folgen statutarischer Festsetzungen so versteckt liegen, daß sie nur durch die Rechnung aufgedeckt werden können, nicht nur das Recht, sondern sogar die Verpflichtung habe, diese

Umstände nachzuweisen und denjenigen Personen die Entscheidung zu überlassen, welchen dieselbe zusteht. Wäre z. B. in der Art bei den Aussteuerkassen verfahren worden, so würden dieselben höchst wahrscheinlich gar nicht eröffnet worden sein.

Indem im Folgenden die Anweisung zur Ermittelung der Lebensfähigkeit solcher Versicherungs-Anstalten, die sich auf die menschliche Lebensdauer beziehen, gegeben werden soll, bitte ich, den ersten Abschnitt nicht für eine bloße Vorbereitung des Nachfolgenden ansehen zu wollen. Der erste Abschnitt lehrt nicht allein die Fälle kennen, in welchen und warum eine Vorausberechnung unerläßlich ist; er bildet vielmehr die Grundlage aller jener Berechnungen und nach ihm ist der Erfolg in denjenigen Fällen zu beurtheilen, für die von Vorausberechnungen Abstand genommen worden.

Erster Abschnitt.

Von dem jeweiligen Bedarf bei Versicherungs-Anstalten, oder der Nothwendigkeit mathematischer Berechnungen.

Die einfachste Art einer Versicherungs-Anstalt gegen unvorhergesehene Unglücksfälle scheint die zu sein, daß sich Personen unter einander verbinden, zu dem Endzwecke, jedem ihrer Mitglieder, das von dem vorausgesetzten Unglück betroffen wird, die verabredete Entschädigung zukommen und es aus der Gesellschaft ausscheiden zu lassen, und daß die übrigen Mitglieder derselben, ohne Kapitalien anzusammeln, den Bedarf, so oft es nöthig, zusammenschießen. Die Verwaltung eines solchen Vereins ist sehr einfach. Ein Mitglied führt das Verzeichniß der Betheiligten, ihm wird der eingetretene Fall der Anspruchsberechtigung angezeigt und glaubhaft nachgewiesen; es läßt die erforderlichen Beiträge einkassiren und leistet die Auszahlung, vielleicht nach Abzug einer Tantième, für welche es alle vorkommenden Arbeiten zu leisten verpflichtet ist. Geldverwaltung ist nicht erforderlich, Kapitals- und Zinsverluste können nicht vorkommen und die nöthigen Fonds werden jederzeit von den Mitgliedern hergegeben; das Versicherungsgeschäft ist höchst solide und eine Stockung oder gar ein Stillstand desselben unmöglich. — Viele Sterbekassen und die in neuester Zeit so in Verruf gekommenen Aussteuerkassen sind nach diesem Principe, das man fälschlich Gegenseitigkeit genannt hat, eingerichtet worden.

Um den Erfolg eines solchen Unternehmens nach allen Seiten hin zu beurtheilen, beginnen wir mit einer kleinen und leicht übersehbaren Anzahl von Mitgliedern, ein Verfahren, das namentlich jedem Laien, der eine für ihn neue Einrichtung der Art zu beurtheilen wünscht, anzurathen ist. Die tägliche Erfahrung lehrt nämlich, daß Leute, die nach ihren geistigen Fähigkeiten und ihrer sonstigen Bildung wohl geeignet wären, die Zweckmäßigkeit oder Unzweckmäßigkeit eines Verfahrens zu beurtheilen, wenn sie im engern Kreise arbeiteten,

sich durch große Zahlen, die nicht ihrer zur Gewohnheit gewordenen Anschauungsweise angehören, beirren lassen, meinend, darin solle noch ein besonderes Geheimniß stecken; und dennoch wird sich im Allgemeinen das, was bei kleinen Zahlen auf principielle Widersprüche führt, auch im Großen nicht ausführen lassen.

Wir setzen demnach voraus, daß zwölf Personen sich auf die vorgenannte Weise für einen vorher angegebenen Fall, dessen Zeitpunkt des Eintritts nicht füglich vorausgesagt werden kann, ein Kapital zusichern und werden nun alle möglichen regelmäßigen Ausgänge, welche vorkommen können, durchgehen. Der Einfachheit wegen wird hier und in der Folge, wenn ein Anderes nicht ausdrücklich bemerkt wird, das versicherte Kapital durch 1 bezeichnet werden, worunter man sich also jeden beliebigen Betrag, 10 Thl., 12 Thl., 100 Thl., 1000 Thl. u. s. w. denken kann.

Tritt der Versicherungsfall für alle Personen gleichzeitig ein, so sind zwar zwölf Anspruchsberechtigte aber keine Zahlungsverpflichtete vorhanden, so daß alle leer ausgehen und es eben so gut ist, als ob die Verabredung gar nicht stattgefunden hätte; Zeit und Kosten, die man auf die Begründung verwandt hat, sind in gleicher Weise verloren gegangen.

Treten die Versicherungsfälle zu sechs und sechs auf, so erhalten die ersteren Sechs von den anderen Sechs je den Betrag 1, während diese nichts empfangen können, weil keine Zahler vorhanden sind; Jeder von jenen hat den Betrag 1 gewonnen, jeder der letztern den Betrag 1 verloren.

Gruppiren sich die Versicherungsfälle in ihrem gleichzeitigen Eintreten zu vier und vier, so erhalten die ersten Vier je den Betrag 1, wozu jedes der übrigen acht Mitglieder $\frac{1}{2}$ beizutragen hat; jeder der zweiten Vier erhält sodann von jedem der dritten Vier je den Betrag 1, und endlich empfangen die dritten Vier im Falle ihres eignen Bedarfs gar nichts. Die ersten Vier haben also je 1, die zweiten Vier je $\frac{1}{2}$ gewonnen, und die dritten Vier je $1\frac{1}{2}$ verloren.

Ereignen sich die Versicherungsfälle zu drei und drei, so erhalten die ersten Drei je den Betrag 1, indem jeder der übrigen Neun dazu $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ hergiebt; die zweiten Drei erhalten auf gleiche Weise von jedem der übrigen Sechs $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, die dritten Drei von den noch Zurückgebliebenen je 1, und diese letzten Drei empfangen nichts. Die ersten Drei haben somit je 1, die zweiten je $\frac{4}{6}$, die dritten je $\frac{1}{6}$ gewonnen und die letzten Drei je $1\frac{5}{6}$ verloren.

Setzt man die Ereignisse paarweise eintretend voraus, so würde das erste Paar von jedem der zehn übrigen Mitglieder $\frac{1}{5} = \frac{24}{120}$, das zweite Paar von jedem der acht übrigen Mitglieder $\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$, das dritte Paar von jedem der sechs übrigen Mitglieder $\frac{1}{3} = \frac{40}{120}$, das vierte Paar von jedem der vier übrigen Mitglieder $\frac{1}{2} = \frac{60}{120}$ und endlich das fünfte Paar von jedem der beiden letzten

Mitglieder 1 erhalten, während für dieses letzte Paar nichts übrig bleibt. Demnach haben gewonnen: das erste Paar je 1, das zweite Paar $\frac{96}{120}$, das dritte Paar $\frac{66}{120}$, das vierte Paar $\frac{26}{120}$, aber verloren: das fünfte Paar $\frac{34}{120}$ und und das sechste Paar $2\frac{34}{120}$.

Ist eine Versicherungsgesellschaft nicht allzu zahlreich, so läßt sich annehmen, daß die Unglücksfälle, um die es sich handelt, immer nach einander auftreten, und werden auch bei einer größeren Gesellschaft der Fälle des gleichzeitigen Eintretens immer nur so wenige sein, daß dieselben als Ausnahmen übergangen werden können. Es ist also dieser Voraussetzung besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden, und werden wir uns, um nicht nöthig zu haben, die Brüche unter einerlei Benennung zu bringen, von jetzt ab der Decimalen bedienen. Das Sachverhältniß stellt sich alsdann für das gewählte Beispiel folgendermaßen heraus:

Bei einer Versicherungsgesellschaft von 12 Personen

Tabelle 1.

ist von den übrigen Mitgliedern beim Unglücksfalle	zu zahlen:	Der Ausgeschiedene hat überhaupt gezahlt:	Bilanz für die Ausgeschiedenen. Gewinn.	Verlust.
1	$\frac{1}{11} = 0.091$	0.000	1.000	.
2	$\frac{1}{10} = 0.100$	0.091	0.909	.
3	$\frac{1}{9} = 0.111$	0.191	0.809	.
4	$\frac{1}{8} = 0.125$	0.302	0.698	.
5	$\frac{1}{7} = 0.143$	0.427	0.573	.
6	$\frac{1}{6} = 0.167$	0.570	0.430	.
7	$\frac{1}{5} = 0.200$	0.737	0.263	.
8	$\frac{1}{4} = 0.250$	0.937	0.063	.
9	$\frac{1}{3} = 0.333$	1.187	.	0.187
10	$\frac{1}{2} = 0.500$	1.520	.	0.520
11	$\frac{1}{1} = 1.000$	2.020	.	1.020
12	.	3.020 gegen	Nichts	3.020
			4.745	4.747

Man sieht, daß sich die successive Zahlung des letzten Mitgliedes aus der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

zusammensetzt, die so weit fortzuführen ist, wie die Gesellschaft Mitglieder hat weniger eins, und daß man die Zahlungen des zweit-dritt-viert-fünftletzten u. s. w. erhält, wenn man von der Reihe successive das erste, die zwei, drei, vier ersten Glieder wegläßt, so daß z. B. das hundertste Mitglied vom Ende nur $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \ldots$ zu zahlen gehabt hat. Die successive Berechnung dieser Reihen ist natürlich um so beschwerlicher, aus je mehr Gliedern dieselben bestehen. Die Analysis lehrt indessen die Summen derselben auf kürzerem Wege finden, und zwar gerade bei mehreren Gliedern leichter, als bei einer geringeren Anzahl. Hiernach findet man, daß das **letzte** Mitglied zu zahlen hätte:

Tabelle 2.

Bei	100	anfänglichen	Mitgliedern	das	5.177	fache	des	Betrages.
„	200	„	„	„	5.873	„	„	„
„	300	„	„	„	6.279	„	„	„
„	400	„	„	„	6.567	„	„	„
„	500	„	„	„	6.791	„	„	„
„	600	„	„	„	6.973	„	„	„
„	700	„	„	„	7.128	„	„	„
„	800	„	„	„	7.261	„	„	„
„	900	„	„	„	7.379	„	„	„
„	* * *	„	„	„	* * *	„	„	„
„	1000	„	„	„	7.484	„	„	„
„	2000	„	„	„	8.178	„	„	„
„	3000	„	„	„	8.583	„	„	„
„	4000	„	„	„	8.871	„	„	„
„	5000	„	„	„	9.094	„	„	„
„	* * *	„	„	„	* * *	„	„	„
„	10000	„	„	„	9.788	„	„	„
„	20000	„	„	„	10.481	„	„	„

woraus man sieht, daß die Beträge für die letzten Mitglieder successive, wenn auch in abnehmender Progression, mit der Anzahl der ursprünglichen Mitglieder steigen.

Aus der Tab. 1. ergiebt sich, daß bei dem vorausgesetzten Versicherungsverein die zuerst ausscheidenden Mitglieder gewinnen, jedoch um so weniger, je später ihr Austritt erfolgt; daß sich bei einem dieser Mitglieder (Tab. 1. dem 8ten) Gewinn und Verlust nahebei balanciren, während von diesem Mitgliede ab alle ferner austretenden verlieren, und zwar um so mehr, je später der Austritt erfolgt, so daß der Verlust des letzten Mitgliedes am größten ist, ohne daß es gleichwohl seinen Zweck erreicht hätte; daß ferner der Verlust für die letzten Mitglieder um so größer ist, aus desto mehreren die Gesellschaft anfänglich bestand, und je vereinzelter, bei regelmäßiger Gruppirung, das Ausscheiden derselben erfolgt, während ein ungeordnetes Abgehen für die letzten Mitglieder einen noch viel größeren Verlust hervorbringen könnte.

Dieser Ausgang ist eine natürliche Folge der oben für den Versicherungsverein festgesetzten Bedingungen. Sollen die Mitglieder nur nach Maaßgabe des jedesmaligen Bedarfs beitragen, so wird das erste in den Genuß tretende Mitglied gar nicht, das zweite an einer, das dritte an zwei, das vierte an drei Repartitionen theilgenommen haben u. s. w. und die einzelnen Antheile werden um so geringer ausgefallen sein, mit desto mehr Mitgliedern die Gesellschaft angefangen hat; die zuerst austretenden Mitglieder werden also sämmtlich weniger eingezahlt haben, als sie heraus empfangen und zwar um so viel mehr weniger, je größer die Gesellschaft war; und da nun nirgends mehr ausgegeben werden kann, als eingenommen worden, so werden die letzten Mitglieder den früheren Verlust zu decken haben. — Erfolgt ferner der Abgang in geregelten Gruppen, so wird jedes Mitglied der zuletzt übrig gebliebenen an die vorletzte den Betrag 1, an die drittletzte den Betrag $\frac{1}{2}$, an die viertletzte den Betrag $\frac{1}{3}$ u. s. w. gezahlt haben und weil nun desto mehr solcher Gruppen vorhanden waren, aus je weniger Mitgliedern jede einzelne Gruppe bestand, so werden die letzten Mitglieder einen um so größeren Verlust zu erleiden haben, je vereinzelter der Abgang gewesen ist.

Denkt man sich diesen Abgang unregelmäßig erfolgen, so giebt es zwei Grenzen, innerhalb deren der Gewinn und Verlust eingeschlossen sein muß. Da nämlich kein abgehendes Mitglied mehr als den Betrag 1 empfängt, so werden Gewinn und Verlust am geringsten sein, wenn sämmtliche Mitglieder, am größten, wenn sämmtliche Mitglieder weniger eins gleichzeitig abgehen. Im ersteren Falle gewinnt und verliert Niemand etwas, im letztern Falle gewönne dagegen jedes Mitglied den Betrag 1 und das einzige zurückbleibende Mitglied hätte den ganzen Verlust zu erleiden.

Geschah die Versicherung gegen solche Unglücksfälle, welche der Mensch nach dem Principe der Sittlichkeit und dem Triebe der Selbsterhaltung zu vermeiden hat, und war man bei der Aufnahme der Mitglieder mit gehöriger Vorsicht verfahren, so wird, wie schon erwähnt, der Abgang nach den Ge-

setzen der Natur ein ziemlich regelmäßiger sein und der Verlust für das letzte Mitglied in der oben angegebenen, von der ursprünglichen Mitgliederzahl abhängigen Grenze verbleiben; wurde dagegen, wie bei den Heiraths-Aussteuerkassen, die Versicherung für solche Fälle abgeschlossen, die der Mensch mehr oder weniger selbst herbei zu führen vermag und herbeizuführen in der Mehrzahl nur allzugeneigt ist, so wird auch der Verlust für die letzten Mitglieder, die sich vielleicht in der Unmöglichkeit befinden, ihren Abgang zu beschleunigen, noch ein bei weitem größerer sein; das ganze Unternehmen muß nothwendigerweise scheitern.

Bis jetzt haben wir einen Versicherungsverein vorausgesetzt, der von Anfang an sich in sich selbst auflöst. Dergleichen Vereine werden indessen der Regel nach in der Absicht errichtet, den Verlust an abgegangenen Mitgliedern durch neue zu ersetzen, oder wohl gar so viele Mitglieder wie möglich heranzuziehen. Dennoch war aber die bisherige Betrachtung nicht überflüssig, denn einmal enthält sie die Keime für die weitere Entwickelung des Gegenstandes, und zum andern wird endlich jeder Verein in die Periode der Auflösung in sich selbst eintreten und werden von da ab die vorher entwickelten Gesetze zur Anwendung kommen. Bevor wir indeß weiter gehen, ist darauf aufmerksam zu machen, daß es im Allgemeinen gar nicht darauf ankommt, zu wissen, wieviel das Repartitions-Quantum in diesem oder jenem Falle des Abganges beträgt, sondern nur, wie hoch der Beitrag innerhalb einzelner Zeiträume, z. B. im Laufe eines Jahres, ist, und daß es hier wiederum nicht noth thut zu wissen, wie viel dieses oder jenes Mitglied während einer solchen Zeitdauer zu zahlen habe, sondern nur, wie viel von den Mitgliedern **durchschnittlich** zu zahlen sein wird. Bei der Auseinandersetzung dieses Sachverhältnisses haben wir uns der Wirklichkeit mehr und mehr zu nähern.

Aus der hinten angehängten Süßmilchschen Mortalitäts-Tabelle I. ersieht man z. B., daß von 332 sechsundvierzigjährigen Personen im Laufe des Jahres 8 absterben. Soll nun nach jedem Todesfalle von jedem Mitgliede ein Beitrag gezahlt werden, so erhält man

$$\begin{aligned} 331 &= 332 - 1 \\ 330 &= 332 - 2 \\ 329 &= 332 - 3 \\ 328 &= 332 - 4 \\ 327 &= 332 - 5 \\ 326 &= 332 - 6 \\ 325 &= 332 - 7 \\ 324 &= 332 - 8 \end{aligned}$$

$$\text{zusammen } 2620 = 8 \times 332 - \tfrac{8 \times 9}{2} \text{ Beiträge.}$$

Man findet nämlich die Summe einer Reihe natürlicher Zahlen, wenn man die erste zur letzten addirt und die Summe mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. So ist z. B.

$$1 + 2 \ldots\ldots \frac{2 \times 3}{2} = 3$$
$$1 + 2 + 3 \ldots\ldots \frac{3 \times 4}{2} = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots \frac{4 \times 5}{2} = 10$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots\ldots \frac{5 \times 6}{2} = 15$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \ldots\ldots \frac{6 \times 7}{2} = 21$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \ldots\ldots \frac{7 \times 8}{2} = 28$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \ldots \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

u. s. w. u. s. w.

Sollen aber für 8 Todesfälle $8 \times 332 - \frac{8 \times 9}{2}$ Beiträge gezahlt werden, so kommen auf jeden einzelnen Todesfall durchschnittlich $332 - \frac{9}{2}$ Beiträge, d. h. diese $327\frac{1}{2}$ Beiträge 8 mal genommen liefern für das ganze Jahr gerade die obigen 2620 Beiträge.

Werden die Beiträge **vor** den Todesfällen gezahlt, in der Art, daß von jedem Mitgliede stets ein Beitrag zur Bestreitung der nächstfolgenden Ausgabe in der Kasse vorhanden sein muß, so nimmt dieselbe im Laufe des Jahres ein:

$$\begin{aligned} 332 &= 332 - 0 \\ 331 &= 332 - 1 \\ 330 &= 332 - 2 \\ 329 &= 332 - 3 \\ 328 &= 332 - 4 \\ 327 &= 323 - 5 \\ 326 &= 332 - 6 \\ 325 &= 332 - 7 \end{aligned}$$

zusammen $2628 = 8 \times 332 - \frac{7 \times 8}{2}$

für jeden einzelnen Todesfall durchschnittlich also $332 - \frac{7}{2} = 328\frac{1}{2}$.

Aus dem eben Mitgetheilten ersieht man demnach, daß man die **durchschnittliche Anzahl der für jeden Abgangsfall bei der Kasse eingehenden Beiträge erhält, wenn man bei Vorausbezahlung die Zahl der abgehenden Mitglieder um 1 verringert, bei Nachzahlung aber um 1 erhöht und die Hälfte des Resultats von der an-**

fänglichen, d. h. von der am Anfange des betreffenden Zeitraums vorhanden gewesenen Anzahl der Mitglieder subtrahirt.

Läßt man den Umstand, ob die Zahlung vor oder nach dem eingetretenen Bedarf geschieht, außer Acht, so wird man die Zahl der abgehenden Mitglieder weder zu verringern noch zu erhöhen haben, und hat also nur die halbe Anzahl der Abgehenden von der der anfänglichen Mitglieder in Abzug zu bringen, so daß man im vorliegenden Falle die Durchschnittszahl der Beiträge auf 332 — $\frac{8}{2}$, d. i. 328 statt $327\frac{1}{2}$ oder $328\frac{1}{2}$ zu setzen hat. Wie man sieht, unterscheiden sich diese Zahlen nur wenig von einander, verhältnißmäßig um so weniger, je größer die Anfangszahl der Mitglieder ist; und da sie nun auch in der Folge bei einzelnen theoretischen Betrachtungen den Vorzug verdient, so soll sie künftig vorzugsweise benutzt werden.

Kennt man nun die durchschnittliche Zahl der Beiträge, so wie die Ausgaben, welche die Austrittsfälle im Laufe eines Jahres (oder eines jeden andern Zeitabschnittes) mit sich bringen, so ist es sehr leicht, das auf jedes Mitglied während dieser Zeit fallende Repartitions-Quantum durch Division zu berechnen. In dem gewählten Beispiele würde z. B. der durchschnittliche Jahresbeitrag eines Mitgliedes $\frac{8}{328} = 0.0244$ des Sterbegeldes sein. Wo es indessen in der Folge nicht darauf ankommt, einen wirklichen Bedarf zu berechnen, soll statt desselben einfach das Verhältniß zwischen den während eines Zeitraums abgehenden und den anfänglichen Mitgliedern, also vorliegend $\frac{8}{332} = 0.0241$, angewandt werden, weil diese Verhältnisse noch anderweitig benutzt werden können. Der Leser hat dabei nur festzuhalten, daß die wirklichen Beiträge noch etwas höher ausfallen, und zwar um so mehr, je geringer die Zahl der anfänglichen Mitglieder bereits geworden ist.

Hiernach wird das Verständniß der nachstehenden Tabelle sehr leicht sein.

Tabelle 3.

Lebensalter.	Beiträge.	Summen der Beiträge von oben herunter.	Lebensalter.	Beiträge.	Summen der Beiträge von oben herunter.	Lebensalter.	Beiträge.	Summen der Beiträge von oben herunter.
	a	b		a	b		a	b
0	0.2500	0.2500	32	0.0141	0.8147	64	0.0581	1.7532
1	0.1187	0.3687	33	0.0143	0.8290	65	0.0617	1.8149
2	0.0651	0.4338	34	0.0145	0.8435	66	0.0658	1.8807
3	0.0405	0.4743	35	0.0171	0.8606	67	0.0704	1.9511
4	0.0236	0.4979	36	0.0174	0.8780	68	0.0758	2.0269
5	0.0207	0.5186	37	0.0177	0.8957	69	0.0820	2.1089
6	0.0194	0.5380	38	0.0180	0.9137	70	0.0804	2.1893
7	0.0162	0.5542	39	0.0184	0.9321	71	0.0874	2.2767
8	0.0146	0.5688	40	0.0187	0.9508	72	0.0957	2.3724
9	0.0130	0.5818	41	0.0190	0.9698	73	0.0941	2.4665
10	0.0094	0.5912	42	0.0194	0.9892	74	0.1039	2.5704
11	0.0076	0.5988	43	0.0198	1.0090	75	0.1014	2.6718
12	0.0076	0.6064	44	0.0202	1.0292	76	0.1130	2.7848
13	0.0077	0.6141	45	0.0207	1.0499	77	0.1051	2.8899
14	0.0078	0.6219	46	0.0241	1.0740	78	0.1225	3.0124
15	0.0078	0.6297	47	0.0247	1.0987	79	0.1395	3.1519
16	0.0079	0.6376	48	0.0253	1.1240	80	0.1351	3.2870
17	0.0080	0.6456	49	0.0260	1.1500	81	0.1250	3.4120
18	0.0080	0.6536	50	0.0300	1.1800	82	0.1429	3.5549
19	0.0081	0.6617	51	0.0309	1.2109	83	0.1667	3.7216
20	0.0102	0.6719	52	0.0319	1.2428	84	0.1500	3.8716
21	0.0103	0.6822	53	0.0330	1.2758	85	0.1765	4.0481
22	0.0104	0.6926	54	0.0341	1.3099	86	0.1429	4.1910
23	0.0105	0.7031	55	0.0353	1.3452	87	0.1667	4.3577
24	0.0106	0.7137	56	0.0366	1.3818	88	0.2000	4.5577
25	0.0107	0.7244	57	0.0380	1.4198	89	0.2500	4.8077
26	0.0108	0.7352	58	0.0395	1.4593	90	0.1667	4.9744
27	0.0110	0.7462	59	0.0411	1.5004	91	0.2000	5.1744
28	0.0133	0.7595	60	0.0429	1.5433	92	0.2500	5.4244
29	0.0135	0.7730	61	0.0448	1.5881	93	0.3333	5.7577
30	0.0137	0.7867	62	0.0521	1.6402	94	0.5000	6.2577
31	0.0139	0.8006	63	0.0549	1.6951	95	0.1000	7.2577

Colonne a dieser Tabelle enthält demnach die Verhältnisse der im Laufe eines jeden Lebensalters Sterbenden aus Colonne b zu den am Anfange desselben Lebenden oder die Wahrscheinlichkeiten des Sterbens für die einzelnen Lebensalter; subtrahirt man dieselben von 1, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebens oder die Lebenskraft für die einzelnen Lebensalter. So sterben z. B. nach Süßmilch von 332 sechsundvierzigjährigen Personen im Laufe des Jahres 8, es bleiben demnach leben 324, so daß die Wahrscheinlichkeit des Sterbens, so zu sagen, der auf den Einzelnen repartirte Betrag $\frac{8}{332} = 0.0241$ und die Wahrscheinlichkeit des Lebens $\frac{324}{332} = 0.9759$ oder $1 - 0.0241$, da $\frac{324}{332} = \frac{332-8}{332} = 1 - \frac{8}{332}$ ist.

Die Sprünge, welche in den Wahrscheinlichkeiten des Sterbens, also auch in denen des Lebens, ab und zu vorkommen, liegen nicht in der Natur der Sache, sondern in der Mortalitäts-Tabelle. Da nämlich dieselbe mit nur 1000 Neugebornen beginnt, so sind die Zahlen der Lebenden dreiziffrig, die der Sterbenden einziffrig. Der Uebergang von einer geringern zu einer größern, oder von einer größern zu einer geringern Zahl von Sterbenden muß durch eine volle Einheit der Sterbenden ausgedrückt werden und giebt, durch die Lebenden dividirt, eine Abweichung, die um so größer, als die Anzahl der letzteren bereits kleiner geworden ist. Hätte man mit 10000 neugebornen Kindern begonnen, so würden die Sprünge zehnmal geringer ausgefallen sein.

Aus der Col. a ersieht man zuvörderst, daß die Lebenskraft gleich nach der Geburt am kleinsten ist (1 — 0.2500), daß sie aber von Jahr zu Jahr bis um das eilfte (nach Brune richtiger bis um das neunundzwanzigste) Lebensjahr zu, von da ab aber so langsam abnimmt, daß sie sich mehrere Jahre hindurch nur um ein Geringes ändert, dann aber rascher und immer rascher fällt, so daß nach Süßmilch der Mensch am Schlusse des 95sten oder am Anfange des 96sten Jahres sein höchstes Lebensalter erreicht hat.

Die Col. a ist aber nicht allein in so fern wichtig, als sie über den Verlauf des menschlichen Lebens von der Geburt bis zum Tode wenigstens annähernde Auskunft giebt; sie ist auch in so fern von Bedeutung, als sie uns Gelegenheit geben wird, alle im Laufe einer Versicherung vorkommende Eventualitäten kennen zu lernen. Die Werthe der Col. a drücken nämlich, nach dem Vorhergehenden, annähernd die Beträge aus, welche im Laufe der Jahre von jedem Mitgliede aufzubringen sind, wenn die in Tab. I Col. a aufgeführte Anzahl von Personen sich in einer Sterbekasse befindet. Diese Beträge verringern sich demgemäß von der Geburt an, weil sich die Wahrscheinlichkeit des Sterbens, oder allgemeiner gesprochen, weil sich die Gefahr, gegen welche man versichert hat, verringert; sie bleiben von einem Jahre zum andern dieselben, wenn die Gefahr verhältnißmäßig dieselbe bleibt, und sie erhöhen sich endlich, wenn die Gefahr größer wird.

In Col. b sind die einzelnen Beiträge von oben herunter successive addirt, so daß man daraus sehen kann, wie viel die in jedem Jahre verstorbenen Mitglieder während ihrer Lebenszeit überhaupt an Beiträgen eingezahlt haben. Soll der Eintritt in den Versicherungsverein erst in einem späteren Lebensjahre erfolgen, so ist jedesmal von den betreffenden Beträgen der auf die Jahre vor dem Eintritt fallende Gesammtbetrag in Abzug zu bringen, z. B. bei zehnjährigen Kindern 0.5792, bei zwanzigjährigen Personen 0.6591, bei dreißigjährigen 0.7704 u. s. w.

Von untergeordneter Bedeutung ist es indessen, zu wissen, was gerade die in diesem oder jenem beliebigen Jahre der Mitgliedschaft verstorbenen Personen an Gesammtbetrag gezahlt haben; viel wichtiger bleibt es dagegen, im Interesse der Billigkeit zu untersuchen, was die letzten Mitglieder bei der angenommenen Art der Beitragszahlung zu leisten haben werden? Man findet alsdann, daß

Tabelle 4.

wenn die Mitglieder bei der Aufnahme waren:	das letzte Mitglied an Gesammt-Beiträgen zu zahlen hat:
0 Jahre alt	7.2527 . . . . = 7.2527
10 „ „	7.2527 — 0.5792 = 6.6735
20 „ „	7.2527 — 0.6591 = 6.5936
30 „ „	7.2527 — 0.7704 = 6.4823
40 „ „	7.2527 — 0.9295 = 6.3232
50 „ „	7.2527 — 1.1474 = 6.1053
60 „ „	7.2527 — 1.4978 = 5.7549

Kommt nun hier noch hinzu, daß dieses letzte Mitglied während eines Jahres den Beitrag 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. gezahlt hat, so sieht man, daß bei dieser von uns anfänglich beschriebenen Einrichtung dem Vereine die Lebensfähigkeit im engeren Sinne des Wortes abzusprechen ist, wiewohl ihm die im weiteren Sinne zugestanden werden darf.

Vergleichen wir zum Schlusse noch die gefundenen Werthe mit den später zu ermittelnden jährlichen Durchschnittsbeiträgen, welche die Lebensfähigkeit der Kasse bei der zu Grunde gelegten Sterblichkeit und dem Zinsfuße von nur 3 pCt. und halbjährlicher Postnumerandozahlung, welche sich der nach dem Bedarf am meisten nähert, sichern, so ist

für Mitglieder, welche bei ihrer Aufnahme alt waren:	der jährliche Beitrag in halbjährlichen Postnumerando-Raten:
0 Jahr	0.0418
10 „	0.0159
20 „	0.0206
30 „	0.0272
40 „	0.0362
50 „	0.0524
60 „	0.0779

Stellt man diese Beiträge mit den Zahlen in Tab. I Col. a und den oben angeführten zusammen, so ergiebt sich, daß bei der Zahlung nach dem jedesmaligen Bedarf mehr zahlen:

Tabelle 5.

Wenn die Mitglieder bei der Aufnahme alt waren,

Jahre:

	0	10	20	30	40	50	60
vom Jahre nach dem Eintritt ab	61	26	26	21	17	14	10
also von ursprünglichen	1000	532	491	439	374	300	210
Mitgliedern noch	210	409	339	300	246	182	122
dagegen zahlen die letzten Mitglieder	7.2527	6.6735	6.5936	6.4823	6.3232	6.1053	5.7549
statt:	4.0128	1.3675	1.5656	1.7952	2.0272	2.4104	2.8044
	(0.0418 × 96)	(0.0159 × 86)	(0.0206 × 76)	(0.0272 × 66)	(0.0362 × 56)	(0.0524 × 46)	(0.0779 × 36)

so daß der Vortheil für die ersten Mitglieder nicht einmal allzubedeutend ist, wovon sich der Grund in der Folge ergeben wird.

Bevor sich jedoch über die Art der Zahlung nach dem jedesmaligen Bedarf ein gültiges Endurtheil fällen läßt, bleibt noch zu betrachten, wie sich die Sache herausstellt, wenn fortwährend neue Mitglieder hinzutreten.

Ist der Sterbekassen- oder Lebensversicherungs-Verein ein allgemein zugänglicher und die Anzahl der Mitglieder unbegränzt, so läßt sich über die Art und Weise des Zuganges von vorn herein natürlich gar nichts mit Sicherheit voraus bestimmen; nur so viel kann man sagen, daß derselbe in den ersten Jahren wahrscheinlich ein wachsender sein werde, weil durch den ersten Zusammentritt das dringendste Bedürfniß befriedigt ist und der Verein nach und nach bekannter werden und sich Vertrauen erwerben wird u. dgl. m. Hat der Verein indeß mehrere Jahre gewirkt, so wird sich der Zugang mehr regeln und nahebei Jahr aus Jahr ein derselbe sein, indem das Bedürfniß nach demselben als gleichbleibend anzusehen ist und sich der durch die vermehrte Volkszahl etwa vergrößerte Bedarf durch hinzukommende ähnliche Anstalten ausgleicht. Wir setzen also solchen gleichmäßigen Zugang, als den einzigen, über den sich Allgemeingültiges sagen läßt, vom Anfange an, so wie auch ferner voraus, daß das durchschnittliche Aufnahmealter dasselbe sei und die Aufnahme jedesmal am Anfange eines Jahres erfolge. Bei der Veranschaulichung des Sachverhältnisses sollen 1000 neugeborne Kinder, die am Anfange jedes Jahres hinzutreten, zu Grunde gelegt werden. Sind aber am Anfange des Jahres 1000 Neugeborne eingetreten, so sterben davon nach Süßmilch's Mortalitäts-Tabelle im Laufe des Jahres 250, und bleiben also am Ende des ersten oder für den Anfang des zweiten Jahres 750 zurück. Treten demnach zu dieser Zeit neue 1000 neugeborne Kinder hinzu, so zählt der Verein 1000 + 750 Mitglieder, von denen die letzteren bereits ein Jahr alt geworden sind. Von jenen 1000 neuen Mitgliedern hat man nun anzunehmen, daß davon im Laufe des zweiten Geschäfts- (ihres ersten Lebens-) Jahres gleichfalls 250 sterben, von den 750 Einjährigen sterben dagegen 89, so daß im Laufe dieses Jahres 250 + 89 Mitglieder sterben und der Verein am Ende des zweiten Jahres noch 750 einjährige und 661 zweijährige Mitglieder zählt.

Diese letztern werden zum Anfange des dritten Geschäftsjahres durch den Zutritt der 1000 Neugebornen auf 1000 + 750 + 661 Mitglieder erhöht, von denen aber im Verlauf dieses Jahres 250 + 89 + 43 versterben, so daß am Schlusse nur noch 750 + 661 + 618 resp. ein-, zwei- und dreijährige Mitglieder zurückbleiben.

Der abermalige Hinzutritt von 1000 neugebornen Kindern erhöht diese Zahl für den Anfang des vierten Jahres auf 1000 + 750 + 661 + 618, läßt dagegen im Laufe desselben 250 + 89 + 43 + 25 Mitglieder hinsterben.

Man sieht leicht, daß sich dieselbe Schlußfolge von Jahr zu Jahr fortsetzen läßt, so wie auch, daß sie für jede beliebige aber unveränderliche Anzahl neuer Mitglieder, so wie für jedes beliebige Lebensalter dieselbe ist. Man erhält demnach, beim gleichmäßigen Hinzutritt neuer Mitglieder desselben ursprünglichen Alters, die am Anfange eines Jahres

vorhandenen Mitglieder, einschließlich der neuen, wenn man, von dem Aufnahmealter beginnend, die Lebenden aller früheren Jahre addirt, und eben so die im Laufe des nächstvorhergegangenen Jahres Gestorbenen, wenn man die Sterbenden aller früheren Jahre addirt.

Treten demnach jährlich 1000 Kinder neu hinzu, so ist die Zahl der Mitglieder am Anfange des sechsundneunzigsten Geschäftsjahres:

1) $1000 + 750 + 661 + 618 + \cdots + 10 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

und die der im Laufe desselben Geschäftsjahres Sterbenden:

2) $250 + 89 + 43 + 25 + \cdots + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Diese letztere Zahl ist nun gleich 1000, weil sie alle von 1000 Neugebornen in den auf einander folgenden Jahren Absterbende enthält, und da nun mit dem Beginn des siebenundneunzigsten Jahres gleichfalls neue 1000 Neugeborne, also eben so viele, als im Laufe des sechsundneunzigsten Jahres abgestorben sind, hinzutreten sollen, so sind am Anfange des siebenundneunzigsten Geschäftsjahres nicht mehr oder weniger vorhanden, als es ein Jahr vorher der Fall war. Im Laufe dieses siebenundneunzigsten Jahres werden unter den angegebenen Bedingungen gleichfalls 1000 Mitglieder sterben, weil das letzte abgestorbene Mitglied aus dem Anfange des ersten Geschäftsjahres jetzt wegfällt, dafür aber das letzte aus dem Anfange des zweiten Jahres hinzutritt. Eben so fällt für das achtundneunzigste Geschäftsjahr das letzte Mitglied aus dem Anfange des zweiten Jahres weg und tritt das letzte Mitglied aus dem Anfange des dritten Jahres an seine Stelle, während für den Lauf des neunundneunzigsten Geschäftsjahres das letzte Mitglied aus dem Anfange des vierten Jahres wegfällt und dafür das letzte Mitglied aus dem Anfange des fünften Jahres hinzukommt u. s. w.

Es sterben demnach vom Beginne des sechsundneunzigsten Geschäftsjahres in jedem Jahre gleich viele, nämlich 1000, d. h. so viele Mitglieder als im Anfange jedes Jahres hinzutreten, so daß auch von dieser Zeit ab am Anfange eines jeden Jahres eine gleiche Anzahl von Mitgliedern vorhanden ist. Man kann sich diesem Resultate auch von einer andern Seite nähern. Da nämlich mit dem Ende des sechsundneunzigsten, siebenundneunzigsten, achtundneunzigsten Geschäftsjahres das letzte Mitglied resp. aus dem ersten, zweiten, dritten Jahre verstirbt, und jedes Jahr eine gleiche Anzahl Mitglieder gleichen Alters hinzutritt, so würde sich die Gesellschaft am Anfange des siebenundneunzigsten, achtundneunzigsten, neunundneunzigsten Jahres u. s. w. genau in demselben Zustande, wie am Anfange des sechsundneunzigsten befinden, wenn resp. im ersten, in den beiden ersten, in den drei ersten Geschäftsjahren noch keine Mitglieder beigetreten wären. Da es nun ferner ganz gleichgültig ist, ob zu den genannten Zeiten keine Mitglieder beigetreten, oder ob die beige-

tretenen Mitglieder bereits verstorben sind, so müssen die Personalverhältnisse in den oben angegebenen Terminen alle untereinander gleich sein.

Es ist ferner einleuchtend, daß sich dieselben Schlüsse auch auf Mitglieder jedes andern Alters und jeder andern Art der Ausscheidung, als durch den Tod, anwenden lassen, wenn nur immer die Anzahl der eintretenden Mitglieder, so wie ihre Abgangs-Qualitäten dieselben sind. Man hat alsdann die Gleichartigkeit im Personalzustande des Vereins von dem Jahre an zu datiren, mit welchem alle Mitglieder des ersten Jahres ausgeschieden sind. Wird dieses Ausscheiden eines ganzen Jahrganges durch den Tod bestimmt, so gehören dazu so viele Jahre, als vom Aufnahmealter bis zum höchsten Alter zählen, welchen Zeitraum man die Altersergänzung nennt, und welchen man nach der Süßmilchschen Mortalitäts-Tabelle findet, wenn man das Lebensalter von der Zahl 96 subtrahirt.

Wer kein Freund abstrakter Zahlenverknüpfungen ist, kann sich das Ganze auch durch ein Bild veranschaulichen. Es mögen zu dem Zwecke a + b + c + d + e + f + g Personen mit dem Anfange eines jeden Jahres in den Verein eintreten, von denen jedesmal die a im Laufe des ersten, die b im Laufe des zweiten, die c im Laufe des dritten Jahres u. s. w. ihres Beitritts wiederum ausscheiden, so erhält man folgendes, nach Jahren des Abgangs geordnete Verzeichniß der Ausscheidenden.

Tabelle 6.

Die Mitglieder treten ein im Geschäftsjahre	Die Mitglieder scheiden aus im Geschäftsjahre											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	a	b	c	d	e	f	g					
2		a	b	c	d	e	f	g				
3			a	b	c	d	e	f	g			
4				a	b	c	d	e	f	g		
5					a	b	c	d	e	f	g	
6						a	b	c	d	e	f	g
7							a	b	c	d	e	f
8								a	b	c	d	e
9									a	b	c	d
10										a	b	c
11											a	b
12												a

Sollen nun alle neu eingetretenen Mitglieder in demselben Jahre des Eintretens auch wiederum ausscheiden, so zählen die Mitglieder b, c, d, e, f, g,

gar nicht und es scheiden jährlich a aus; soll der Turnus ein zweijähriger sein, so zählen c, d, e, f, g, nicht und es treten im ersten Jahre a, alsdann aber jährlich b + a aus; bei einem dreijährigen Turnus zählen d, e, f, g, nicht, so daß im ersten Jahre a, im zweiten b + a und von da ab jährlich c + b + a ausscheiden u. s. w. Man sieht also hieraus wiederum, daß von demjenigen Jahre an, in welchem die letzten Mitglieder des ersten Jahrganges ausscheiden, der jährliche Abgang an Mitgliedern unveränderlich und zwar dem jährlichen Zugange gleich ist, so daß auch von da ab die Mitgliederzahl am Anfange der Jahre dieselbe sein muß, wie es z. B. bei einer Bevölkerung der Fall ist, in welcher seit länger als einem Menschenalter jährlich eine gleiche Anzahl von Kindern geboren worden und die Mortalitäts-Verhältnisse dieselben geblieben sind.

Mit diesen Schlüssen stimmt nun auch das Mitglieder-Verzeichniß am Anfange der Jahre überein. Man findet nämlich

die Anzahl der Mitglieder

am Anfange des Jahres:	1	$a + b + c + d + e + f + g$
	2	$a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g$
	3	$a + 2b + 3c + 3d + 3e + 3f + 3g$
	4	$a + 2b + 3c + 4d + 4e + 4f + 4g$
	5	$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 5f + 5g$
	6	$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 6g$
	7	$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g$
	8	$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g$

u. s. w.

so daß die unveränderliche Anzahl der Mitglieder

3) beim 1jährigen Turnus auch durch: a

" 2	"	"	"	"	$a + 2b$
" 3	"	"	"	"	$a + 2b + 3c$
" 4	"	"	"	"	$a + 2b + 3c + 4d$
" 5	"	"	"	"	$a + 2b + 3c + 4d + 5e$
" 6	"	"	"	"	$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f$
" 7	"	"	"	"	$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g$

u. s. w.

ausgedrückt werden kann.

Dieser Unveränderlichkeit wegen nennt man den Stand einer Gesellschaft, bei welcher der jährliche Abgang dem jährlichen Zugange gleich geworden, also auch die Mitgliederzahl unveränderlich bleibt, den Beharrungszustand, und findet nach (1) oder nach (3) die unveränderliche Anzahl der Mitglieder im

Beharrungszustande dadurch, daß man aus einem und demselben Jahrgange entweder die Anzahl der Mitglieder am Anfange der Jahre, vom ersten bis zum letzten, addirt, oder die Abgehenden des ersten, zweiten, dritten Jahres u. s. w. resp. mit 1, 2, 3 u. s. w. multiplicirt und die Produkte gleichfalls addirt. Will man dagegen den Bestand, so wie den Abgang der Mitglieder zu einer bestimmten Zeit vor dem Beharrungszustande ermitteln, so hat man, um den Bestand zu finden, jene Addition oder Multiplicationen und Addition nur vom Anfange bis zur gegebenen Zeit zu verrichten; um aber den Abgang zu finden, entweder die Abgehenden eines und desselben Jahrganges zu addiren, oder, was in den meisten Fällen kürzer ist, von der Anzahl der beitretenden Mitglieder eines Jahrganges die zur gegebenen Zeit noch übrig gebliebenen desselben Jahrganges zu subtrahiren.

Hiernach wird das Verständniß der nachfolgenden Tabelle leicht sein.

Tabelle 7.

Lebensalter.	Summen der Lebenden von oben herab.	Summen der Todten von oben herab.	Quotienten der beiden vorhergehenden Colonnen b : a	Lebensalter.	Summen der Lebenden von oben herab.	Summen der Todten von oben herab.	Quotienten der beiden vorhergehenden Colonnen b : a	Lebensalter.	Summen der Lebenden von oben herab.	Summen der Todten von oben herab.	Quotienten der beiden vorhergehenden Colonnen b : a
	a	b	c		a	b	c		a	b	c
0	1000	250	0.2500	32	17524	579	0.0330	64	27306	838	0.0307
1	1750	339	0.1880	33	17945	585	0.0326	65	27468	848	0.0309
2	2411	382	0.1584	34	18360	591	0.0322	66	27620	858	0.0311
3	3029	407	0.1344	35	18769	598	0.0319	67	27762	868	0.0313
4	3622	421	0.1162	36	19171	605	0.0316	68	27894	878	0.0315
5	4201	433	0.1031	37	19566	612	0.0313	69	28016	888	0.0317
6	4768	444	0.0931	38	19954	619	0.0310	70	28128	897	0.0319
7	5324	453	0.0851	39	20335	626	0.0308	71	28231	906	0.0321
8	5871	461	0.0785	40	20709	633	0.0306	72	28325	915	0.0323
9	6410	468	0.0730	41	21076	640	0.0304	73	28410	923	0.0325
10	6942	473	0.0681	42	21436	647	0.0302	74	28487	931	0.0327
11	7469	477	0.0639	43	21789	654	0.0300	75	28556	938	0.0328
12	7992	481	0.0602	44	22135	661	0.0299	76	28618	945	0.0330
13	8511	485	0.0570	45	22474	668	0.0297	77	28673	951	0.0332
14	9026	489	0.0562	46	22806	676	0.0297	78	28722	957	0.0333
15	9537	493	0.0517	47	23130	684	0.0296	79	28765	963	0.0334
16	10044	497	0.0495	48	23446	692	0.0295	80	28802	968	0.0335
17	10547	501	0.0475	49	23754	700	0.0295	81	28834	972	0.0337
18	11046	505	0.0457	50	24054	709	0.0295	82	28862	976	0.0338
19	11541	509	0.0441	51	24345	718	0.0295	83	28886	980	0.0339
20	12032	514	0.0427	52	24627	727	0.0295	84	28906	983	0.0340
21	12518	519	0.0415	53	24900	736	0.0296	85	28923	986	0.0341
22	12999	524	0.0403	54	25164	745	0.0296	86	28937	988	0.0341
23	13475	529	0.0392	55	25419	754	0.0297	87	28949	990	0.0342
24	13946	534	0.0383	56	25665	763	0.0297	88	28959	992	0.0343
25	14412	539	0.0374	57	25902	772	0.0298	89	28967	994	0.0343
26	14873	544	0.0366	58	26130	781	0.0299	90	28973	995	0.0343
27	15329	549	0.0358	59	26349	790	0.0300	91	28978	996	0.0344
28	15780	555	0.0352	60	26559	799	0.0301	92	28982	997	0.0344
29	16225	561	0.0346	61	26760	808	0.0302	93	28985	998	0.0344
30	16664	567	0.0340	62	26952	818	0.0304	94	28987	999	0.0345
31	17097	573	0.0335	63	27134	828	0.0306	95	28988	1000	0.0345

Col. a enthält die successiven Summen der Lebenden nach Süßmilch, Col. b eben so die successiven Summen der Gestorbenen von der Geburt bis zum höchsten Lebensalter. In jener Colonne findet man demnach die Anzahl der Mitglieder, in dieser die der Sterbenden eines Vereins, welcher am Anfange eines jeden Jahres 1000 neugeborne Kinder aufnimmt und bei welchem das Absterben nach der Süßmilch'schen Tabelle erfolgt. Sollen die aufzunehmenden Personen älter, aber der jährliche Zugang der Tabellenzahl nach Süßmilch gleich sein, so hat man von den Zahlen der Colonnen a und b die resp. dem nächstvorhergehenden Alter entsprechenden Summen zu subtrahiren. So findet man z. B. für die Anzahl der Mitglieder im Beharrungszustande:

Tabelle 8.

Bei einem gleichmäßigen jährlichen Zugange

von	532	zehnjährigen	Mitgliedern	28988 —	6410	=	22578
„	491	zwanzigjährigen	„	28988 —	11541	=	17447
„	439	dreißig	„ „	28988 —	16225	=	12763
„	374	vierzig	„ „	28988 —	20335	=	8653
„	300	funfzig	„ „	28988 —	23754	=	5234
„	210	sechzig	„ „	28988 —	26349	=	2639

Zur bessern Vergleichung bringen wir diese Zahlen sämmtlich auf die gleiche Zahl von 1000 jährlich Beitretenden dadurch, daß wir die gefundenen Werthe mit 1000 multipliciren und die Produkte durch die ursprünglichen Zahlen 532, 491, 439 u. s. w. dividiren. Hiernach ergeben sich für den Beharrungszustand

Tabelle 9.

Bei	neugebornen	Mitgliedern	28988
„	zehnjährigen	„	42440
„	zwanzigjährigen	„	35535
„	dreißig	„ „	29073
„	vierzig	„ „	23136
„	funfzig	„ „	17447
„	sechzig	„ „	12567

Der Sprung anfänglich veranlaßt uns, die Erscheinung weiter zu erforschen und noch die Zahlen für Mitglieder der jüngsten Alter zu ermitteln. Im Beharrungszustande sind:

Tabelle 10.

einjährige	Mitglieder	37317
zwei	=	41207
drei	=	43005
vier	=	43776
fünf	=	43810
sechs	=	43716
sieben	=	43561,

d. h. treten jährlich eine gleich große Menge Mitglieder verschiedenen Alters in den Verein oder eine Bevölkerung ein, so wird ihr beharrlicher Erfolg nach der Süßmilch'schen Mortalitäts-Tabelle um so größer sein, je näher sie sich, sei es im Weniger oder im Mehr, dem fünften Lebensjahre befinden, wo er nahe bei das 44fache beträgt.

Will man aber den Bestand des Vereins am Anfange irgend eines Jahres vor dem Beharrungszustande haben, so erhält man ihn, wenn man von den eben gefundenen Zahlen wiederum die dem gegebenen Zeitpunkte entsprechenden Zahlen des Beharrungszustandes subtrahirt. Wären jedoch für ein und dasselbe Alter mehrere solche hintereinander folgende Werthe zu berechnen, so würde man mit kleineren Zahlen arbeiten, wenn man nur den ersten auf die angegebene Weise und die übrigen daraus durch direkte Addition der Lebenden berechnete.

Bevor zur praktischen Anwendung des eben Gesagten übergegangen wird, haben wir den Gegenstand noch von einem andern Gesichtspunkte aufzufassen, der gleichfalls häufige Anwendung bei Beurtheilung der Lebensfähigkeit von Versicherungs-Anstalten findet. Wir kehren zu dem Ende zu der zuvor mit (1) markirten Reihe zurück. Diese Reihe bedeutet, wie schon gesagt, die Volkszahl einer Gemeinde, in der Jahr aus Jahr ein 1000 Kinder geboren werden; sie hat indeß noch eine andere gleich wichtige Bedeutung. Setzt man nämlich voraus, daß das Absterben der Personen eines jeden Jahres immer erst am Ende des Sterbejahres geschehe, eine Voraussetzung, die zwar gegen die Natur der Sache verstößt, aber späterhin ihre Berichtigung erhalten wird; so durchleben die tausend Neugebornen zunächst zusammen 1000 Jahr und verlieren alsdann 250; die zurückgebliebenen einjährigen Kinder durchleben wiederum 750 Jahr und verlieren 89; die noch vorhandenen zweijährigen Kinder durchleben zusammen abermals 661 Jahr und verlieren am Schlusse des zweiten Lebensjahres 43, u. s. w. Man sieht daher, daß auf jene 1000 Neugebornen überhaupt so viele Lebensjahre kommen, als die durch (1) bezeichnete Reihe, oder der Beharrungszustand ausmacht. Dieselbe Schlußfolge läßt sich auf

Personen jedes beliebigen Alters anwenden, so daß z. B. nach Süßmilch:

507 Sechszehnjährige zusammen 507 + 503 + 499 + 495 + .. + 3 + 2 + 1
und 503 Siebenzehnjährige " 503 + 499 + 495 + .. + 3 + 2 + 1
Jahre durchleben. Gleichzeitig wird hieraus klar, daß, so lange man es mit Zahlen der Mortalitäts-Tabellen, d. h. mit Lebenden nach dem natürlichen Bevölkerungszustande zu thun hat, man die Anzahl der von Personen gleichen Alters durchzulebenden Jahre erhalten kann, wenn man zu den durchzulebenden Jahren der Personen des nächsthöheren Alters noch die Lebenden des betreffenden Alters addirt. Hiernach lassen sich alle in Betracht kommende Summen durch Addition von unten auf leicht berechnen.

Tabelle 11.

So leben	1	fünfundneunzigjährige Person	. . . .	1 Jahr
" "	2	vierundneunzig "	Personen zusammen 2 + 1 =	3 Jahre
" "	3	dreiundneunzig "	" " 3 + 3 =	6 "
" "	4	zweiundneunzig "	" " 4 + 6 =	10 "
" "	5	einundneunzig "	" " 5 + 10 =	15 "
" "	6	neunzig "	" " 6 + 15 =	21 "
" "	8	neunundachtzig "	" " 8 + 21 =	29 "
" "	10	achtundachtzig "	" " 10 + 29 =	39 "

u. s. w.

wie solches in der Mortalitäts-Tabelle I Col. c ausgeführt ist, und bemerken wir zu gleicher Zeit, daß von jetzt ab solche Additionen von unten auf, statt der bisherigen von oben herunter, eine bedeutende Rolle spielen werden.

Leben aber 507 sechszehnjährige Personen zusammen die zuvor angegebene Anzahl von Jahren, so kann man freilich nicht wissen, wie viel davon auf diese oder jene bestimmte unter ihnen kommen werden, man kann aber sagen, daß bei vorausgesetzter gleichmäßiger Vertheilung jede von ihnen durchschnittlich

$$\frac{507 + 503 + 499 + 495 + \ldots + 3 + 2 + 1}{507} = \frac{19451}{507}$$

oder 38.36 alt werden würde. Man nennt dieses die **durchschnittliche** oder **mittlere Lebensdauer**, so daß man unter diesem Ausdruck dasjenige Alter versteht, das von einer großen Menge gleichaltriger Personen jede einzelne erreichen würde, wenn alle gleich alt und dennoch dieselbe Zahl von Jahren durchlebt haben würden, die sie in der Wirklichkeit durchleben. **Die mittlere Lebensdauer eines bestimmten Alters wird daher gefunden, wenn man die Tabellenzahlen der Lebenden des gegebenen Alters und aller höheren Alter addirt und die Summe durch die zuerst genannte Zahl dividirt.** Soll man diese Lebensdauer für eine größere Menge hinter-

einander folgender Lebensalter finden, so erreicht man sein Ziel am leichtesten, wenn man beim Addiren der Lebenden mit dem höchsten Alter beginnt und aus dieser Summe die für die übrigen Alter durch successives Hinzufügen der Lebenden der jüngeren Alter ableitet.

Wie man aus Col. d der Tabelle I sieht, — deren Zahlen aus der Division der Zahlen in Col. c und a entstanden sind, — nimmt die mittlere Lebensdauer von der Geburt bis zum ersten Lebensjahre (wegen der großen Sterblichkeit der Kinder im ersten Lebensjahre, Col. b) rasch zu, von hier immer langsamer bis zum dritten, vierten und fünften Lebensjahre, für welches die mittlere Lebensdauer am größten wird, um von hier ab immer kleiner und kleiner zu werden, so jedoch, daß die Abnahme nie ein volles Jahr erreichen kann. Eine solche Abnahme würde nämlich bedeuten, daß die Person des jüngern Alters mit Gewißheit das nächste Jahr durchleben werde; da aber für jede Lebensperiode Gefahr zu sterben vorhanden ist, so bringt sich diese durch den Gang der Rechnung selbst in Abzug.

Die nach einer vorliegenden Mortalitäts-Tabelle berechneten mittleren Lebensdauern haben denselben Anspruch auf Gültigkeit, wie die Tabelle selbst. Da aber jede solche Tabelle nur relativ wahr ist, d. h. der Wirklichkeit mehr oder weniger nahe kommt, ohne dieselbe je zu erreichen, so ist letzteres natürlich auch mit der durchnittlichen Lebensdauer der Fall. Eine, höchstens zwei Decimalen sind demnach bei Bestimmung dieser Dauern hinreichend und ist ein Lebensalter im Bruchtheil eines Jahres angegeben, so kann man den Bruch in den allermeisten Fällen bei Bestimmung der mittleren Lebensdauer weglassen, wenn derselbe kleiner als $\frac{1}{2}$, oder dafür ein volles Jahr rechnen, wenn der Bruch größer als $\frac{1}{2}$ ist, so daß in Bezug auf die mittlere Lebensdauer z. B. $34\frac{3}{8}$ Jahr so viel als 34 Jahr und $34\frac{5}{8}$ Jahr so viel als 35 Jahr wäre. Mitunter kann es jedoch nöthig, wenigstens vortheilhaft sein, die Bruchtheile mit in Anschlag zu bringen, und da dieser Umstand da, wo es sich um Verbindungen zweier oder mehrerer Personen und den Unterschied von mehreren Jahren handelt, immer zu berücksichtigen ist, so mag er sogleich hier erörtert werden. Für die gewählten Beispiele ist die mittlere Lebensdauer vierunddreißigjähriger Personen 26.61 Jahr und die fünfunddreißigjähriger Personen 25.99 Jahr (Col. d), also sinkt in diesem Alter die mittlere Lebensdauer um 26.61 — 25.99 = 0.62 Jahr, während die Personen um ein Jahr älter werden (Col. e), und da sich dieser Unterschied von einem Jahre zum andern nur wenig ändert, so wird solches im Verlaufe eines und desselben Jahres noch weniger der Fall sein; es kommt also auf $\frac{3}{8}$ Jahr eine Abnahme von $\frac{3}{8} \times 0.62 = 0.23$ und auf $\frac{5}{8}$ Jahr eine Abnahme von $\frac{5}{8} \times 0.62 = 0.39$, so daß dem Lebensalter $34\frac{3}{8}$ die mittlere Lebensdauer 26.61 — 0.23 = 26.38, und dem Lebensalter $34\frac{5}{8}$ die Dauer 26.61 — 0.39

= 26.22 zukäme. Man nennt dieses Verfahren das Einschalten oder Interpoliren.

Vergleicht man die eben besprochenen mittleren Lebensdauern mit den Resultaten in den vorhergehenden Tabellen 8 und 9, so sieht man, daß die beiderseitigen Ziffern übereinstimmen und jene Resultate nur das Tausendfache der mittleren Lebensdauern sind. Der Grund davon ist sehr einfach. Die genannten Resultate wurden dadurch gefunden, daß man für jedes gegebene Lebensalter von der Summe der Zahlen aller Lebensalter — 28988 — die Summe der Zahlen aller jüngeren Alter subtrahirte, diese Differenzen, also die Zähler der mittleren Lebensdauern mit 1000 multiplicirte und die Produkte durch die betreffende Zahl der Lebenden des gegebenen Alters dividirte. Verrichtet man die beiden letzten Operationen in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man durch die Division die dem gegebenen Alter zugehörige mittlere Lebensdauer, und bleibt es sodann gleichgültig, ob man mit 1000 oder mit jeder andern Zahl zu multipliciren hat. Sind also in einen Verein jährlich eine gleiche Anzahl gleichaltriger Mitglieder eingetreten, so erhält man die Zahl der Mitglieder im Beharrungszustande, wenn man die mittlere Lebensdauer des betreffenden Alters mit der Anzahl der jährlich eingetretenen Mitglieder multiplicirt; dagegen ergiebt sich die Zahl der Mitglieder für den Anfang eines jeden Jahres vor dem Beharrungszustande, wenn man die mittleren Lebensdauern der ältesten Mitglieder zur Zeit ihres Eintritts, so wie zur in Rede stehenden Zeit resp. mit den entsprechenden Tabellenzahlen der Lebenden multiplicirt und die Differenz der Produkte von der Tabellenzahl der Lebenden zur Zeit des Eintritts auf die Anzahl der jährlich Beitretenden bringt.

Sollen z. B. jährlich 800 vierundzwanzigjährige Mitglieder einem Vereine beitreten, so ist die Anzahl der Mitglieder am Anfange des fünften Jahres, also nach vier Jahren:

$$\{32.9363 \times 471 - 29.6809 \times 445\} \times \tfrac{800}{471} = 3915.$$

Von der Richtigkeit einer solchen Rechnung kann man sich folgendermaßen direkt überzeugen.

Leben von 471 vierundzwanzigjährigen Personen

nach 4 Jahren	451,	so von 800:	766
„ 3 „	456,	„ „ „	774
„ 2 „	461,	„ „ „	783
„ 1 „	466,	„ „ „	792
neu Eingetretene		„ „ „	800
		sind	3915

Eben so gut, wie man von der mittleren Lebensdauer einer größeren Menge Personen gleichen Alters spricht, kann solches von einer aus verschiedenen Altersklassen bestehenden Menge geschehen. Will man z. B. die mittlere Lebensdauer von

300 vierundzwanzigjährigen Personen
250 achtundzwanzig " "
und 190 dreiunddreißig " "

bestimmen, so sagt man: nach dem Begriffe der mittleren Lebensdauer leben zusammen:

300 vierundzwanzigjährige Personen:	$300 \times 32.94 = 9882$	Jahre
250 achtundzwanzig " "	$250 \times 30.29 = 7572$	"
190 dreiunddreißig " "	$190 \times 27.23 = 5174$	"
also leben 740 Personen zusammen	22628	Jahre,

demnach jede Person durchschnittlich $\frac{22628}{740} = 30.57$ Jahre.

Man findet hiernach die mittlere Lebensdauer einer aus verschiedenen Altersklassen zusammen gesetzten Gesellschaft von Personen, wenn man die mittlere Lebensdauer jeder einzelnen Klasse mit der Anzahl der Personen dieser Klasse multiplicirt, die Produkte addirt und die Summe durch die Anzahl sämmtlicher vorhandenen Personen dividirt.

Sind indessen die Mitglieder nach der natürlichen Volkszahl, oder was dasselbe, nach den Zahlen der Lebenden einer Mortalitäts-Tabelle vorhanden, so kann man die Multiplication ersparen, weil sich die betreffenden Produkte in der Tab. I Col. c wieder vorfinden. Diese Bemerkung führt zu einem einfachen Verfahren, die mittlere Lebensdauer der Mitglieder eines Vereins zu finden, der daraus hervorgegangen, daß demselben vom Anfange an jährlich eine gleiche Menge von Personen eines und desselben ursprünglichen Alters beigetreten sind. Wäre z. B. das durchschnittliche Alter aller Neueingetretenen das vierundzwanzigste Jahr gewesen, so wären nach dem kurz zuvor Gesagten die Zahlen

(Tab. I Col. c) 15513
15042
14576
14115
13659
u. s. w.

zu addiren und die Summe durch die betreffende Zahl der noch vorhandenen Mitglieder zu dividiren. Nun sind aber jene Summanden, ihrer Entstehung nach, nichts anderes, als die respectiven Summen

4) (15513) . . . 471 + 466 + 461 + 456 + 451 + 445 + 439 + ...
(15042) 466 + 461 + 456 + 451 + 445 + 439 + ...
(14576) 461 + 456 + 451 + 445 + 439 + ...
(14115) 456 + 451 + 445 + 439 + ...

d. h. nichts anderes, als die Summen der Summen der Lebenden vom Aufnahmealter an bis zur Zeit der Untersuchung; also bis zu Ende, wenn der Beharrungszustand gemeint ist, weswegen diese letzteren Summen der Summen der Lebenden in Col. f der Mortalitäts-Tabelle von mir neu hinzugefügt worden sind. Hieraus folgt:

Um die mittlere Lebensdauer eines Vereins, in welchen jährlich eine große Menge Mitglieder, alle gleichen Aufnahmealters, eintreten, zum Anfange irgend eines beliebigen Jahres zu finden, nehme man die Summe der Summen der Lebenden des Aufnahmealters, subtrahire davon die Summe der Summen der Lebenden des dem festgesetzten Jahre nächstfolgenden, behandle die Summen der Lebenden in gleicher Art und dividire die erstere Differenz durch die letztere.

Auf diese Weise erhält man nachstehende Werthe der mittleren Lebensdauern beim jährlich gleichmäßigen Zugange von Mitgliedern des Vereins:

Tabelle 12.

Jahre Alter beim Eintritt.	Nach Jahren der Mitgliedschaft:									Im Beharrungszustande
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
0	40.40	39.70	38.25	35.27	33.16	31.44	30.27	29.73	29.59	29.57
5	42.05	39.01	36.09	33.50	31.32	29.71	28.79	28.47	.	28.41
10	39.10	35.90	33.05	30.59	28.64	27.32	26.72	26.56	.	26.54
20	32.35	29.47	26.96	24.45	23.58	22.94	22.77	.	.	22.75
30	26.15	23.55	21.45	20.05	19.33	19.14	.	.	.	19.11
40	20.07	17.85	16.29	15.55	15.33	.	.	.	.	15.31
50	15.15	13.48	12.66	12.39	.	.	.	.	.	12.38
60	10.13	9.79	9.48	.	.	.	.	.	.	9.44

Aber nicht bloß die mittlere Lebensdauer, auch das *mittlere Lebensalter* sämmtlicher noch vorhandener Mitglieder eines aus gleichmäßiger jährlicher Rekrutirung hervorgegangenen Vereines läßt sich zu jeder beliebigen Zeit bestimmen.

Man gelangt am einfachsten zur Lösung dieser Aufgabe, wenn man sie

nicht ganz direkt nimmt, sondern ausmittelt, um wie viele Jahre die noch vorhandenen Mitglieder seit ihrem Eintritte durchschnittlich älter geworden, also zunächst, um wie viele Jahre sämmtliche noch vorhandene Mitglieder zusammen genommen älter sind. Handelte es sich z. B. um vierzigjährige Personen am Anfange des sechsten Geschäftsjahres, so sind die 374 Mitglieder, welche gerade zur Zeit der Untersuchung eingetreten sind, noch gar nicht älter geworden, zählen also für nichts. Von den vor einem Jahre eingetretenen Mitgliedern sind nach der Mortalitäts-Tabelle noch 367 vorhanden und jedes von ihnen ist ein Jahr älter geworden, zusammen also 367 Jahr. Eben so sind 360 Mitglieder von den vor zwei Jahren eingetretenen vorhanden, und da jedes derselben auch zwei Jahr älter geworden, so zählen sie für 2×360. Gleicherweise zählen die 353 Mitglieder, welche nebst den inzwischen verstorbenen vor drei Jahren eintraten, für 3×353 Jahr u. s. w., so daß sämmtliche Mitglieder überhaupt

$$367 + 2 \times 360 + 3 \times 353 + 4 \times 346 + 5 \times 339$$

Jahre älter geworden sind. Dieser Gesammtbetrag läßt sich auch so schreiben:

$$\begin{array}{rl} 5) & 339 + 346 + 353 + 360 + 367 \\ & 339 + 346 + 353 + 360 \\ & 339 + 346 + 353 \\ & 339 + 346 \\ & 339 \end{array}$$

Wir haben hier also wiederum, wie unter (4) eine Summe von Summen der Lebenden, nur mit dem Unterschiede, daß dort jede einzelne Summe bis zum höchsten Lebensalter ging, hier dagegen nicht über den festgesetzten Termin der Untersuchung hinausreichen darf, so daß der Ueberschuß zu entfernen bleibt. Nun kommt in der Summe der Lebenden 6853 die Zahl der Lebenden 339 von unten auf zum ersten, in 8279 dagegen zum fünften mal vor, so daß die Differenz der Summe der Summen der Lebenden $126714 - 88919 = 37795$ die 339 Lebenden fünfmal, die 346 viermal, die 353 dreimal, die 360 zweimal und endlich die 367 einmal, außerdem aber noch die Summe der Lebenden vom sechsundvierzigsten Lebensjahre abwärts, d. h. die Zahl 6514 fünfmal enthält. Die in Rede stehende Summe ist also $126714 - 88919 - 5 \times 6514 = 5225$; und in der That sind

$$\begin{array}{rcr} 367 & = & 367 \\ 2 \times 360 & = & 720 \\ 3 \times 353 & = & 1059 \\ 4 \times 346 & = & 1384 \\ 5 \times 339 & = & 1695 \\ \hline & & 5225. \end{array}$$

So erhält man für die ganze Arbeit die Regel: Soll man das mittlere Lebensalter eines aus gleichmäßiger Rekrutirung hervorgegangenen Vereins zum Anfange irgend eines Geschäftsjahres finden, so füge man zum Aufnahmealter die gegebene Geschäftsdauer um 1 erhöht, subtrahire die Summe der Summen der Lebenden für dieses höhere Alter von der des um 1 erhöhten Aufnahmealters, außerdem aber noch die Summe der Lebenden für jenes höhere Alter so oft genommen, als die Geschäftsdauer Jahre hat, dividire die Differenz durch den Bestand der noch vorhandenen Mitglieder und addire endlich zu dem Quotienten das Aufnahmealter.

Bei vorausgesetztem jährlich gleichmäßigen Eintritte findet man nach der eben aufgestellten Regel nachstehende mittlere Lebensalter der Vereinsmitglieder:

Tabelle 13.

Alter beim Eintritt.	Nach Jahren der Mitgliedschaft:									Im Beharrungszustande
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
0	4.5	9.1	13.6	17.9	21.7	24.8	27.1	28.2	28.5	28.6
5	9.9	14.6	19.2	23.3	26.9	29.8	31.6	32.2	.	32.6
10	14.9	19.6	24.1	28.1	31.5	33.9	35.1	35.5	:	35.6
20	24.9	29.5	22.9	37.3	39.9	41.3	41.7	.	.	41.8
30	34.8	39.3	43.1	46.4	47.1	47.6	.	.	.	47.7
40	44.8	49.6	52.2	54.0	54.6	.	.	.	.	54.7
50	54.6	58.3	60.5	61.3	.	.	.	.	.	61.4
60	64.4	67.2	68.3	.	.	.	.	.	.	68.4

Berechnet man hieraus durch Interpolation die mittleren Lebensdauern und stellt dieselben mit den direkt gefundenen (Tab. 12) zusammen, so erhält man die nachfolgende Tabelle, aus der man sieht, daß die direkt gefundenen mittleren Lebensdauern im Ganzen nur wenig von den aus den mittleren Lebensaltern abgeleiteten abweichen, namentlich für Personen derjenigen Alter, die von den Versicherungs-Anstalten Gebrauch zu machen pflegen.

Tabelle 14.

Alter beim Eintritt.		Nach Jahren der Mitgliedschaft: 10	20	30	40	50	60	70	80	90	Im Beharrungszustande:
0	direkt	40.40	39.70	38.25	35.27	33.16	31.44	30.27	29.73	29.59	29.57
	indirekt	43.80	42.84	40.03	37.03	34.44	32.42	30.88	30.16	29.98	29.92
5	direkt	42.05	39.01	36.09	33.50	31.32	29.71	28.79	28.47	.	28.41
	indirekt	42.49	39.34	36.11	33.40	31.02	29.19	28.10	27.73	.	27.60
10	direkt	39.10	35.90	33.05	30.59	28.64	27.32	26.72	26.56	.	26.54
	indirekt	39.13	35.83	32.87	30.22	28.15	26.67	25.93	25.68	.	25.62
20	direkt	32.35	29.49	26.96	24.95	23.58	22.94	22.77	.	.	22.75
	indirekt	32.35	29.38	27.29	24.68	23.20	22.39	22.16	.	.	22.10
30	direkt	26.15	23.55	21.45	20.05	19.33	19.14	.	.	.	19.11
	indirekt	26.11	23.54	21.33	19.40	19.03	18.76	.	.	.	18.70
40	direkt	20.07	17.85	16.29	15.22	15.33	.	.	.	.	15.30
	indirekt	20.37	17.99	16.36	15.48	15.19	.	.	.	.	15.14
50	direkt	15.15	13.48	12.66	12.39	.	.	.	.	.	12.38
	indirekt	15.19	13.40	12.33	11.94	.	.	.	.	.	11.88
60	direkt	10.13	9.79	9.48	.	.	.	.	.	.	9.44
	indirekt	10.62	9.56	9.19	.	.	.	.	.	.	9.15

Nachdem wir auf diese Weise unsre Hülfsmittel zur Untersuchung der Lebensfähigkeit verschiedener Einrichtungen bei Versicherungs-Anstalten dadurch vermehrt haben, daß wir möglich gefunden, eine Gesellschaft einzelner Versicherter so zu sagen als aus bloßen mittleren Menschen zusammengesetzt anzusehen, kehren wir zur Untersuchung des jeweiligen Bedarfs zurück und dividiren zu dem Zwecke in Tab. 7 die Zahlen der Col. b durch die der Col. a, um wenigstens nahebei den jedesjährlichen Durchschnittsbedarf für ein Mitglied zu erhalten. Vergleicht man nun diese Quotienten der Col. c mit einander und mit denen der Col. a, Tab. 3, so erhält man vollständigen Aufschluß über den jedesmaligen Bedarf bei Versicherungsgeschäften.

Man sieht zunächst, daß der auf ein Mitglied repartirte jährliche Bedarf bei der Voraussetzung eines gleichmäßigen Zuganges anfangs zwar gleichfalls abnimmt, wie beim sofortigen Aussterben, Tab. 3, daß jene Abnahme aber eine viel langsamere ist und bis zum neunundvierzigsten Lebensjahre der

ältesten Mitglieder oder dem fünfzigsten Geschäftsjahre anhält, während solches nach Tab. 3. nur bis zum dreizehnten Geschäftsjahre der Fall war; daß bis zu diesem fünfzigsten Geschäftsjahre der jedesmalige Bedarf in Tab. 4. größer bleibt, als der in Tab. 3, während von da ab, trotz des Steigens, der Bedarf nach Tab. 4. geringer ausfällt, als der nach Tab. 3., so wie endlich, daß zu manchen Zeiten der Bedarf für mehrere auf einander folgende Jahre fast derselbe bleibt, ungeachtet bis auf vier Decimalen gerechnet worden.

Untersuchen wir nun den Grund aller dieser Erscheinungen, so ergiebt sich, daß der Bedarf im zweiten Jahre nach Tab. 3: $\frac{89}{750}$, nach Tab. 4. aber $\frac{339}{1750}$ ist. Der letztere Bruch läßt sich auch schreiben $\frac{89+250}{750+1000}$, wo nun nach Tab. 3. im ersten Jahre $\frac{250}{1000} > \frac{89}{750}$ ist. Der Grund also, warum $\frac{339}{1750} < \frac{250}{1000}$ ist, d. h. warum der Bedarf im zweiten Jahre geringer als der im ersten Jahre nach Tab. 4. wird, liegt darin, daß zum Zähler von $\frac{250}{1000}$ nur 89, zum Nenner aber die verhältnißmäßig viel größere Zahl 750 hinzukommt; der Grund aber, warum dennoch $\frac{339}{1750} > \frac{89}{750}$ wird, liegt darin, daß gegenwärtig zum Zähler von $\frac{89}{750}$ schon die Zahl 250, zum Nenner dagegen die verhältnißmäßig kleinere Zahl 1000 hinzukommt. Um sich von der Richtigkeit und den weiteren Folgen dieser Behauptung zu überzeugen, setze man voraus, daß zum Anfange des zweiten Jahres nicht 1000, sondern 0, 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 Neugeborne hinzukommen, welche also resp. 0, 0.250, 2.50, 25.0, 250, 2500, 25000, 250000 Sterbende liefern. Es ergiebt sich hierdurch der Bedarf zu resp:

$$\frac{89}{750} \ldots\ldots\ldots = 0.\ 1187$$
$$\frac{89+0.250}{750+1} \ldots\ldots = 0.\ 1188$$
$$\frac{89+2.50}{750+10} \ldots\ldots = 0.\ 1204$$
$$\frac{89+25.0}{750+100} \ldots\ldots = 0.\ 1341$$
$$\frac{89+250}{750+1000} \ldots\ldots = 0.\ 1880$$
$$\frac{89+2500}{750+10000} \ldots\ldots = 0.\ 2401$$
$$\frac{89+25000}{750+100000} \ldots\ldots = 0.\ 2490$$
$$\frac{89+250000}{750+1000000} \ldots\ldots = 0.\ 2497$$

Man sieht demnach hieraus, daß der Bedarf des zweiten Jahres immer zwischen 0.1187, d. h. dem Aussterbebedarf dieses Jahres und 0.2500, d. h. dem Bedarf des ersten Jahres liegt, je nachdem am Anfange des zweiten Jahres weniger oder mehr Kinder neuhinzugekommen sind. Der Grund davon ist sehr einfach. Kommen verhältnißmäßig wenig Neugeborne hinzu, so ist die Kasse dem Aussterbezustande nahe geblieben; treten dagegen verhältnißmäßig viele neugeborne Kinder hinzu, so hat der Bedarf für die aus dem vorhergehenden Jahre zurückgebliebenen gegen den für die neuen Mitglieder nur geringen Einfluß auf

den Gesammtbedarf, und zwar um so geringern, desto mehr Neugeborne am Anfange des zweiten Jahres hinzugetreten waren.

Beim Uebergange vom zweiten in das dritte Geschäftsjahr findet dasselbe Verhältniß, nur in etwas verringertem Maßstabe statt. Der Bedarf des zweiten Jahres war nämlich $\frac{339}{1750} = 0.1880$, und der des dritten ist $\frac{382}{2411} = 0.1584$, wofür man auch $\frac{339+43}{1750+661}$ setzen kann. Da nun nach Tab. 3. $\frac{43}{661} = 0.0651$, also kleiner als $\frac{339}{1750}$ ist, so muß der Bedarf sich gegen den des zweiten Jahres verringern, dagegen größer als der des dritten beim Aussterben ausfallen u. s. w.

Nimmt der Bedarf von Hause aus zu, wie z. B. schon, wenn man mit zwölfjährigen oder älteren Personen begänne, so wird ein gerade entgegengesetztes Verhalten eintreten. Um dasselbe desto deutlicher hervortreten zu lassen, wählen wir fünfundvierzigjährige Personen, deren Bedarf beim Aussterben im ersten Jahre (Tab. 3) $\frac{7}{339} = 0.0207$, im zweiten dagegen $\frac{8}{332} = 0.0241$ war. Setzt man demnach einen gleichmäßigen Zutritt voraus, so ist der Bedarf im zweiten Jahre $\frac{15}{671} = 0.0224$, also größer als der im ersten Jahre und kleiner als der im zweiten beim Aussterben, und zwar, weil $\frac{15}{671} = \frac{8+7}{332+339}$ u. $\frac{8}{332} > \frac{7}{339}$ ist. Um auch hier die Einwirkungen klarer hervortreten zu lassen, setzen wir voraus, daß am Anfange des zweiten Jahres statt 339 Personen 0, 0. 339, 3. 39, 33. 9, 339, 3390, 33900, 339000 beitreten, welche resp. 0, 0. 007, 0. 07, 0. 7, 7, 70, 700, 7000 Todte liefern, wodurch sich der Bedarf im zweiten Jahre zu

$$\frac{8}{332} \ldots\ldots\ldots\ldots = 0.02410$$
$$\frac{8+0.007}{332+0.339} \ldots\ldots\ldots = 0.02409$$
$$\frac{8+0.07}{332+3.39} \ldots\ldots\ldots = 0.02406$$
$$\frac{8+0.7}{332+33.9} \ldots\ldots\ldots = 0.02378$$
$$\frac{8+7}{332+339} \ldots\ldots\ldots = 0.02235$$
$$\frac{8+70}{332+3390} \ldots\ldots\ldots = 0.02096$$
$$\frac{8+700}{332+33900} \ldots\ldots\ldots = 0.02068$$
$$\frac{8+7000}{332+339000} \ldots\ldots\ldots = 0.02065,$$

herausstellt, woraus man sieht, daß wiederum der Bedarf des zweiten Jahres zwischen dem Aussterbebedarf dieses und dem Bedarf des ersten Jahres liegt, und sich diesem letzteren oder jenem ersteren um so mehr nähert, je nachdem der Zugang ein größerer oder geringerer war, welcher Erscheinung natürlich dieselbe Ursache wie früher zu Grunde liegt.

Dieser Umstand bringt nun gerade den Wendepunkt zwischen dem fünfzigsten und einundfünfzigsten Geschäftsjahre hervor. In jenem Jahre ist der Bedarf $\frac{700}{23754} = 0{,}029470$, in diesem aber etwas mehr, nämlich $\frac{709}{24054} = 0.029475$, und zwar aus dem Grunde, weil der Aussterbebedarf $\frac{9}{300} = 0.03$ etwas größer

als $\frac{700}{23754}$ ist. Aus diesem letzten Umstande erklärt sich nun wiederum die Erscheinung, daß auch gerade von jetzt ab der Bedarf bei erneuertem Zutritte geringer ausfällt, als der Aussterbebedarf.

Daß endlich um diese Zeit, z. B. im vierundfünfzigsten Geschäftsjahr der Bedarf derselbe bleibt, wenigstens so weit er durch vier Decimalen ausgedrückt wird, hat gleichfalls seinen guten Grund. Der Bedarf im erstern Jahre ist nämlich $\frac{736}{24900} = 0.02956$, während der darauf einwirkende Aussterbebedarf des nächsten Jahres $\frac{9}{264} = 0.03409$, also nur wenig von jenem verschieden ist, so daß auch $\frac{745}{25164} = 0.02961$ nur sehr wenig davon abweichen kann. Wäre der Aussterbebedarf dem des vierundfünfzigsten Geschäftsjahres ganz gleich gewesen, so würde auch der Bedarf des fünfundfünfzigsten Jahres um nichts davon verschieden gewesen sein. So ist z. B. ganz genau $\frac{8}{400} = \frac{8+1}{400+50} = \frac{8+2}{400+100} = \frac{8+3}{400+150}$ 2c.

Stellt man die Resultate dieser Untersuchung zusammen, so ergiebt sich daraus folgender Satz, den ich für den wichtigsten beim ganzen Versicherungswesen ansehe, weil er die eigentliche Grundursache zu allen Berechnungen abgiebt:

Ist die Gefahr, gegen welche versichert worden, von der Art, daß sie mit der Dauer der Mitgliedschaft fällt, so wird der auf jedes Mitglied vertheilte Bedarf beim Eintreten neuer Mitglieder zwar auch von Jahr zu Jahr fallen, und zwar um so mehr, je weniger neue Mitglieder hinzugetreten sind und hinzutreten, aber immer größer bleiben, als der Aussterbebedarf desselben Geschäftsjahres, und im Beharrungszustande am kleinsten sein. Ist dagegen die Gefahr, gegen welche versichert worden, der Art, daß sie mit der Dauer der Mitgliedschaft steigt, so wird der Bedarf auch beim Hinzutreten neuer Mitglieder von Jahr zu Jahr steigen, und zwar um so mehr, desto weniger neue Mitglieder hinzugetreten sind und hinzutreten, aber immer kleiner bleiben, als der Aussterbebedarf des gleichen Geschäftsjahres, und im Beharrungszustande am größten sein. Ist drittens die der Versicherung unterliegende Gefahr von der Art, daß sie mit der Dauer der Mitgliedschaft erst steigt und dann fällt, oder erst fällt und dann steigt, so wird der jährliche Bedarf dem ersten Impulse folgen und bei demselben beharren oder in das Entgegengesetzte umschlagen, je nachdem das erste Auftreten dem nachfolgenden überlegen bleibt oder endlich demselben unterliegt. Ist schließlich die Gefahr der Versicherung von der Dauer der Mitgliedschaft unabhängig, so wird auch der jährliche Bedarf zu allen Zeiten derselbe bleiben.

Es sind nun noch die praktischen Folgen des so eben aufgestellten Satzes zu untersuchen.

Ist die Gefahr, gegen welche eine Versicherung geschah, mit der fortschreitenden Dauer der Mitgliedschaft in stetem Abnehmen begriffen, so ist gegen eine Abforderung der Geldmittel nach dem jedesmaligen Bedarf wenig einzuwenden, da die zuerst ausscheidenden Mitglieder im Ganzen mehr eingezahlt haben werden, als es eigentlich nöthig gewesen. Sollte sich demnach für eine derartige Versicherung irgend wo ein wirkliches Bedürfniß herausstellen, so ist auch nicht zu befürchten, daß es einem solchen schon bestehenden Vereine an dem Zutritt neuer Mitglieder fehlen werde, da diese viel lieber einem Vereine beitreten werden, bei welchem sie weniger zu zahlen haben, als unter sich einen neuen bilden, der ihnen von Hause aus höhere Beiträge abzufordern genöthigt wäre. Auch der Fall des Aussterbens in sich selbst hätte nicht allzu viel zu bedeuten, da für die meisten Mitglieder die größte Gefahr, deretwegen versichert worden, schon vorüber ist und in der Wirklichkeit bei Versicherungen dieser Gattung wohl nie der Fall vorkommen kann, daß einige wenige oder wohl gar ein einziges letztes Mitglied den Betrag einer ganzen Versicherung aufzubringen hätte.

Solcher Art Vereine wären z. B. Sterbekassen für Kinder, für deren Beerdigung nur bis zu einem bestimmten Lebensalter zu sorgen wäre, wie solches unter andern bei Waisenhäusern der Fall ist. Nach der Süßmilch'schen Mortalitäts-Tabelle könnte man auf diese Weise beim gleichmäßigen Zutritt neuer Mitglieder eine Sterbekasse anlegen:

Für neugeborne Kinder bis zum vollendeten	49sten Lebensjahre
= 1jährige = = = =	41 = =
= 2jährige = = = =	34 = =
= 3 } = 4 } = = = = =	27 = =
= 5 = = = =	21 = =
= 6 } = 7 } = 8 } = 9 } = = = = =	19 = =
= 10 = = = = =	16 = =

weil bis hierher unter den angeführten Umständen der Bedarf im Abnehmen begriffen ist. Diese Resultate scheinen die frühere Behauptung umzustoßen, nach welcher bereits vom eilften Lebensjahre ab die Sterblichkeit größer wird; indeß bewirkt die große Sterblichkeit der Kinder unmittelbar und bald nach der Geburt noch retardirend ein Fallen der Beiträge, bis sie nach längerer oder kürzerer Zeit dem neuen Einflusse weichen muß.

Ueber solche Versicherungs-Vereine, bei denen der Bedarf von der Dauer der Mitgliedschaft unabhängig ist, läßt sich fast dasselbe sagen, was von den

eben besprochenen Vereinen gesagt worden, nur daß solche Vereine viel eher der Gefahr ausgesetzt sind, den Zutritt neuer Mitglieder zu verlieren, weil die Hülfesuchenden durch keinen Umstand verhindert zu werden pflegen, unter sich einen neuen Verein gleicher Art zu stiften. Außerhalb der Sphäre des menschlichen Lebens gehören hierzu z. B. die Feuerkassen, Hagelversicherungen, Seeassecuranzen, Versicherungen gegen Eisenbahngefahren u. s. w. Hier ist von einer mathematischen Vorausberechnung gar nicht die Rede, vielmehr werden die Erfahrungen einer verhältnißmäßig kurzen Zeit den durchschnittlichen Bedarf in jedem besonderen Falle viel sicherer kennen lehren. Die Abweichungen, welche gegen denselben mitunter vorkommen können und vorkommen werden, lassen sich der Rechnung nicht unterwerfen, sind vielmehr als vereinzelt dastehende glückliche oder unglückliche, dem Ungefähr unterworfene Fälle zu betrachten. Um sich gegen letztere zu schützen, bleibt nichts andres übrig, als jährlich etwas mehr zu fordern, und daraus einen Reservefonds für Zeiten der Noth zu bilden. Jedoch erscheint es auch hier unvortheilhaft, vorsätzlich viel mehr zu fordern, als erforderlich, wie solches einige Feuerversicherungs-Anstalten thun, um am Ende des Jahres eine große Dividende zurückgeben zu können. Personen, welche bei größerer Wohlfeilheit beigetreten wären, bleiben deswegen von dem Vereine entfernt und dieser setzt sich und seine Mitglieder der Gefahr aus, im Falle eingetretenen bedeutenden Verlustes den Schaden auf eine geringere Menge von Theilnehmern vertheilen zu müssen, den er unter anderen Umständen einer größern Anzahl auferlegen konnte.

Auch die Krankenkassen sind zu dieser Art von Versicherungen zu rechnen und ist es noch keineswegs als erwiesen anzusehen, in welcher Lebensperiode solches Kranksein, wegen dessen eine Krankenkasse ihren Mitgliedern Unterstützungen zu gewähren pflegt, am häufigsten oder am seltensten vorkommt. Zwar hat in neuester Zeit der Direktor der Versicherungsgesellschaft Iduna in Halle, Dr. Wiegand, in seiner Broschüre „Statuten-Entwurf und Tarif für Innungs-Krankenkassen" einen Tarif für Zahlung der Krankengelder, nach dem Aufnahmealter steigend, berechnet und solchen den Innungen bei Einrichtung oder Reorganisation von Krankenkassen zur Richtschnur empfohlen. Ich halte jedoch dieses Unternehmen für gänzlich verfehlt und bei Kassen genannter Art unter Umständen für lebensgefährlich. Der Verfasser gründet seine Berechnungen auf die Erfahrungen der Highland Society in Schottland und gesteht selbst, S. 11, daß die Erfahrungen keinen Anspruch darauf machen können, die Gesetze zu repräsentiren, welchen die menschlichen Krankheiten folgen; hat er doch nicht einmal die Berufsthätigkeit der Mitglieder, welcher dieselben der Mehrzahl nach angehörten, ja sogar nicht einmal den Umstand angegeben, ob unter diesen Krankheiten nur innere Leiden oder auch äußerliche körperliche Verletzungen, welchen die Maschinenbauer und Arbeiter mit Maschinen so häufig ausge-

setzt sind, verstanden werden sollen. Aber abgesehen hiervon, setzen wir voraus, die Erfahrungen schlössen sich dem wirklichen Erfolge einer Krankenkasse haarscharf an, so würden sie dennoch in finanzieller Beziehung nur von untergeordneter Bedeutung sein, weil bei den Krankenkassen das eigentliche Kranksein nur den einen Faktor der Ausgaben bildet. Zuerst ist es nicht unwesentlich, unter welchen Krankheits-Bedingungen ein Mitglied die Berechtigung verlieren soll, Mitglied der Krankenkasse zu bleiben; wie viele Wochen hintereinander ein erkranktes Mitglied höchstens auf Krankengeld Anspruch hat, und welche Zeit dazwischen vergehen muß, bevor es von neuem Ansprüche darauf begründen kann. Sodann kommt sehr viel auf die Ansicht an, welche der Arzt von dem Verlaufe einer Krankheit und von dem Verhalten des Kranken in der Zeit der Wiedergenesung hat; selten werden hier auch nur zwei Aerzte übereinstimmen, ja oft wird ein und derselbe Arzt im Verlaufe seiner Praxis die Ansicht ändern, von Milde zur größeren Strenge, oder, was noch häufiger bei Krankenkassen der Fall sein mag, von Strenge zur größeren Milde übergehen. Mir ist eine Krankenkasse bekannt geworden, wo von zwei gleichzeitig fungirenden Aerzten trotz aller Besprechungen bei dem einen immer einige zwanzig Procent mehr Ausgaben auf den Kopf kamen, als bei dem andern. Aber es giebt noch einen Umstand, der ganz außerhalb der Gewalt der Krankenkassen liegt und gleichwohl einen sehr bedeutenden Einfluß auf den Bedarf ausübt. Die Geschäfts-Conjunkturen bringen es mit sich, daß oft ein Gewerbezweig an einem Orte abnimmt, um an einem andern desto kräftiger zu erblühen. Leipzig z. B. beschäftigte in früheren Zeiten gegen tausend Druckgehülfen, gegenwärtig kaum die Hälfte, während in Berlin der entgegengesetzte Fall vorliegt. Bei solchen Gelegenheiten pflegen die gesunden und kräftigen Personen auszuscheiden und die kränklichen zu bleiben und lieber um geringeren Lohn zu arbeiten. Auch die größeren Landwehrübungen und gar eine Mobilmachung pflegen auf den Bedarf der Krankenkassen einen großen Einfluß auszuüben, wie denn bei einer solchen Gelegenheit in Berlin der Fall vorgekommen, daß die Mitgliederzahl einer Krankenkasse fast auf die Hälfte herabsank, während sich die Zahl der Kranken sehr wenig änderte. Hier trat nicht etwa Böswilligkeit hervor; denn es ist natürlich, daß zu militairischen Zwecken gerade die gesundesten und kräftigsten Männer herangezogen, die schwächlichen und kranken dagegen zurückgelassen werden. — Was sollen hier also Tarife, die mit jedem Lebensjahre um einige Procent steigen? was nützt hier eine Berechnung des Reservefonds?

Auch ist die innere Natur solcher Kassen, bei welchen der Bedarf von der Dauer der Mitgliedschaft wenig berührt wird, von Kassen anderer Art wesentlich verschieden. Während nämlich bei Sterbevereinen, Lebensversicherungs-Anstalten, Aussteuer- und Wittwenkassen der Fall, gegen welchen versichert wurde,

nur einmal vorkommen kann, mit dessen Eintreten sich zugleich herausstellt, ob das Mitglied von der Kasse oder diese von dem Mitgliede gewonnen, können bei jenen Kassen die unglücklichen Ereignisse, die den Gegenstand der Versicherung abgeben, möglicherweise gar nicht, aber auch wohl öfter im Laufe der Versicherung eintreten. Hätte demnach auch ein Mitglied z. B. bei einer Krankenkasse einmal etwas zu viel oder zu wenig gezahlt, so wird sich zu einer andern Zeit der entgegengesetzte Fall zur Ausgleichung einstellen. Ueberdies darf das kameradschaftliche Element, das in solchen Vereinen zu walten pflegt, auch nicht ganz unberücksichtigt gelassen werden.

Da ich auf die Krankenkassen, als außerhalb meines Planes liegend, nicht mehr zurückkommen werde, so erlaube ich mir hier aus meiner Erfahrung auf einige Punkte aufmerksam zu machen, die ich nicht immer befolgt gefunden habe, welche aber gleichwohl auf das gute Gedeihen solcher Kassen von Einfluß sind; bin jedoch weit davon entfernt, Normen aufstellen zu wollen oder gar deren Einführung im Wege der Dekrete zu wünschen.

Zunächst bemerke ich im Allgemeinen, daß man zwar bei Entwerfung von Statuten alles das, was zur bloßen Verwaltung gehört, übergehen und in die Statuten nur die wesentlichen finanziellen und rechtlichen Bestimmungen aufnehmen soll, weil jene Verwaltungsmaßregeln, falls sie sich als unzweckmäßig oder unzureichend erweisen sollten, nur mit mehr oder weniger Umständlichkeit wieder aus den Statuten entfernt werden können; daß indessen eine solche Trennung bei kleineren Kassen unthunlich, ja sogar unzweckmäßig ist, weil es hier oft darauf ankommt, die Kassenvorstände mit den Statuten in der Hand auf ihre Pflicht hinzuweisen. Deswegen werde ich auch hier einige Verwaltungs-Maximen nicht übergehen.

Zunächst hat man bei Errichtung einer Krankenkasse darauf zu sehen, daß einerseits der Kreis, für welchen man solche Kassen stiftet, nicht allzu eng sei, damit das Hazard, welches dabei stattfindet, vermindert werde; andererseits aber auch wiederum, daß nicht allzu viele fremdartige Elemente herbeigezogen werden, weil dadurch die Aufsicht darüber, ob der Unterstützungbegehrende wirklich statutenmäßigen Anspruch habe und sich in allen Punkten den festgesetzten Bedingungen unterwerfe, allzu sehr erschwert wird, auch die Kasse in Gefahr kommt, einzelnen Kategorien von Mitgliedern zu Gunsten anderer viel höhere Beiträge abzuverlangen, als ihrem eigenen Bedürfnisse gemäß wäre. Die französische Gesetzgebung hat für solche Kassen, die von Staats wegen besondere Begünstigung beanspruchen, die Grenze im Allgemeinen zwischen 100 und 2000 Mitglieder festgestellt.

Was das Krankengeld betrifft, so soll dasselbe dem durchschnittlichen Verdienst der Mitglieder angepaßt sein und die Hälfte desselben nicht wesentlich überschreiten, jedoch groß genug, daß der Kranke dadurch nöthigenfalls in

einem Krankenhause Aufnahme finde und man im Stande ist, seine Beiträge in Abzug zu bringen, auch wohl dem Mitgliede einige Groschen zur beliebigen eigenen Verwendung überlassen zu können.

Von der Zahlung der Beiträge soll man Niemand, sei es wegen Krankheit, Arbeitslosigkeit oder als Vorstand irgend einer Art befreien, weil dergleichen Festsetzungen nicht allein die Regelmäßigkeit der Einnahme verhindern, sondern, wie ich gefunden, auch Gelegenheit geben, daß Mitglieder, welche zur Zahlung der Beiträge verpflichtet wären, diese zu umgehen wissen.

Soll man für einzelne Krankentage kein Krankengeld gewähren, auch die Zahl der Krankenwochen, für welche die Mitglieder während eines und desselben Jahres auf Krankengeld Anspruch machen können, bestimmt angeben. Im Laufe eines und desselben Jahres zwei oder gar mehrere Maximalperioden festzustellen, giebt nur Veranlassung zu Täuschungen.

Gewährt die Krankenkasse freie Medizin und freien Arzt, so sollen wenigstens diese dem Mitgliede, das sich die Krankheit durch eigenes Verschulden zugezogen, dargereicht werden, denn man hat wohl zu bedenken, daß entgegengesetzten Falls nachträglich noch größere Zahlungen zu leisten sein könnten, auch weniger das Verschulden, als der unglückliche Zufall, der sich damit verband, bestraft würde.

Soll man die gesammten Verwaltungs-Ausgaben so viel wie irgend möglich so einrichten, daß dieselben mit den jedesjährigen Einnahmen in einem bestimmten Verhältniß stehen, nicht aber ganz unabhängig von der Einnahme (wohin auch die Befreiung der Vorstandsmitglieder von der Zahlung der Beiträge gehört), festsetzen.

Sollen die Bücher wenigstens so geführt werden, daß aus einem hervorgehe, wann jedes Mitglied aufgenommen, wann es geboren und wann wiederum ausgeschieden ist, aus einem andern aber, ob und für welche Termine jedes einzelne Mitglied seine Beiträge zur Kasse gezahlt hat. Die Einrichtung, nach welcher den Mitgliedern nur die Zahlung der Beiträge im Statutenbuche quittirt und der ganze Betrag aller im Laufe eines Termins eingegangenen Einnahmen in folle gebucht wird, ist durchaus zu mißbilligen.

Sollen bei den Einnahmen die Krankengelder-Beiträge von den Eintrittsgeldern, anderen Gefällen oder sonstigen Zuwendungen, bei den Ausgaben dagegen die an eigentlichen Krankengeldern von denen für die Verwaltung und sonstige Bedürfnisse streng gesondert, auch bei den Krankengeldern nebenbei bemerkt werden, wie viel darunter einer früheren Periode angehöre und wie viel für die laufende Periode noch nicht abgehoben sei.

Ist mit der Krankenkasse eine Sterbekasse verbunden, so sollen die Mitglieder an dieselbe besondere monatliche oder vierteljährliche Zahlung leisten, oder doch von dem Gesammtbeitrage eines jeden Mitgliedes die erforderliche

Quote für den Sterbegelderfonds abgesetzt, dieser besonders verwaltet und nur zur Auszahlung von Sterbegeldern verwandt, nicht aber mit dem Krankengelderfonds oder dem Reservefonds vermengt werden. —

Steigt die der Versicherung unterworfene Gefahr mit der Dauer der Mitgliedschaft, so zahlen einmal, wie wir gefunden, die ersten Mitglieder weniger, als beim sofortigen Absterben des Vereins und ist die unerläßliche Folge davon, daß auf die letzten Mitglieder noch höhere Verpflichtungen fallen werden. Zum andern aber steigen die Beiträge dennoch von Jahr zu Jahr, so daß, wenn der Betrag derselben eine gewisse Höhe überschritten, etwaige versicherungslustige Personen lieber unter sich einen neuen Verein bilden, als dem bestehenden beitreten werden. Dadurch geräth dieser vor der Zeit in die Aussterbeperiode und manches Mitglied wird der immer höher werdenden Beiträge wegen genöthigt sein, aus dem Vereine, ohne seinen Zweck erreicht zu haben, auszuscheiden, wodurch die Last für die noch zurückgebliebenen Mitglieder größer und größer zu werden pflegt, bis auch diese zuletzt dahin gerathen, die bisher verausgabten Gelder fahren zu lassen und die Hoffnung, sich oder die Ihrigen nach eingetretener Gefahr geschützt zu wissen, für immer aufzugeben, indem in der Regel Mangel an Geldmitteln oder zu vorgerücktes Alter dem Beitritte zu einem besser begründeten Vereine entgegen stehen.

Um zu zeigen, in welchem Grade die Steigerung bei vorausgesetztem gleichmäßigem Eintritt der Mitglieder geht, mag die nachfolgende Tabelle der Beiträge von 5 zu 5 Jahren dienen.

Tabelle 15.

Geschäftsjahre	Wenn die Mitglieder beim Eintritt alt waren, Jahre:							
	0	5	10	20	30	40	50	60
1	0.2500	0.0207	0.0094	0.0102	0.0137	0.0187	0.0300	0.0429
6	0931	0157	0080	0103	0146	0196	0324	0518
11	0639	0122	0082	0113	0161	0223	0356	0602
16	0495	0111	0089	0123	0171	0252	0398	0670
21	0415	0109	0097	0135	0189	0278	0450	0726
26	0366	0112	0105	0146	0210	0311	0496	0761
31	0335	0117	0115	0160	0230	0348	0531	0781
36	0316	0124	0124	0177	0255	0380	0553	.
41	0304	0131	0137	0193	0282	0404	0565	.
46	0297	0141	0150	0213	0306	0419	.	.
51	0295	0153	0164	0234	0324	0427	.	.
56	0297	0165	0180	0252	0335	.	.	.
61	0302	0179	0198	0266	0340	.	.	.
66	0311	0194	0212	0275	.	.	.	.
71	0321	0207	0223	0279	.	.	.	.
76	0330	0217	0231	.	.	.	.	.
81	0337	0223	0234	.	.	.	.	.
86	0341	0226	.	.	.	.	.	.
91	0344	.	.	.	.	.	.	.
im Beharrungszustande	0.0345	0.0228	0.0236	0.0281	0.0344	0.0432	0.0573	0.0796

Vergleicht man in dieser Tabelle für jedes Aufnahmealter den Jahresbeitrag des Beharrungszustandes mit dem niedrigsten, so erhält man

0 Jahr . . . . 0.0345: 0.0295 = 1.16
5 „ . . . . 0.0228: 0.0109 = 2.09
10 „ . . . . 0.0236: 0.0080 = 2.95
20 „ . . . . 0.0281: 0.0102 = 2.57
30 „ . . . . 0.0344: 0.0137 = 2.51
40 „ . . . . 0.0432: 0.0187 = 2.31
50 „ . . . . 0.0573: 0.0300 = 1.91
60 „ . . . . 0.0796: 0.0429 = 1.85,

woraus man sieht, daß wirklich die Steigerung groß genug wird, um noch nicht betheiligte Personen vom Zutritt zu einem solchen Vereine abzuhalten.

Um indessen das Sachverhältniß nach allen Richtungen hin würdigen zu

können, sind noch die Beiträge der vorvorhergehenden Tabelle mit denen der Tab. 3, in welcher die Beiträge verzeichnet stehen, die sich für jedes Lebensalter beim sofortigen Aussterben ergaben, zu vergleichen. Nimmt man z. B. das Aufnahmealter von 30 Jahren, so sind im sechszehnten Geschäftsjahre die ältesten Mitglieder fünfundvierzig Jahr, welche im Laufe des Jahres den Aussterbebeitrag 0.0207 zu zahlen hätten, während unter der gegenwärtigen Bedingung nur 0.0171 gezahlt wird, aso nur der $\frac{0.0171}{0.0207}$ d. h. der 0.82ste Theil. Auf diese Weise ergeben sich die Verhältnisse

Tabelle 16.

Im Geschäftsjahre	Wenn die Mitglieder beim Eintritte alt waren, Jahre:							
	0	5	10	20	30	40	50	60
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
6	4.53	1.67	1.03	0.96	0.85	0.97	0.92	0.94
11	6.69	1.56	0.80	0.83	0.86	0.74	0.83	0.75
16	6.35	1.09	0.83	0.72	0.82	0.72	0.64	0.66
21	4.07	1.02	0.71	0.72	0.63	0.65	0.56	0.54
26	3.43	0.82	0.62	0.71	0.60	0.50	0.49	0.43
31	2.45	0.68	0.61	0.53	0.53	0.43	0.38	0.47
36	1.85	0.66	0.60	0.50	0.41	0.37	0.31	0.08
41	1.63	0.63	0.46	0.45	0.35	0.30	0.34	.
46	1.44	0.47	0.43	0.34	0.30	0.24	0.06	.
51	0.98	0.43	0.38	0.29	0.24	0.26	.	.
56	0.84	0.38	0.29	0.25	0.19	0.04	.	.
61	0.70	0.29	0.25	0.20	0.20	.	.	.
66	0.50	0.24	0.21	0.16	0.03	.	.	.
71	0.40	0.20	0.16	0.17	.	.	.	.
76	0.33	0.16	0.13	0.03	.	.	.	.
81	0.25	0.13	0.14	.	.	.	.	.
86	0.19	0.14	0.02	.	.	.	.	.
91	0.26	0.02	.	.	.	.	.	.
96	0.03	.	.	.	.	.	.	.

aus denen man sieht, daß schon vom fünften Lebensjahre aufwärts die Mitglieder beim gleichmäßigen jährlichen Eintritt immer weniger und weniger, ja sogar, trotz der Steigerung, bedeutend weniger zu zahlen haben, als beim sofortigen Aussterben. Da nun in diesem Falle die Mitglieder nur den wirklichen Bedarf zu decken hatten und das letzte überdieß leer ausging, so ergiebt sich da-

raus, daß von sämmtlichen Mitgliedern bis zum Beharrungszustande viel zu wenig eingezahlt worden, und fragt man, wer den Ausfall zu decken haben werde? so ist die Antwort hierauf, daß es offenbar diejenigen Mitglieder sein werden, die den Beharrungszustand erlebt haben.

Es läßt sich in der Wirklichkeit nicht erwarten, daß der Zutritt zu einem Versicherungsverein, er sei noch so unverständig eingerichtet, sofort aufhören werde, immer werden noch ab und zu einzelne Personen beitreten und ist es in jedem gegebenen Falle möglich, den Personalbestand, wie er nach der Mortalitäts-Tabelle sich herausstellen sollte, zu ermitteln. Ist das Aufnahmealter der Mitglieder z. B. das fünfzigste Lebensjahr und sind jährlich 300 Personen beigetreten, so sind am Anfange des eilften Geschäftsjahres, ungerechnet die neuen Mitglieder, (vergl. Tab. 1 Col. c) noch 4934 — 2429, d. i. 2505 aus den vergangenen zehn Jahren vorhanden, so daß, wenn wiederum 300 Mitglieder beitreten, 2805, wenn aber weniger, natürlich um eben so viel weniger Mitglieder beim Vereine sein werden; und so für jeden andern Fall. Da sich indeß für solche willkührliche Combinationen keine allgemeine Regeln aufstellen lassen, so bleiben wir bei dem gleichmäßigen Beitritt stehen und werden zuerst den Fall betrachten, in welchem der Zutritt gerade mit Erreichung des Beharrungszustandes, dann aber die Fälle, wo der Zutritt vor oder nach diesem Zeitpunkte plötzlich aufhört; jede andere Annahme würde alsdann zwischen diesen Fällen und dem des fernern unveränderten Beitritts spielen.

Bleiben wir beim fünfzigjährigen Aufnahmealter stehen, so tritt der Beharrungszustand mit der Altersergänzung, d. h. nach vollen 96 — 50 = 46 Jahren ein; waren demnach jährlich 300 neue Mitglieder beigetreten, so beträgt die Gesammtzahl 300 × 46, und da noch 5234 übrig geblieben, so ist das Verhältniß dieser übriggebliebenen zur Gesammtzahl der aufgenommenen $\frac{5234}{300 \times 46}$, wofür man auch $\frac{5234}{300}$: 46 schreiben kann. Da nun aber $\frac{5234}{300}$ nichts anderes als die mittlere Lebensdauer fünfzigjähriger Personen ist, und da alles, was von diesem Alter gesagt worden, von jedem andern gleichfalls gültig ist, so erhält man den Satz: *Um das Verhältniß der zurückgebliebenen und der überhaupt beigetretenen Mitglieder zur Zeit des Beharrungszustandes zu erhalten, hat man die mittlere Lebensdauer des Aufnahmealters durch die Altersergänzung zu dividiren.*

Nach dieser Regel ist die

Tabelle 17.

Lebensalter.	Verhältniß der Zurückgebliebenen zu den Eingetretenen.	Lebensalter.	Verhältniß der Zurückgebliebenen zu den Eingetretenen.	Lebensalter.	Verhältniß der Zurückgebliebenen zu den Eingetretenen.	Lebensalter.	Verhältniß der Zurückgebliebenen zu den Eingetretenen.
0	0.302	15	0.482	30	0.440	45	0.396
1	0.393	16	0.480	31	0.438	46	0.393
2	0.431	17	0.477	32	0.435	47	0.390
3	0.462	18	0.474	33	0.433	48	0.386
4	0.476	19	0.471	34	0.430	49	0.383
5	0.481	20	0.468	35	0.427	50	0.380
6	0.486	21	0.465	36	0.424	51	0.377
7	0.489	22	0.463	37	0.421	52	0.374
8	0.492	23	0.460	38	0.419	53	0.371
9	0.493	24	0.457	39	0.416	54	0.369
10	0.494	25	0.455	40	0.413	55	0.366
11	0.492	26	0.452	41	0.410	56	0.363
12	0.490	27	0.449	42	0.407	57	0.360
13	0.487	28	0.446	43	0.404	58	0.356
14	0.485	29	0.443	44	0.400	59	0.353

berechnet und sieht man daraus, daß das in Rede stehende Verhältniß von der Geburt bis zum zehnten Lebensjahre, wo es fast $\frac{1}{2}$ ist, zu-, von da an aber fortwährend abnimmt und kann danach zugleich beurtheilen, wie viele Personen verhältnißmäßig den oben nachgewiesenen Ausfall zu decken haben werden.

Beginnt das plötzliche Aussterben nach dem Eintritte des Beharrungszustandes, so ist die Anzahl der vorhandenen Mitglieder noch immer die nämliche, die der eingetretenen Mitglieder hat sich indessen so viele mal um die Zahl der jährlich beigetretenen vermehrt, als nach dem Beharrungszustande Jahre verflossen sind. Die vorhergehende Regel läßt sich demnach dahin erweitern: Man findet das Verhältniß der vorhandenen zu den überhaupt beigetretenen Mitgliedern zu jeder Zeit des Beharrungszustandes, wenn man die mittlere Lebensdauer der Mitglieder zur Zeit des Eintretens durch die Zahl der überhaupt verflossenen Geschäftsjahre dividirt, woraus hervorgeht, daß dieses Verhältniß von Jahr zu Jahr kleiner wird.

Will man endlich das fragliche Verhältniß vor dem Eintreten des Beharrungszustandes berechnen, so hat man sich darüber zu verständigen, ob die

so eben beigetretenen Mitglieder eingerechnet werden sollen oder nicht. Wählt man das Letztere, so leben z. B. von 300 jährlich eingetretenen funfzigjährigen Mitgliedern im eilften Geschäftsjahre noch 5234 — 2429, also ist das fragliche Verhältniß $\frac{5234 - 2429}{11 \times 300}$.

Man findet daher das Verhältniß der übrig gebliebenen zu den überhaupt beigetretenen Mitgliedern, wenn man von der Mitgliederzahl des Beharrungszustandes des Aufnahmealters die nämliche Zahl des gegenwärtigen Alters der ersten Vereinsmitglieder subtrahirt und durch die Anzahl der überhaupt beigetretenen Mitglieder dividirt. Zunächst ist darauf aufmerksam zu machen, daß der Minuendus des Zählers, oder im Beispiele die Zahl 5234, für jedes Geschäftsjahr unverändert bleibt, der Subtrahendus 2429 dagegen für jedes Jahr um weniger, der Nenner des Bruches aber um volle 300 größer wird, so daß der Werth des Bruches sich mit jedem Geschäftsjahre verringert. Sodann läßt sich jener Bruch auch $\left\{\frac{5234}{300} - \frac{201}{300} \times \frac{2429}{201}\right\}$: 11 schreiben, wo $\frac{5234}{300}$ die mittlere Lebensdauer der funfzigjährigen, $\frac{2429}{201}$ die der einundsechszigjährigen Personen und $\frac{201}{300}$ das Verhältniß der Lebenden der beiden genannten Alter oder die *Wahrscheinlichkeit* der funfzigjährigen Personen für das einundsechszigste Lebensjahr ist, woraus folgt: *Man findet das Verhältniß der noch übrig gebliebenen Mitglieder zu der Gesammtzahl der aufgenommenen zu irgend einer Zeit vor dem Beharrungszustande, wenn man die mittlere Lebensdauer der ältesten Mitglieder mit ihrer Lebenswahrscheinlichkeit zur angegebenen Zeit multiplicirt, das Produkt von der mittleren Lebensdauer der aufgenommenen Mitglieder subtrahirt und die Differenz durch die Zahl der verflossenen Geschäftsjahre dividirt*, und wird dieses Verhältniß um so kleiner ausfallen, desto länger der Verein bereits bestanden hat.

Untersuchen wir nun den jährlichen Bedarf während der Periode des Aussterbens und beginnen mit irgend einem Jahre nach dem Beharrungszustande. Treten vom Anfange irgend eines Jahres die früher vorausgesetzten 300 funfzigjährigen Mitglieder nicht ferner ein, so hat man auch die auf sie fallenden Todten nicht mehr und das Jahr beginnt mit 4934 Mitgliedern und zählt 291 Todesfälle; auf das nächste Jahr kommen 4643 Mitglieder mit 282 Todesfällen, auf das dritte Jahr 4361 Mitglieder mit 273 Todesfällen, u. s. w. Zählen wir daher von der letzten Aufnahme an, so ist der Bedarf $\frac{300}{5234}$, $\frac{291}{4934}$, $\frac{282}{4643}$, $\frac{273}{4361}$ u. s. w.; und da nun $\frac{5234}{300}$, $\frac{4934}{291}$, $\frac{4643}{282}$, $\frac{4361}{273}$ u. s. w., die mittleren Lebensdauern resp. der funfzig-einundfunfzig-zweiundfunfzig-dreiundfunfzigjährigen Personen u. s. w. sind, so erhält man den Satz: *Stirbt der Verein nach eingetretenem Beharrungszustande aus, so nimmt der jährliche Bedarf nach demselben Verhältniß zu, nach welchem die mittlere Lebensdauer seiner jüngsten Mitglieder abnimmt.*

Hiernach ergeben sich für die einzelnen Lebensalter die nachstehenden hohen Beiträge, welche von den Mitgliedern bis zu ihrem Tode noch zu zahlen sind, trotz dem, daß viele von ihnen schon bedeutende Beträge zur Kasse gezahlt haben werden.

Tabelle 18.

Lebensalter.	Beiträge.	Lebensalter.	Beiträge.	Lebensalter.	Beiträge.	Lebensalter.	Beiträge.	Lebensalter.	Beiträge.	Lebensalter.	Beiträge.
0	0.0345	16	0.0261	32	0.0359	48	0.0542	64	0.0928	80	0.1660
1	0.0268	17	0.0226	33	0.0367	49	0.0556	65	0.0963	81	0.1720
2	0.0243	18	0.0271	34	0.0376	50	0.0573	66	0.1000	82	0.1812
3	0.0234	19	0.0276	35	0.0385	51	0.0590	67	0.1038	83	0.1905
4	0.0228	20	0.0281	36	0.0394	52	0.0607	68	0.1077	84	0.1971
5	0.0228	21	0.0287	37	0.0403	53	0.0626	69	0.1115	85	0.2073
6	0.0229	22	0.0292	38	0.0412	54	0.0646	70	0.1152	86	0.2154
7	0.0230	23	0.0298	39	0.0422	55	0.0667	71	0.1198	87	0.2355
8	0.0231	24	0.0304	40	0.0432	56	0.0689	72	0.1242	88	0.2564
9	0.0233	25	0.0310	41	0.0443	57	0.0713	73	0.1282	89	0.2759
10	0.0236	26	0.0316	42	0.0455	58	0.0739	74	0.1332	90	0.2857
11	0.0239	27	0.0323	43	0.0468	59	0.0766	75	0.1377	91	0.3333
12	0.0243	28	0.0330	44	0.0482	60	0.0796	76	0.1435	92	0.4000
13	0.0247	29	0.0337	45	0.0495	61	0.0828	77	0.1487	93	0.5000
14	0.0251	30	0.0344	46	0.0509	62	0.0861	78	0.1556	94	0.6667
15	0.0256	31	0.0351	47	0.0524	63	0.0894	79	0.1617	95	1.0000

Tritt das Aussterben eines Vereins schon vor Erreichung des Beharrungszustandes ein, so nehmen, wie vorher gezeigt, um so weniger Mitglieder daran theil, desto früher der Fall eingetreten; indeß erhöhen sich die Beiträge so lange, bis sie nach so vielen Jahren, als der Verein bereits bestanden, den Aussterbebeitrag der ältesten Mitglieder erreichen, um sich von da an den ferneren Aussterbebeiträgen dieser Mitglieder anzuschließen, wie solches aus der Tab. 19 zu ersehen, bei der vorausgesetzt worden, daß, nachdem eilf Jahre hindurch jedesmal 300 funfzigjährige Mitglieder eingetreten, das Aussterben beginne.

Tabelle 19.

Jahr des Aussterbens.	Zurückgebliebene Mitglieder. a	Ausscheidende Mitglieder. b	Jährlicher Bedarf. c
1	2805	99	0.353
2	2491	90	361
3	2204	81	368
4	1922	72	375
5	1649	63	382
6	1385	54	390
7	1130	45	398
8	884	36	407
9	647	27	417
10	419	18	430
11	210	9	430

Die Sterbekassen, welche bis jetzt besonders genannt worden, sind in ihrer Tendenz von den Lebensversicherungs-Anstalten nicht verschieden, denn beide verpflichten sich, nach dem Tode einer versicherten Person eine bestimmte Summe herauszuzahlen, für welche sie sich bei Lebzeiten derselben schadlos zu halten suchen; der einzige Unterschied, der zwischen beiderlei Versicherungs-Kassen zu bestehen pflegt, ist der, daß Lebensversicherungs-Anstalten sich auf kleinere Beträge, in der Regel unter 100, nicht einlassen, während Sterbekassen fast immer nur mit verhältnißmäßig geringen Summen — selten bis 100, noch seltener darüber hinaus, — zu thun haben. Will überhaupt Jemand einen namhaften Betrag auf sein Leben versichern und liegt ihm eine zweckmäßig eingerichtete Lebensversicherungs-Anstalt nicht allzu unbequem, so wird er im Allgemeinen wohlfeiler davon kommen und größere Sicherheit haben, wenn er dieser Anstalt, als wenn er einer Sterbekasse mit hohem Sterbegelde beitritt, weil Kassen letzterer Art fast immer mehr auf Verwaltungskosten zu verwenden und einen geringeren Zinsgewinn zu haben pflegen, als jene.

Aber auch Heiraths- und andere Aussteuerkassen, wenn ihnen nicht das Spaarkassen-Princip zu Grunde liegt, sondern sie nach Art der Berliner Aussteuer-Sterbe- und Unterstützungs-Kasse eingerichtet sind, beruhen auf derselben Basis mit den Sterbekassen und Lebensversicherungs-Anstalten, weil es im Wesentlichen ganz gleichgültig ist, ob der versicherte Betrag wegen Todesfalls oder aus irgend welchen anderen Ursachen fällig wird. Nur wird bei diesen Kassen der jeweilige Bedarf noch bedeutend mehr steigen, weil, so zu sagen,

zu den natürlichen Todesfällen noch künstliche, die Aussteuerfälle, hinzukommen und nach Verlauf einer verhältnißmäßig kurzen Reihe von Jahren jedes noch nicht verstorbene oder ausgesteuerte Mitglied empfangsberechtigt wird.

Die namhaft gemachte Kasse war (nach ihrer ersten Einrichtung gänzlich, und nach der Revision der Statuten nur (§ 70) ein Unbedeutendes weniger) auf Herbeischaffung des jedesjährigen Bedarfs angewiesen; sie zahlte, wenn Tod oder Heirath in den beiden ersten Jahren der Mitgliedschaft eintrat, gar nichts, in den drei folgenden Jahren die Hälfte und nach vollendetem fünften Jahre die volle versicherte Summe, so wie den gleichen Betrag nach funfzehnjähriger Theilnahme bei der Anstalt, auch wenn sich das Mitglied noch nicht verheirathete. Da es nun vom dritten bis zum fünften Jahre der Mitgliedschaft nur zum Vortheil der Kasse gerechnet ist, wenn man eine gewisse Anzahl Mitglieder mit der vollen, statt eine doppelte Anzahl mit der halben versicherten Summe ausscheiden läßt, so wähle ich der größeren Einfachheit wegen das Erstere. In der nachfolgenden

Tabelle 20.

Geschäftsjahr.	Ursprüngliche resp. zurückgebliebene Mitglieder.	Procentsatz für die Ausscheidenden.	Ausscheidende.	Bedarf für das laufende Jahr.	Bedarf für die Dauer des Geschäfts.	Anzahl der Mitglieder (beim gleichmäßigen Zutritt.)	Anzahl der Ausscheidenden (beim gleichmäßigen Zutritt.)	Jährlicher Bedarf.
	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1000	1	10	0.000	0.000	1000	fallen wegen der Probezeit aus.	.
2	990	1	10	000	000	1990		.
3	980	5	49	050	050	2970	49	0.016
4	931	6	56	060	110	3901	105	027
5	875	7	61	070	180	4776	166	035
6	814	10	81	100	280	5590	247	044
7	733	11	81	111	391	6323	328	052
8	652	12	78	119	510	6975	406	058
9	574	13	74	129	639	7549	480	064
10	500	14	70	140	779	8049	550	068
11	430	15	65	154	933	8479	615	072
12	365	14	51	142	1.075	8844	666	075
13	314	13	40	127	1.202	9158	706	077
14	274	12	33	120	1.322	9432	739	078
15	241	11	27	112	1.434	9673	766	079
16	.	.	214	.	.	.	980	101

ist demnach Col. a von 1000 ursprünglichen Mitgliedern ausgegangen, in Col. b der Procentsatz der abgehenden in Bezug auf die noch vorhandenen Mitglieder angegeben und sind diese letzteren hinwiederum in Col. a notirt. Sollen also im siebenten Geschäftsjahre 11 Procent ausscheiden, so bedeutet dieses $733 \times \frac{11}{100} = \frac{8063}{100}$, d. h. in ganzen Zahlen ausgedrückt 81 (Col. c), so daß noch $733 - 81 = 652$ zurückbleiben, wie sie Col. a für den Anfang des achten Jahres notirt sind. Die Quotienten der Zahlen Col. c durch die der Col. a geben den jedesjährigen Bedarf, Col. d, oder vielmehr in diesem Falle Werthe, die noch beträchtlich hinter dem jährlichen Bedarf zurückbleiben. So ist z. B. für das achte Jahr der Bedarf zu $\frac{78}{652} = 0.119$ veranschlagt, während derselbe richtiger $\frac{78}{652 - \frac{1}{2} \times 78} = 0.127$ wäre. Col. e enthält endlich die Gesammtbeiträge, welche von den in jedem Jahre abgehenden Mitgliedern gezahlt sind. Obschon nun diese Beiträge so hoch sind, daß schon vom zwölften Jahre ab die abgegangenen Mitglieder mehr als die volle versicherte Summe eingezahlt haben, bleiben nach Col. c für den Anfang des sechzehnten Jahres dennoch 214 Empfangsberechtigte übrig, welche zwar 1.434 eingezahlt haben, indeß dafür nichts zurückempfangen können.

Läßt man der Aussteuer-Kasse statt des sofortigen Aussterbens jährlich 1000 neue Mitglieder zugehen, so zeigen Col. f und Col. g die Anzahl der am Anfange eines jeden Geschäftsjahres vorhandenen und die im Laufe desselben ausscheidenden Mitglieder, Col. h aber den Bedarf bis zum Eintritt des Beharrungszustandes an. Der Bedarf fällt hier allerdings viel geringer aus, während das Geschäft im Ganzen nicht günstiger verläuft, als vorher; denn Col. f zeigt, daß 9673 Mitglieder (von bis jetzt 15000 beigetretenen) die Aussterbeperiode durchzumachen haben werden.

Um die Zahlungsverpflichtungen für diese Periode zu ermitteln, subtrahirt man von dem Bestande der Mitglieder, in unserm Falle von 9673, nach und nach (vergl. Col. a und Col. b der vorhergehenden Tabelle) 1000, 990, 980, 931 u. s. w., von der Zahl der Abgehenden des sechzehnten Geschäftsjahres 980 aber, für die beiden ersten Jahre 0, 0, (nicht 10, 10, weil diese Mitglieder keine Ansprüche haben und auch Col. g in Tab. 20 nicht gerechnet worden sind), sodann nach und nach 49, 56 u. s. w., wodurch sich die Colonnen a und b der

Tabelle 21.

Aussterbeperiode. Jahr:	Anzahl der vorhandenen Mitglieder.	Anzahl der ausscheidenden Mitglieder.	Jährlicher Bedarf.	Die abgehenden Mitglieder haben überhaupt gezahlt:	Aussterbeperiode. Jahr:	Anzahl der vorhandenen Mitglieder.	Anzahl der ausscheidenden Mitglieder.	Jährlicher Bedarf.	Die abgehenden Mitglieder haben überhaupt gezahlt:
	a	b	c	d		a	b	c	d
1	8673	980	0.113	0.113	8	2698	574	0.213	1.285
2	7683	980	127	240	9	2124	500	235	1.520
3	6703	931	139	379	10	1624	430	265	1.785
4	5772	875	152	531	11	1194	365	306	2.091
5	4897	814	166	697	12	829	314	379	2.470
6	4083	733	180	877	13	515	274	532	3.002
7	3350	652	195	1.072	14	241	241	1.000	4.002
					15	.	214		

ergeben, während die Col. c, als Quotienten der Zahlen in den beiden ersten Colonnen, den jährlichen Bedarf liefern. Trotz der enormen Höhe desselben sieht man, daß dennoch wiederum 214 Mitglieder, welche allen ihren Verpflichtungen Genüge geleistet und sogar gerade das Vierfache der versicherten Summe eingezahlt haben, l e e r a u s g e h e n.

Man könnte glauben, daß am Ausgange dieses Geschäfts der in Col. b Tab. 20 angewandte, allerdings ganz willkührlich gewählte Procentsatz der abgehenden Mitglieder Schuld sei; allein es ist sehr leicht, die Grenzen aufzufinden, innerhalb welcher das ganze Geschäft sich bewegt und zwischen denen Jeder nach Belieben sich denjenigen Fall auswählen mag, der ihm am besten zusagt. Die untere Grenze ist die, wo während der ganzen funfzehnjährigen Mitgliedschaft kein einziger Aussteuer- oder Sterbefall vorkommt, so daß vom Anfange des sechzehnten Geschäftsjahres ab jedesmal der älteste Jahrgang ausscheidet, der von den funfzehn darauf folgenden mit $6\frac{2}{3}$ Procent der Aussteuersumme auf jedes zurückgebliebene Mitglied befriedigt wird. In diesem Falle hätten die Mitglieder des ersten Jahrganges gar nichts eingezahlt, also im Ganzen 1000 gewonnen, die Mitglieder des zweiten Jahrganges hätten $6\frac{2}{3}$ Procent eingezahlt und $933\frac{1}{3}$ gewonnen, die des dritten Jahrganges $13\frac{1}{3}$ Procent eingezahlt und $866\frac{2}{3}$ gewonnen u. s. w., endlich die Mitglieder des funfzehnten Jahrganges $93\frac{1}{3}$ Procent eingezahlt und noch $66\frac{2}{3}$ gewonnen. Im Laufe des Beharrungszustandes dagegen würden die Mitglieder funfzehnmal $6\frac{2}{3}$ Procent eingezahlt und demnach i n b a a r e m G e l d e weder gewonnen, noch verloren haben, während 15000 Mitglieder die Aussterbeperiode durchzumachen hätten. — Die obere

Grenze aber ist wiederum die, wo während der Dauer der Mitgliedschaft keine einzelne Sterbefälle vorkämen, die Mitglieder es aber vorzögen, am Anfange des dritten Jahres mit der halben versicherten Summe auszuscheiden. In diesem Falle würde immer ein Jahrgang von zweien darauf folgenden auszusteuern sein, so daß auf jedes dieser Mitglieder 25 Procent kämen. Der erste Jahrgang hätte 500, der zweite 250 gewonnen, die Mitglieder während des Beharrungszustandes würden, nach baarem Gelde gerechnet, weder gewonnen noch verloren haben und 2000 Mitglieder würden zum Aussterben kommen. — Diese Grenzen gelten aber, wie aus der früheren Voruntersuchung hervorgeht, nur für den regelmäßigen Abgang. Nun nehme man aber die Wirklichkeit! Danach werden die meisten Mitglieder, theils durch den Reiz, das versicherte Kapital zu besitzen, verlockt, theils durch die immer größer werdenden Jahresbeiträge gezwungen, alles daran setzen, ihr Ausscheiden aus der Kasse so schnell wie möglich zu bewirken, während ein anderer Theil, sei es durch zu junges Alter oder aus irgend welchen andern Ursachen, sich absolut außer Stande befindet, jenem Zuge zu folgen. Welche Zahlungsverpflichtungen würden auf diese Mitglieder gefallen sein? Nicht äußere Hindernisse, sondern die eigene Organisation hat die Aussteuerkassen, die nach der Herbeischaffung der Zahlungsmittel nach dem jeweiligen Bedarf eingerichtet waren, zum Bankrutt gebracht und wird es auch allen Sterbekassen, die in gleicher Art eingerichtet sind, wiewohl nach jahrelangem Kampfe um die eigene Existenz, eben so ergehen.

Die Ausführung zur Erreichung des Zwecks der Aussteuerkassen in Rede stehender Einrichtung war der Art, daß kaum zu begreifen, wie dieselben überhaupt in's Leben treten konnten. Es hat einen ganz guten Sinn, wenn gegen möglicherweise eintretende Gefahr Versicherung, selbst mit Aufopferung, genommen, und, in Erwartung schließlichen Gewinnes, gegeben wird. Das Heirathen aber gehört in den bei weitem überwiegenden Fällen zu den glücklichen Ereignissen, von denen vielleicht Niemand aus ganz freier Entschließung absteht; wie kann man dazu Versicherungen geben auf gemeinschaftliche Unkosten? Ließe sich ein Mittel ausfindig machen, die ausgesteuerten Personen mit aller Sicherheit zur successiven Zurückzahlung alles zu viel Empfangenen anzuhalten, so würde der Gewinn und Verlust nicht allzugroß sein, indem es sich immer nur um den früheren oder späteren Besitz des versicherten Kapitals handelte. Allein eine solche Einrichtung dürfte kaum möglich sein!

Wir haben jetzt den Fall zu betrachten, wo ein Versicherungsverein immer aus einer und derselben Zahl von Personen besteht, wie es z. B. bei Synodal-Prediger- und Schullehrer-Sterbekassen und überhaupt bei allen denjenigen Kassen der Fall ist, bei welchen für jedes abgegangene Mitglied sofort ein neues eintritt. Wäre das Alter des neu eintretenden Mitgliedes dem des verstorbenen gleich, so würde sich theoretisch das Sterblichkeitsverhältniß gar nicht geändert

haben und obwohl sich die Sterbefälle gegen die des Aussterbens erhöhen, dennoch der jährliche Bedarf vom Aussterbebedarf nicht verschieden sein, weil die Erhöhung der Sterbefälle in demselben Verhältniß mit der Mitgliederzahl steht. Hätte man es z. B. mit 300 funfzigjährigen Personen zu thun, von denen längere Zeit hindurch jährlich 9 stürben, und träten am Anfange des zweiten Jahres für die 9 verstorbenen 9 einundfunfzigjährige Personen ein, so würden im Laufe des zweiten Jahres, da von 291 solcher Personen 9 mit Tode abgehen, $\frac{9 \times 300}{291}$ sterben, so daß der durchschnittliche Bedarf wiederum $\frac{9}{291}$ wäre.

In diesem Sinne ist indeß die Aufgabe nicht gemeint; man hat vielmehr der Natur der Sache nach vorauszusetzen, daß die neuen Mitglieder im Allgemeinen das Alter der ursprünglich beigetretenen haben werden und bleibt zu ermitteln, wie viele Personen von der Gesellschaft im Laufe eines jeden Geschäftsjahres sterben werden. Analytisch ist die Aufgabe noch nicht gelöst und scheint auch eigenthümliche Schwierigkeiten zu haben, während sie auf empirischem Wege zwar ohne besondere Schwierigkeit, indeß mit großer Weitläuftigkeit für jeden besondern Fall beantwortet werden kann. Bevor dazu übergegangen wird, sollen die Grenzen angegeben werden, zwischen denen die jährliche Zahl der Todten liegt. Treten nämlich zu jenen 291 zurückgebliebenen einundfunfzigjährigen Personen 9 funfzigjährige, so sterben von jenen im Laufe des zweiten Jahres 9, von diesen aber nur $\frac{9 \times 9}{300} = 0.270$, zusammen also 9.270; wären dagegen die 9 hinzugetretenen Personen einundfunfzig Jahr alt gewesen, so würden, wie oben gezeigt, $\frac{9 \times 300}{291} = 9.278$, also mehr als vorher gestorben sein. Setzt man ferner voraus, daß statt nur 9, wiederum 300 funfzigjährige Personen beigetreten wären, so würden von 591 Personen 18, also von 300 durchschnittlich 9.136, das sind weniger als 9.270 sterben. Das Sachverhältniß ist leicht erklärt, dadurch, daß einmal 291 Einundfunfzigjährige gegen 291 Einundfunfzigjährige eine gleiche, und 9 Funfzigjährige gegen 9 Einundfunfzigjährige eine etwas geringere Sterblichkeit haben, und zum andern, in einer Gesellschaft von 291 einundfunfzigjährigen und 9 funfzigjährigen Personen das Verhältniß der älteren zu den jüngeren größer ist, als in einer Gesellschaft von 300 Personen, in welcher sich 148 ältere und 152 jüngere Mitglieder befinden, also das gegenseitige Verhältniß wiederum 291 zu 300 ist.

Ganz dieselben Schlüsse, nur in gerade entgegengesetztem Sinne, lassen sich ziehen, wenn man es mit so jungen Kindern zu thun hat, daß bei ihnen die Sterblichkeit mit den Jahren noch abnimmt, so daß man sagen kann: In einer Gesellschaft, die fortwährend aus einer und derselben Anzahl von Mitgliedern zusammengesetzt bleibt, dadurch, daß für jedes verstorbene ein anderes Mitglied desselben Aufnahmealters eintritt, liegt die Anzahl der Sterbefälle eines jeden beliebigen Geschäftsjahres zwischen den Zahlen der Todten, die in einer

Lebensalter der ursprünglichen Mitglieder.	1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
50	30000										
51	29100										
52	28200										
53	27300										
54	26400										
55	25500										
56	24600										
57	23700										
58	22800										
59	21900										
60	21000										
61	20100										
62	19200										
63	18200										
64	17200										
65	16200										
66	15200										
67	14200										
68	13200										
69	12200										
70	11200	1727									
71	10300	1676	1684								
72	9400	1625	1634	1733							
73	8500	1573	1584	1681	1787						
74	7700	1521	1534	1629	1734	1741					
75	6900	1469	1484	1577	1681	1689	1790				
76	6200	1417	1434	1525	1628	1637	1737	1742			
77	5500	1365	1384	1473	1575	1585	1684	1690	1788		
78	4900	1313	1333	1421	1522	1533	1631	1638	1735	1737	
79	4300	1261	1282	1369	1468	1481	1578	1586	1682	1687	1779

gleich großen Gesellschaft vom ältesten Mitgliedsalter einerseits, und andrerseits in einer eben solchen Gesellschaft Personen, zusammengesetzt aus allen in der erstern Gesellschaft vorkommenden Altern, nach den Zahlen der Lebenden einer Mortalitäts-Tabelle, stattfinden würden.

Hieraus läßt sich das Schicksal eines solchen Vereins sehr leicht erklären, falls die Beiträge nach dem jedesmaligen Bedarf einkassirt werden. Die Mitglieder zahlen nämlich einerseits zwar weniger, als sie in der Aussterbeperiode zu zahlen hätten, andererseits aber mehr als bei gleichmäßigem Zutritte und sind also noch eher der Gefahr des Aussterbens ausgesetzt, als die letztere Gesellschaft.

Dieses theoretische Resultat genügt jedoch nicht, um die endlichen Consequenzen aller in der Praxis vorkommenden Einrichtungen nachzuweisen. Hierzu ist vielmehr der Verlauf einer solchen Gesellschaft von einem Jahre zum andern empirisch nachzuweisen, wie solches in der nachfolgenden Tabelle 22 geschehen.

Die mit Geschäftsjahr 1 überschriebene Colonne enthält die Tabellenzahlen der Lebenden von funfzig Jahren aufwärts, jedoch verhundertfacht, damit nicht weiter nöthig ist, Decimalstellen in Anwendung zu bringen. Da nun am Anfange des zweiten Geschäftsjahres von 30000 Personen nur noch 29100 einundfunfzigjährige vorhanden sind, so läßt man 900 funfzigjährige Mitglieder neu hinzutreten und diese successive ausscheiden. Hierbei ist zu bemerken, daß man etwas genauer rechnet, wenn man nicht die Zahlen der Sterbenden, sondern die der Ueberlebenden eines jeden Jahres ermittelt, weil diese größer sind als jene und demnach ein Bruchtheil eher vernachlässigt werden kann. Diese Ueberlebenden ließen sich nun nach den Proportionen

$$300 : 900 = 291 : x_1 = 873$$
$$300 : 900 = 282 : x_2 = 846$$
$$300 : 900 = 273 : x_3 = 819$$
$$300 : 900 = 264 : x_4 = 792$$

u. s. w.

finden, was auch für die Anfangszahl 900 gegen 300 leicht wäre, bei andern Zahlenverhältnissen aber schon für den einzelnen Jahrgang mühsam genug sein würde, indessen doch etwas abgekürzt werden kann. Bei Anwendung einer dreiziffrigen Mortalitäts-Tabelle, wie der Süßmilch'schen, kommt nämlich auf eine Reihe hintereinander folgender Jahre eine und dieselbe Anzahl Todte, so daß man die obigen Proportionen nur für die Ueberlebenden am Ende einer jeden Periode, also für die gesternten Zahlen 192, 112, 85, 69, 55, 37 u. s. w. in Anwendung bringt, nach welchen von 900 Personen noch resp. 576, 336, 255, 231, 165, 111 u. s. w. übrig bleiben. Vermittelst dieser Zahlen lassen sich die dazwischen liegenden durch Interpolation leicht finden. Bleiben nämlich

von 900 funfzigjährigen Personen nach zwölf Jahren noch 576 am Leben, so sind überhaupt 324, also bei vorausgesetztem gleichmäßigem Absterben jährlich $\frac{324}{12} = 27$ verstorben, die nun von den 900 in Abzug zu bringen sind und 873, 846, 819 u. s. w. ergeben. Ebenso erhält man für die jährliche Anzahl der Sterbenden während der zweiten Periode $\frac{576 - 336}{8} = 30$, während der dritten Periode $\frac{336 - 225}{3} = 27$, während der vierten Periode $\frac{255 - 207}{2} = 24$ u. s. w.

Am Anfange des dritten Geschäftsjahres leben nun noch 28200 zweiundfunfzig- und 873 einundfunfzigjährige, zusammen also 29073 Personen, so daß 927 funfzigjährige Personen neu hinzuzutreten haben, um die Mitgliederzahl wieder auf 30000 zu bringen. Für diese 927 Personen sucht man nun zunächst die Stammlebenden nach den oben angegebenen, ein für allemal zu vermerkenden Zahlen 192, 112, 85 u. s. w. und trägt diese — Col. 3 — gehörigen Orts ein, um daraus die Lebenden der übrigen Jahre, wie vorher, durch Interpolation zu berechnen. Das richtige Ueberschreiben der Stammlebenden erleichtert man sich sehr durch folgende Bemerkung. Die eingetretenen funfzigjährigen Personen des ersten Geschäftsjahres sind Col. 1 in erster Linie, die des zweiten Geschäftsjahres Col. 2 in zweiter Linie, die des dritten Geschäftsjahres Col. 3 in dritter Linie u. s. w. notirt, so daß die Neueingetretenen, und mithin auch alle gleichaltrigen Lebenden nicht unmittelbar, sondern in diagonaler Richtung nebeneinander stehen. Diejenigen Diagonalen nun, welche die Stammlebenden aufzunehmen haben, pflege ich vor aller ferneren Rechnung (in der Tabelle durch Sterne) zu markiren und kann alsdann die betreffenden Zahlen der Lebenden ohne alles Abzählen oder Irren daneben setzen.

Von den 927 Eingetretenen des dritten Geschäftsjahres leben nach zwölf Jahren noch 593, so daß jährlich $\frac{927 - 593}{12} = 27\frac{10}{12}$ verstorben sind; will man demnach nicht mit Brüchen rechnen, auch nicht $27\frac{10}{12}$ für 28 zählen, was zwei Verstorbene mehr geben würde, so hat man zweimal 27 und zehnmal 28 Personen in Abzug zu bringen, und zwar nach der Regel: so lange die absoluten Zahlen der Sterbenden wachsen, subtrahire man zuerst die geringere Zahl, dann die größere; sobald aber die Zahlen der Sterbenden abnehmen, subtrahire man zuerst die größere Zahl, dann die geringere, so daß also für den in Rede stehenden Fall erst 27, dann 28 an die Reihe kommt. In der zweiten Periode sterben dagegen jährlich $\frac{593 - 346}{8} = 30\frac{7}{8}$, und da die Zahlen der Todten bereits in Abnahme begriffen sind, so wurden erst siebenmal 31 und dann einmal 30 subtrahirt. Man thut daher gut, diejenigen Diagonalen, bei welchen ein solcher Uebergang stattfindet, noch besonders zu markiren, wie es in der Tabelle bei den zweiundsechzigjährigen Personen mittelst zweier Sterne geschehen.

Um nun über die Resultate dieser Tabelle in's Klare zu kommen, bedenke man, daß durch jeden Hinzutritt neuer Mitglieder die absolute Zahl der

Sterbefälle gegen das Aussterben vermehrt wird. Wächst daher die Zahl der Sterbefälle ohnehin, so wirken beide Ursachen zusammen; nimmt aber die Zahl der Sterbefälle ab, so wirken beide Ursachen einander entgegen, während an noch anderen Stellen die Zahl der Todten von mehrfacher Einwirkung sowohl der einen als auch der andern Ursache resultiren kann. Da indeß die Todtenzahl der neu eingetretenen Mitglieder gegen die des ursprünglichen Contingents immer nur gering ist, so wird diese den Ausschlag geben. Alle diese Momente finden sich in der Tabelle wieder.

Im Laufe des ersten Geschäftsjahres sterben von den ursprünglichen Mitgliedern 900, während des zweiten Jahres von jenen abermals 900, von den 900 neuen Mitgliedern 27, zusammen 927. Im dritten Jahre versterben von dem ersten Contingent 900, von den 900 Mitgliedern des zweiten Jahres 27 und eben so viele von den 927 Mitgliedern des dritten Jahres, zusammen 954, so daß der Ueberschuß der 27 am Anfange des dritten gegen die im zweiten Jahre beigetretenen Mitglieder noch keinen wesentlichen Einfluß ausübt und die Zahl der Todesfälle in arithmetischer Progession wächst; in der That ist $\frac{27 \times 9}{300}$ = 0.81 noch kein volles Ganze. Mit dem vierten Jahre ändert sich diese Progression schon, indem nicht bloß 981, sondern 982 Personen sterben, da die 954 eingetretenen Mitglieder schon 28 Todesfälle ergeben. Noch mehr ist das im fünften Jahre der Fall, da gegenwärtig die 927 Mitglieder des zweiten Jahres schon 28, die 954 Mitglieder des dritten Jahres wiederum 28, aber die 982 neuen Mitglieder des vierten Jahres schon 29, zusammen 85 Sterbefälle liefern; dazu noch 927 Todte von den Mitgliedern der beiden ersten Jahre, geben überhaupt 1012 Sterbefälle, statt daß nach arithmetischer Progression nur 1008 vorhanden sein würden. In den darauf folgenden Jahren wird die Steigerung immer größer, so daß man resp.

1042, 1073, 1105, 1139, 1173, 1207, 1245

Sterbefälle findet, während die arithmetische Progression nur resp.

1035, 1062, 1089, 1116, 1143, 1170, 1197

erfordert, so daß die Unterschiede resp.

7, 11, 16, 23, 30, 37, 48

sind.

Betrachtet man dagegen die Reihe als eine geometrische Progression, so ist der Exponent derselben, d. h. der Multiplicator, womit jedes Glied zu multipliciren, um das nächstfolgende zu erhalten, $\frac{927}{900} = 1.03$, woraus sich

für das dritte Geschäftsjahr	927	× 1.03	=	954.81
„ „ vierte „	954.81	× 1.03	=	983.45
„ „ fünfte „	983.45	× 1.03	=	1012.95
„ „ sechste „	1012.95	× 1.03	=	1043.33
„ „ siebente „	1043.33	× 1.03	=	1074.63

für das achte Geschäftsjahr	1074.63 × 1.03 = 1106.87	
" " neunte "	1106.87 × 1.03 = 1140.07	
" " zehnte "	1140.07 × 1.03 = 1174.37	
" " eilfte "	1174.37 × 1.03 = 1209.60	
" " zwölfte "	1209.60 × 1.03 = 1245.88	

u. s. w.

ergeben würde. Diese Zahlen stimmen mit den gefundenen Zahlen der Sterbenden genugsam überein, so daß man dieselben als eine geometrische Progression betrachten kann, wofür sich der Grund im zweiten Abschnitt ergeben wird. Setzt man indeß die eben abgebrochene Rechnung für das nächste Jahr fort, so erhält man nur 1245.88 × 1.03 = 1283, während die Tabelle 1382 nachweist, weil von jetzt ab von den ursprünglichen Mitgliedern 1000 statt 900 abgehen, was den Ueberschuß von circa 100 Sterbenden liefert. Nach diesem Sprunge steigt die Anzahl der Sterbenden regelmäßig bis an's Ende des einundzwanzigsten Geschäftsjahres zur Höhe von 1727 Sterbenden, um mit dem zweiundzwanzigsten Jahre auf 1684 herabzusinken, weil von den ursprünglichen Mitgliedern nicht länger 1000, sondern hinwiederum nur 900 Mitglieder versterben. Da indessen dieser Abgang auch noch für die beiden folgenden Jahre verbleibt, so nimmt für diese Zeit die Zahl der Sterbenden wiederum bis zur Höhe von 1787 zu, um abermals im fünfundzwanzigsten Geschäftsjahre statt etwa auf 1841 zu gelangen, auf 1741 herabzusinken, weil die ursprünglichen Mitglieder nur 800 Todesfälle abgeben. Man sieht überhaupt, wie vom einundzwanzigsten Geschäftsjahre ab der natürlichen Neigung für die Zunahme der Sterbefälle durch die Abnahme derselben bei den ursprünglichen Mitgliedern entgegen gearbeitet wird, wie aber in jedem Jahre, wo diese Abnahme inne hält, die Steigerung der Sterbefälle wieder zum Vorschein kommt.

Die Berechnung dieser Tabelle ist nur bis zum dreißigsten Geschäftsjahre fortgesetzt, theils, weil man sie selten weiter bedarf, theils aber auch, weil die Fortsetzung nichts Merkwürdiges darbieten würde. Mit den letzten sechs Lebensjahren der ältesten Mitglieder scheiden jährlich 100 derselben aus, weswegen die jährliche Anzahl der Sterbefälle langsam zunimmt, ohne je zu einem eigentlichen Beharrungszustande zu gelangen. Von der Richtigkeit der letzten Behauptung kann man sich auf folgende Weise überzeugen. Wären die neu beitretenden Mitglieder fünfundneunzig Jahr alt, so würden dieselben jedesmal im Laufe des Beitrittsjahres ausscheiden und allerdings der Beharrungszustand sogleich eintreten; sind aber die neuen Mitglieder nur vierundneunzig Jahr, so stirbt davon die eine Hälfte im Laufe des ersten, die andere im Laufe des zweiten Jahres der Mitgliedschaft, so daß man die Zahl der jährlichen Sterbefälle erhält, wenn man die Hälfte der Gestorbenen des vergangenen Jahres

von der ursprünglichen Mitgliederzahl subtrahirt. Nimmt man letztere zu 1 an, so sterben im Geschäftsjahre

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{11}{16},\ \frac{21}{32},\ \frac{43}{64},\ \frac{85}{128},\ \frac{171}{256},$$

oder auf einerlei Benennung gebracht:

$$\frac{128}{256},\ \frac{192}{256},\ \frac{160}{256},\ \frac{176}{256},\ \frac{168}{256},\ \frac{172}{256},\ \frac{170}{256},\ \frac{171}{256},$$

welche Zahlen zwar einander immer näher rücken, ohne jedoch je einander gleich zu werden, so daß schon dieser einfachste Fall keinen Beharrungszustand darbietet.

Die Berechnung der Sterbenden nach Art der Tab. 22 ist der vielen Additionen wegen sehr zeitraubend, besonders auch deshalb, weil sie fast für jedes Lebensalter von neuem angelegt werden muß, so daß es mir nöthig schien, auf eine kürzere Auflösung zu sinnen, und ist mir solches für dreiziffrige Mortalitäts-Tabellen so weit gelungen, als es für die Praxis irgend erforderlich ist.

Für solche Tabellen ist nämlich das Ableben, wie schon mehrmals bemerkt, von Periode zu Periode gleichmäßig und daher werden im Laufe einer solchen Periode während eines bestimmten Zeitraumes von einer gegebenen Anzahl Personen eben so viele sterben, als z. B. von der halben Anzahl im doppelten Zeitraume. Man hat dadurch ein Mittel, zugleich aus der Anzahl der Mitglieder und der Dauer der Zeit, die während letzterer Sterbenden zu zählen, wie solches Tab. 23 für stets 300 Mitglieder, die bei ihrer Aufnahme funfzig Jahr alt waren, geschehen.

Tabelle 23.

Alter der ursprünglichen Mitglieder.	Lebende.	Sterbende.	Gestorbene.	Summen der Gestorbenen.	Sterbende neue Mitglieder.	Neue Mitglieder.	Alter der ursprünglichen Mitglieder.	Lebende.	Sterbende.	Gestorbene.	Summen der Gestorbenen.	Sterbende neue Mitglieder.	Neue Mitglieder.
	a	b	c	d	e	f		a	b	c	d	e	f
50	300	—	—	—	—	—	65	162	10	138		6	16
51	291	9	9		—	9	66	152	10	148		6	16
52	282	9	18		1	10	67	142	10	158		6	16
53	273	9	27		1	10	68	132	10	168		6	16
54	264	9	36	90	1	10	69	122	10	178	1738	6	16
					(3)							(62)	
55	255	9	45		2	11	70	112	10	188		8	18
56	246	9	54		2	11	71	103	9	197		8	17
57	237	9	63		2	11	72	94	9	206		8	17
58	228	9	72		2	11	73	85	9	215		9	18
59	219	9	81	405	2	11	74	77	8	223	2767	9	17
					(13)							(104)	
60	210	9	90		3	12	75	69	8	231		11	19
61	201	9	99		4	13	76	62	7	238		11	18
62	192	9	108		4	13	77	55	7	245		11	18
63	182	10	118		4	14	78	49	6	251		11	17
64	172	10	128	948	4	14	79	43	6	257	3989	11	17
					(32)							(159)	

Für die 9 Verstorbenen des ersten Geschäftsjahres treten mit dem Beginne des zweiten 9 neue Mitglieder ein, Col. b, welche am Ende dieses Jahres 9 Jahr beim Vereine waren. Kommen nun im Anfange des dritten Jahres abermals 9 neue Mitglieder hinzu, Col. c, so werden diese mit denen des zweiten Jahres 18 Jahr im Laufe des dritten Jahres, eben so die beim Beginne des vierten Jahres hinzugekommenen 9 Mitglieder mit denen der früheren Jahre im Laufe des vierten Jahres 27 Jahr beim Verein gewesen sein u. s. w. Will man demnach die Anzahl der Jahre haben, die sämmtliche neuen Mitglieder überhaupt beim Vereine verlebt haben, so hat man nur die Gestorbenen, Col. c, von neuem zu addiren, wie solches Col. d von fünf zu fünf Jahren geschehen. Die 36 im Laufe der ersten fünf Jahre eingetretenen Mitglieder haben nach dieser Colonne überhaupt 90 Jahre beim Vereine gelebt, und rechnet man also auf je 100 Mitglieder 3 Sterbefälle, so giebt dieses nahebei 3 sol cher Fälle, welche in Col. e über die fünf Jahre gleichmäßig ver-

theilt sind. Für diese schon von den neuen Mitglieder herrührenden Todesfälle sind aber gleichfalls 3 Mitglieder neu beigetreten, die resp. 2, 1 und 0, zusammen 3 Jahr bei dem Verein gelebt haben, so daß man eigentlich 93 Jahre zu rechnen hätte, welche indeß keine wesentliche Veränderung hervorbringen, da $\frac{93 \times 3}{100}$ gleichfalls 3 giebt.

Setzt man voraus, daß am Anfange jedes Jahres eines Quinquenniums ein Mitglied beigetreten, so hätten diese 5 neuen Mitglieder am Ende einer solchen Periode resp. 4, 3, 2, 1 und 0 Jahre, zusammen 10 Jahre beim Vereine gelebt; tritt demnach im Laufe von fünf Jahren zusammengenommen eine Anzahl Mitglieder gleichmäßig ein, so findet man die Anzahl der von ihnen beim Vereine im Laufe des Quinquenniums durchlebten Jahre, wenn man die Anzahl der beigetretenen Mitglieder mit 10 multiplicirt und durch 5 dividirt, also kürzer, wenn man einfach die Zahl der beigetretenen Mitglieder verdoppelt.

Im Laufe des zweiten Quinquenniums nun haben die beigetretenen Mitglieder aus Col. b 405 — 90 = 315, die beigetretenen Mitglieder aus Col. d aber $3 \times 5 = 15$, macht zusammen 330 Jahr beim Verein gelebt, welche $\frac{330 \times 3}{100} = 10$ Todesfälle liefern würden. Da indessen die hierfür beigetretenen 10 Mitglieder schon im Laufe dieses Quinquenniums 20 Jahre beim Verein gelebt haben, so hat man $\frac{350 \times 3}{100} = 10$ zu setzen, welche wiederum in Col. e gleichmäßig vertheilt sind.

Für die übrigen Quinqennien stellt sich die Rechnung folgendermaßen:

3tes Quinquennium.

Durchlebte Jahre der neuen Mitglieder Col. b: 949 — 405 = 543
" " " " " Col. e: $5 \times 13 =$ 65
608

Sterbende 3% . . . . . $\frac{605 \times 3}{100} = 18$

corrigirte Zahl der Sterbenden $\frac{(608 + 36) \times 3}{100} = 19.$

4tes Quinquennium.

Durchlebte Jahre der neuen Mitglieder Col. b: 1738 — 948 = 790
" " " " " Col. e: $5 \times 32 =$ 160
950

Sterbende 3% . . . . . $\frac{950 \times 3}{100} = 29$

corrigirte Zahl der Sterbenden $\frac{(905 + 58) \times 3}{100} = 30.$

5tes Quinquennium.

Durchlebte Jahre der neuen Mitglieder Col. b: 2767 — 1738 = 1029
" " " " " Col. e: $5 \times 62 =$ 310
1339

Sterbende 3% . . . . $\frac{1339 \times 3}{100} = 40$

corrigirte Zahl der Sterbenden $\frac{(1339 + 80) \times 3}{100} = 42.$

6tes Quinquennium.

Durchlebte Jahre der neuen Mitglieder Col. b:	3989 — 2767 =	1222
" " " " Col. c:	5 × 104 =	520
		1742

Sterbende 3% . . . . $\frac{1742 \times 3}{100} = 52$

corrigirte Zahl der Sterbenden $\frac{(1742 + 104) \times 3}{100} = 55.$

Bei der Berechnung der durchlebten Jahre der neuen Mitglieder ist jedesmal der Gesammtbetrag der beigetretenen zu Grunde gelegt, ohne die von ihnen bereits verstorbenen in Abzug zu bringen, weil ersteres dem Begriffe des gleichmäßigen Absterbens gemäß ist.

Wie man sieht, ist diese Berechnung viel kürzer und angenehmer, als die nach Tab. 23. Stellt man demnach die Resultate beider Tabellen zusammen, so ergiebt sich die Zahl der neu Aufgenommenen

	nach directer Berechnung	nach indirecter Berechnung
im Quinquennium 1:	38	39
" " 2:	53	55
" " 3:	64	66
" " 4:	79	80
" " 5:	86	87
" " 6:	88	89
	408	416

woraus sich eine für die Praxis hinreichende Annäherung bis auf 2 Procent der Ausgeschiedenen ergiebt. — Da endlich das ganze Verfahren eigentlich nur darauf beruht, daß das Sterben der für die Gestorbenen eingetretenen Mitglieder gleichmäßig sei, so wird es sich auch auf vierziffrige Mortalitäts-Tabellen ohne allzugroße Abweichung anwenden lassen.

Stellt man endlich noch den jährlichen Bedarf, wie er sich dadurch ergiebt, daß man die Sterbenden der Tab. 23 durch 300 dividirt, mit dem für den gleichmäßigen Zutritt und für das Aussterben zusammen, so erhält man

Tabelle 24.

Geschäftsjahr:	Bedarf für funfzigjährige Personen beim Aussterben:	bei unveränderter Mitgliederzahl:	beim gleichmäßigen Zutritt:
	a	b	c
1	0.0300	0.0300	0.0300
6	0353	0347	0319
11	0429	0403	0347
16	0658	0507	0390
21	0874	0561	0441
26	1130	0581	0488
29	1395	0593	0510

Nachdem im Vorhergehenden die Untersuchung über den jeweiligen Bedarf, so weit er auf ein einzelnes Leben Bezug hat, nach allen Seiten hin erörtert worden, gehen wir zur Ermittelung jenes Bedarfs für die Verbindung zweier und mehrerer Leben über.

Bei gleichzeitiger Betrachtung zweier Personen sind in Bezug auf Leben und Tod zu einer gegebenen Zeit folgende vier Fälle möglich: 1) daß beide Personen noch leben oder die Verbindung fortdauere; 2) daß die eine Person noch lebe, die andere gestorben sei; 3) daß die erstere Person gestorben sei, die andere noch lebe und 4) daß beide Personen todt, die Verbindung also ganz ausgestorben sei.

Um in Bezug auf den zweiten und dritten Fall eine leichte und gebräuchliche Unterscheidung zwischen beiden Personen zu machen, nennen wir solche Verbindung ein Paar, die eine Person den Mann und die andere die Frau, ohne dadurch die Verschiedenheit der Geschlechter als unbedingt nothwendig erklären zu wollen. Die oben aufgeführten Zustände beziehen sich alsdann auf die Fortdauer des Paares, auf die Wittwerschaft, auf die Wittwenschaft und auf das gänzliche Ausgestorbensein des Paares.

Denkt man sich eine große Menge solcher Paare, der Einfachheit wegen so, daß sowohl die Männer als die Frauen unter sich gleichen Alters sind, so kann man ermitteln, wie viele von dieser Menge sich zu einer gegebenen Zeit in dem einen oder dem andern der genannten vier Zustände befinden.

Zur Feststellung des Sachverhältnisses nehmen wir beispielsweise an, daß die Männer fünfunddreißig, die Frauen dreißig Jahr alt seien und daß der Personalbestand dieser Verbindungen nach Verlauf von zehn Jahren untersucht, auch für die Sterblichkeit beider Geschlechter die Süßmilch'sche Mortalitäts-Tabelle zu Grunde gelegt werden solle.

Von 409 fünfunddreißigjährigen Personen leben nach zehn Jahren: 339, todt 70,
" 439 dreißigjährigen " " " " " 374, " 65;
geht man demnach von 409 × 439 Paaren aus, so sind davon
geblieben: 339 × 439, gestorben 70 × 439 Männer,
" 409 × 374, " 409 × 65 Frauen.

Jedoch ist es fast undenkbar, daß alle gebliebenen Männer zu den gebliebenen Frauen und alle gestorbenen Männer zu den gestorbenen Frauen gehören werden, vielmehr am wahrscheinlichsten, daß sich die Zahlen der Gebliebenen und Gestorbenen nach dem gegenseitigen Verhältnisse vertheilen werden. Das Verhältniß zwischen den gebliebenen und den gestorbenen Frauen wird aber durch 374 : 65 ausgedrückt, so daß

$\frac{339 \times 439 \times 374}{439} = 339 \times 374$ gebliebene Männer auf gebliebene Frauen oder stehende Ehen,

$\frac{339 \times 439 \times 65}{439} = 339 \times 65$ " " auf gestorbene Frauen oder Wittwer,

$\frac{70 \times 439 \times 374}{439} = 70 \times 374$ gestorbene Männer auf gebliebene Frauen oder Wittwen,

$\frac{70 \times 439 \times 65}{439} = 70 \times 65$ " " auf gestorbene Frauen oder ganz ausgestorbene Ehen

kommen.

Man sieht, daß diese Resultate von den zu Grunde gelegten besondern Zahlenverhältnissen unabhängig sind, so daß man allgemein folgenden Satz erhält:

Legt man so viele Paare verbundener Lebenden zu Grunde, als das Produkt der Tabellenzahl der lebenden Männer und der lebenden Frauen für die ursprünglichen Alter beträgt, so erhält man zu jeder Zeit

1) die Zahl der noch bestehenden Ehen, wenn man die Zahlen der noch lebenden Männer und der noch lebenden Frauen,
2) die Zahl der vorhandenen Wittwer, wenn man die Zahlen der noch lebenden Männer und der bereits verstorbenen Frauen,
3) die Zahl der vorhandenen Wittwen, wenn man die Zahlen der bereits verstorbenen Männer und der noch lebenden Frauen,
4) endlich, die Zahl der ganz ausgestorbenen Ehen, wenn man die Zahlen der bereits verstorbenen Männer und der bereits verstorbenen Frauen

mit einander multiplicirt.

Da außer den angeführten vier Fällen kein weiterer möglich ist, so wird

die Summe der vorgenannten vier Produkte stets dem ursprünglichen Produkte, d. h. der Zahl der zu Grunde gelegten Ehepaare gleich sein; und in der That ist für das angewandte Beispiel

$$339 \times 374 + 339 \times 65 + 70 \times 374 + 70 \times 65 = 339 \times 439 + 70 \times 439 = 409 \times 439.$$

Nach diesem Principe ist die folgende Tabelle 25 berechnet, indem dabei von 409 fünfunddreißigjährigen und 439 dreißigjährigen Personen ausgegangen wurde.

Tabelle 25.

Lebensalter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Lebende	Todte	Lebende	Todte	Stehende Ehen. a × c	Wittwer. a × d	Wittwen. b × c	Ausgestorbene Ehen. b × d
	Männer.		Frauen.					
	a	b	c	d	e	f	g	h
35	409	.	439	.	179551		.	.
36	402	7	433	6	174066	2412	3031	42
37	395	14	427	12	168665	4740	5978	168
38	388	21	421	18	163348	6984	8841	378
39	381	28	415	24	158115	9144	11620	672
40	374	35	409	30	152966	11220	14315	1050
41	367	42	402	37	147534	13579	16884	1554
42	360	49	395	44	142200	15840	19355	2156
43	353	56	388	51	136964	18003	21728	2856
44	346	63	381	58	131826	20068	24003	3654
45	339	70	374	65	126786	22035	26180	4550
46	332	77	367	72	121844	23904	28259	5544
47	324	85	360	79	116640	25596	30600	6715
48	316	93	353	86	111548	27176	32829	7998
49	308	101	346	93	106568	28644	34946	9393
50	300	109	339	100	101700	30000	36951	10900
51	291	118	332	107	96612	31137	39176	12626
52	282	127	324	115	91368	32430	41148	14605
53	273	136	316	123	86268	33579	42976	16728
54	264	145	308	131	81312	34584	44640	18995
55	255	154	300	139	76500	35445	46200	21406
56	246	163	291	148	71586	36408	47433	24124
57	237	172	282	157	66834	37209	48504	27004
58	228	181	273	166	62244	37848	49413	30046
59	219	190	264	175	57816	38325	50160	33250

Lebensalter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Lebende | Todte Männer.		Lebende | Todte Frauen.		Stehende Ehen. a × c	Wittwer. a × d	Wittwen. b × c	Ausgestorbene Ehen. b × d
	a	b	c	d	e	f	g	h
60	210	199	255	184	53550	38640	50745	36616
61	201	208	246	193	49446	38793	51168	40144
62	192	217	237	202	45504	38784	51429	43834
63	182	227	228	211	41496	38402	51756	47897
64	172	237	219	220	37668	37840	51903	52140
65	162	247	210	229	34020	37098	51870	56563
66	152	257	201	238	30552	36176	51657	61166
67	142	267	192	247	27264	35074	51264	65949
68	132	277	182	257	24024	33924	50414	71189
69	122	287	172	267	20984	32574	49364	76629
70	112	297	162	277	18144	31024	48114	82269
71	103	306	152	287	15656	29561	46512	87822
72	94	315	142	297	13348	27918	44730	93555
73	85	324	132	307	11220	26095	42768	99468
74	77	332	122	317	9394	24409	40504	105244
75	69	340	112	327	7728	22563	38080	111180
76	62	347	103	336	6386	20832	35741	116592
77	55	354	94	345	5170	18975	33276	122130
78	49	360	85	354	4165	17346	30600	127440
79	43	366	77	362	3311	15566	28182	132492
80	37	372	69	370	2553	13690	25668	137640
81	32	377	62	377	1984	12064	23374	142129
82	28	381	55	384	1540	10752	20955	146304
83	24	385	49	390	1176	9360	18865	150150
84	20	389	43	396	860	7920	16727	154044
85	17	392	37	402	629	6834	14504	157584
86	14	395	32	407	448	5698	12640	160765
87	12	397	28	411	336	4932	11116	163167
88	10	399	24	415	240	4150	9576	165585
89	8	401	20	419	160	3352	8020	168019
90	6	403	17	422	102	2532	6851	170066
91	5	404	14	425	70	2125	5656	171700
92	4	405	12	427	48	1708	4860	172935
93	3	406	10	429	30	1287	4060	174174
94	2	407	8	431	16	862	3256	175417

Lebensalter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Lebende | Männer.	Todte	Lebende | Frauen.	Todte	Stehende Ehen. a × c	Wittwer. a × d	Wittwen. b × c	Ausgestorbene Ehen. b × d
	a	b	c	d	e	f	g	h
95	1	408	6	433	6	433	2448	176664
96	0	409	5	434	0	0	2045	177506
97	0	409	4	435	0	0	1636	177915
98	0	409	3	436	0	0	1227	178324
99	0	409	2	437	0	0	818	178733
100	0	409	1	438	0	0	409	179142
101	0	409	0	439	0	0	0	179551

Die Zahlen in den Colonnen e und h entstehen aus der Multiplication der Zahlen der Lebenden in den Colonnen a und c, b und d, und da die Faktoren der ersten Produkte stätig abnehmen, die Faktoren der letzteren Produkte dagegen stätig zunehmen, so wird dieses bei den Produkten selbst gleichfalls stattfinden. Betrachtet man indeß die ersten Produkte in der Colonne e im Gegensatz zu ihren Faktoren, so sieht man, daß diese in den Colonnen a und c gleichmäßig resp. um 7 und 6 abnehmen, wogegen die Differenz der Produkte resp. 5485, 5401, 5317, 5233 u. s. w., die Abnahme dieser Faktoren also eine retardirende ist. Da jedoch der Unterschied der Differenzen, 84, gegen die zu Grunde liegenden Verbindungen 179551, 174066, 168665 so klein ist, daß er nur resp. 47, 48, 50 auf 100000 beträgt, so erhält man den für die Folge wichtigen Satz: **Nehmen die getrennten Leben gleichmäßig ab, so ist die Abnahme der verbundenen Leben einer Verzögerung unterworfen, die anfänglich zwar äußerst gering ist, mit den Jahren aber immer mehr zunimmt.**

Da die Produkte in den Colonnen f und g aus zwei Faktoren zusammengesetzt sind, von denen der eine, die Zahl der Lebenden, fortwährend abnimmt, während der andere, die Zahl der Gestorbenen, fortwährend zunimmt, so wird die gegenseitige Größe zweier auf einander folgender Produkte von Zu- und Abnahme zugleich abhängen. Soll z. B. $402 \times 6 < 395 \times 12$ sein, so muß das auch noch statt haben, wenn man beiderseitig durch 395×6 dividirt, wodurch man $\frac{402}{395} < \frac{12}{6}$ erhält, und umgekehrt, sobald diese Bedingung erfüllt ist, wird es auch jene sein. Das erstere Verhältniß ist anfänglich am kleinsten und nimmt im Allgemeinen fortwährend zu, weil von einem Jahre zum andern von dem größeren Zähler dieselbe Zahl der Sterbenden wie von dem kleineren Nenner, von letzterem also verhältnißmäßig mehr in Abzug kommt. Ausnahmen finden hierbei nur an den Stellen statt, wo sich die absolute Zahl der Sterbenden verringert. Dagegen sind die umgekehrten Verhältnisse der

Gestorbenen anfänglich am größten und nehmen fortwährend ab, weil gegenwärtig von einem Jahre zum andern zu dem größeren Zähler dieselbe Zahl der Sterbenden wie zu dem kleineren Nenner hinzukommt, und sind Ausnahmen nur da vorhanden, wo sich die absolute Zahl der Sterbenden erhöht. Man erhält demnach den Satz: Stirbt ein Verein gleichaltriger Paare aus, so wächst die Zahl der Ueberlebenden jeder Gattung, so lange das Verhältniß der Ueberlebten zweier unmittelbar auf einander folgenden Jahre kleiner bleibt, als das umgekehrte Verhältniß der Gestorbenen der andern Gattung.

Nach diesem Satze ist die Tabelle 26 eingerichtet.

Col. a enthält die Verhältnisse der Lebenden je zweier zwischen dem funfzehnten und neunundsiebzigsten unmittelbar auf einander folgenden Lebensjahre und bleiben diese natürlich für jedes Anfangsalter und für jede Alterscombination der verbundenen Personen unveränderlich. Die übrigen Colonnen enthalten für die übergeschriebenen Alter die umgekehrten Verhältnisse der Gestorbenen, welche im Allgemeinen bei jedem andern Anfangsalter anders ausfallen. Will man nun wissen, in welchem Jahre während der Periode des Aussterbens ein Verein gleichaltriger Paare die größte Zahl Ueberlebender irgend einer Kategorie hat, oder allgemeiner, wie lange diese Zahlen zunehmen, um darauf wieder abzunehmen: so sucht man sich das Alter der zu Ueberlebenden am vertikalen Rande der Tabelle auf, nimmt das Alter für die Ueberlebenden, wenn solches durch 5 theilbar, aus den Colonnenüberschriften, geht in der Colonne a, so wie in den betreffenden Alterscolonnen gleichmäßig so lange hinab, als das Verhältniß in Col. a kleiner bleibt, als das bezügliche umgekehrte Verhältniß der Gestorbenen und vergrößert die auf diese Weise erhaltene Zahl der Jahre um 2. Ist das Alter der Ueberlebenden nicht durch 5 theilbar, so hat man dafür das nächst kleinere, so wie das nächst größere Alter der Tabelle zu nehmen und nach beiden Resultaten die Zahl der Jahre für das gegebene Alter durch Interpolation zu finden. Bei der Verbindung dreißigjähriger und fünfunddreißigjähriger Personen ergiebt sich die größte Zahl der Ueberlebenden des höheren Alters im siebenundzwanzigsten Geschäftsjahre, indem hier die diesem und dem nächstfolgenden Jahre entsprechenden Verhältnisse von 1.0448 < 1.0489 in 1.0469 > 1.0466 übergehen. Ebenso findet sich die größte Zahl Ueberlebender des geringeren Alters im dreißigsten Geschäftsjahre, weil die maßgebenden Verhältnisse um diese Zeit 1.0411 < 1.0441 und 1.0429 > 1.0422 sind. Den direkten Nachweis für die Richtigkeit beider Resultate liefert die Tabelle 25.

Vergleicht man die Zahl der Ueberlebenden beider Gattungen für die entsprechenden Geschäftsjahre, so sieht man, daß die in Col. g stets größer ist

Lebensalter der versichernden Personen.
15
16
17
18
19

als die in Col. f. Für das zehnte Geschäftsjahr ist z. B. die erstere Zahl 381×63, die letztere 346×58, und es wird nun $381 \times 63 > 346 \times 58$ sein, wenn $\frac{381}{58} > \frac{346}{63}$, d. h. wenn das Verhältniß der Ueberlebenden zu den Gestorbenen der betreffenden Gattung größer ist, als das gleiche Verhältniß der andern Gattung. Da dieses immer bei den jüngeren Personen der Fall ist, so folgt daraus: Stirbt ein Verein gleichaltriger Paare aus, so wird er zu jeder Zeit mehr Ueberlebende jüngeren als höheren Alters haben.

Sollen in einem Vereine Ueberlebende einer Gattung (Wittwen, Waisen u. dgl.) ernährt werden, so kann dieses im Allgemeinen nur von den stehenden Paaren geschehen, weil die Ueberlebenden der andern Gattung (Ehemänner, Väter u. s. w.) kein Interesse zur Zahlung mehr haben und nur bei ganz besondern Verbänden zur Weiterzahlung angehalten werden könnten. Man findet demnach den repartirten jeweiligen Bedarf, wenn man die Zahl der betreffenden Ueberlebenden durch die der stehenden Verbindungen dividirt. Nun ist aber in jedem Jahre der Zähler dieses Bruches das Produkt der lebenden Versicherten und der verstorbenen Versicherer, der Nenner dagegen das Produkt der lebenden Versicherten und der lebenden Versicherer, so daß die lebenden Versicherten sich im Zähler und Nenner wegheben und man den schönen Satz erhält:

Ist ein Verein gleichaltriger Paare im Aussterben begriffen, so ergiebt sich der jährliche repartirte Bedarf, wenn man die verstorbenen Versicherer durch die Zahl der zurückgeblieben dividirt. Demnach ist dieser Bedarf von dem Alter der versicherten Personen unabhängig und wächst mit jedem Geschäftsjahre schneller als der Bedarf bei einer Sterbekasse mit Personen, die im Alter mit den Versicherern übereinstimmen.

Sind daher die versichernden und versicherten Personen gleichen Alters, so hört der Bedarf mit dem gleichzeitigen Ableben aller auf; sind die versicherten Personen die älteren, so werden sie noch von einer bestimmten Anzahl Versicherer überlebt; sind aber die versicherten Personen die jüngeren, so überlebt eine bestimmte Anzahl ihre Ernährer und hat zu darben.

In der nachstehenden Tabelle ist der jährliche Bedarf für Versicherer verschiedener Alter und während der ganzen Dauer des Geschäfts angegeben, aus der man die außerordentlich große Zunahme des Bedarfs ersehen kann. Daß dieser Bedarf viel schneller wächst, als bei einer Sterbekasse, rührt davon her, daß er bei dieser Kasse nur durch das Verhältniß der Sterbenden eines jeden einzelnen Jahres zu den Ueberlebenden, bei den Wittwen-Kassen aber durch das Verhältniß sämmtlicher Gestorbenen zu den Ueberlebenden ausgedrückt wird, woher es denn auch kommt, daß dieser Bedarf zu-

letzt den Betrag einer Jahres-Pension so oft genommen, als die Tabellenzahl der Versicherer beim Eintritt weniger 1 beträgt, erreicht. Sind aber so viele Versicherer gestorben wie zurückgeblieben, oder mit andern Worten, ist von der Anzahl der Versicherer die Hälfte gestorben, so ist der Bedarf gerade eben so groß, als die versicherte jährliche Pension. Man nennt den Zeitraum, während welches von einer bestimmten Menge Personen gleichen Alters die Hälfte gestorben sein wird, die **wahrscheinliche Lebensdauer** dieses Alters, weil nach Ablauf dieser Zeit jede einzelne der ursprünglichen Personen eben so gut am Leben als bereits verstorben sein kann, welchen Zustand man gemeinhin als wahrscheinlich zu bezeichnen pflegt. Hiernach ergiebt sich alsdann der Satz:

Ist ein Verein gleichaltriger Paare im Aussterben begriffen, so ist der repartirte jährliche Bedarf beim Ablauf der wahrscheinlichen Lebensdauer der Versichernden dem Jahresbetrage der versicherten Pension gleich, vorher kleiner, hinterher aber größer als derselbe.

Tabelle 27.

Bedarf bei Versicherung überlebender Personen.

Geschäftsjahr.	Die versichernde Person ist alt, Jahre: 15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
2	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.04	0.04	0.06	0.09	0.11
7	0.05	0.07	0.08	0.09	0.11	0.13	0.16	0.22	0.27	0.38	0.57	0.81	1.16
12	0.11	0.13	0.16	0.20	0.23	0.28	0.38	0.49	0.68	1.04	1.61	2.50	3.93
17	0.18	0.22	0.27	0.32	0.41	0.52	0.69	0.97	1.48	2.39	4.06	7.00	12.80
22	0.27	0.34	0.40	0.51	0.66	0.86	1.23	1.91	3.11	5.57	10.57	21.40	.
27	0.39	0.48	0.60	0.77	1.03	1.46	2.29	3.84	6.97	14.00	31.40	.	.
32	0.54	0.69	0.90	1.18	1.69	2.63	4.47	8.37	17.21	41.00	.	.	.
37	0.76	1.00	1.32	1.89	2.97	5.03	9.60	20.43	50.00	.	.	.	.
42	1.07	1.44	2.07	3.26	5.60	10.70	23.21	59.00	.	.	.	.	.
47	1.52	2.23	3.52	6.08	11.78	25.71	66.80	.	.	.	.	.	.
52	2.36	3.75	6.52	12.72	28.21	73.80	.	.	.	.	.	.	.
57	3.96	6.92	13.56	30.36	80.80	.	.	.	.	.	.	.	.
62	7.24	14.34	32.29	86.80	.	.	.	.	.	.	.	.	.
67	14.97	34.07	92.20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
72	35.50	97.20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
77	101.20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
im letzten Jahre	510.00	490.00	465.00	432.00	408.00	373.00	338.00	299.00	254.00	209.00	161.00	111.00	68.00

Der vorstehende Satz und die daraus gezogenen Folgerungen gelten indessen nur für Postnumerandozahlungen, während in der Folge wiederum nach Pränumerandozahlungen gerechnet werden wird, wonach der Bedarf niedriger ausfällt.

Die früher mitgetheilte Tabelle 25 der stehenden Verbindungen, der Ueberlebenden jeder Gattung und der ganz ausgestorbenen Verbindungen für Paare von resp. dreißig und fünfunddreißig Jahren gewährt in so fern keine ganz klare Einsicht in die Sache, als die Anfangszahl der Verbindungen, 179551, keine unmittelbare Vergleichungen zuläßt. Um dieses Hinderniß zu beseitigen, pflegt man die Anfangszahl der Tabelle auf eine runde Zahl überzuführen dadurch, daß man jede Zahl der Tabelle mit dieser runden Zahl multiplicirt und das Produkt durch die frühere Anfangszahl dividirt, wie solches in der nachstehenden Tabelle für die oben genannte Verbindung in Bezug auf die Anfangszahl 10000 geschehen ist.

Tabelle 28.

Lebensalter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Stehende Ehen.	Wittwer.	Wittwen.	Ganz ausgestorbene Ehen.	Lebensalter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Stehende Ehen.	Wittwer.	Wittwen.	Ganz ausgestorbene Ehen.
	a	b	c	d		a	b	c	d
35	10000	.	.	.	69	1169	1814	2749	4268
36	9695	134	169	2	70	1011	1728	2680	4581
37	9394	264	333	9	71	872	1646	2590	4892
38	9098	389	492	21	72	743	1555	2491	5211
39	8806	509	647	38	73	625	1453	2382	5540
40	8519	625	797	59	74	523	1359	2256	5862
41	8217	756	940	87	75	430	1257	2121	6192
42	7920	882	1078	120	76	356	1160	1991	6493
43	7628	1003	1210	159	77	288	1057	1853	6802
44	7342	1118	1337	203	78	232	966	1704	7098
45	7061	1227	1458	254	79	184	867	1570	7379
46	6786	1331	1574	309	80	142	762	1429	7667
47	6496	1426	1704	374	81	110	672	1302	7916
48	6213	1514	1828	445	82	86	599	1167	8148
49	5936	1595	1946	523	83	66	521	1051	8362
50	5664	1671	2058	607	84	48	441	931	8580
51	5381	1734	2182	703	85	35	381	808	8776
52	5089	1806	2292	813	86	25	317	704	8954
53	4805	1870	2393	932	87	19	275	619	9087
54	4529	1926	2487	1058	88	13	231	534	9222
55	4261	1974	2573	1192	89	9	186	447	9358
56	3987	2028	2642	1343	90	6	141	381	9472
57	3722	2072	2701	1505	91	4	118	315	9563
58	3467	2108	2752	1673	92	3	95	271	9631
59	3220	2134	2794	1852	93	2	72	226	9700
60	2982	2152	2826	2040	94	1	48	181	9770
61	2753	2161	2850	2236	95	0	24	136	9840
62	2534	2160	2865	2441	96	0	0	114	9886
63	2311	2139	2882	2668	97	0	0	91	9909
64	2098	2107	2891	2904	98	0	0	68	9932
65	1895	2066	2889	3150	99	0	0	46	9954
66	1702	2015	2877	3406	100	0	0	23	9977
67	1518	1954	2855	3673	101	0	0	0	10000
68	1338	1889	2808	3965					

Aus dieser Tabelle, die im Grunde genommen nur eine Wiederholung der Tabelle 25 ist, sieht man z. B. sogleich, daß etwa um die Zeit, in welcher die älteren Personen das zweiundfunfzigste Lebensjahr zurückgelegt haben, die Hälfte der Verbindungen ausgeschieden ist, weswegen man wiederum diesen Zeitabschnitt die *wahrscheinliche* Verbindungsdauer nennt. Die wahrscheinliche Lebensdauer dreißigjähriger und fünfunddreißigjähriger Personen ist resp. 29 Jahr und 26 Jahr; um diese Zeit sind demnach beide Faktoren Col. c Tab. 25 auf ihre Hälften herabgesunken, das Produkt also auf sein Viertel; und in der That findet man in der Tab. 28 von 10000 anfänglichen Paaren im achtundzwanzigsten Geschäftsjahre nur noch 2534, im fünfunddreißigsten nur noch 1011 u. s. w., was wiederum ein Beweis von der raschen Auflösung solcher Verbindungen ist.

Nicht allein auf die Zahl der vorhandenen Wittwer, Wittwen oder der gänzlich ausgestorbenen Paare zu einer gegebenen Zeit kommt es an, man hat oft auch nöthig, die während eines bestimmt gegebenen Zeitabschnittes neu entstehenden Wittwer, Wittwen oder ausgestorbenen Paare zu wissen. Nun leben z. B. nach Tab. 25 von 409 × 439 Paaren, die resp. fünfunddreißig und dreißig Jahr alt sind, am Anfange des fünften Jahres noch 381 × 415 Paare, während im Laufe des Jahres von 381 Männern 7, von 415 Frauen 6 sterben, so daß überhaupt

von den Männern 374 × 415 verbleiben, 7 × 415 sterben,
" " Frauen 381 × 409 " 381 × 6 "

Vertheilt man die zurückgebliebenen und die verstorbenen Männer und Frauen wie früher verhältnißmäßig, also z. B. die ersteren nach dem Verhältniß 409 : 6, so ergeben sich

$\frac{374 \times 451 \times 409}{415} = 374 \times 409$ zurückgebliebene Männer mit zurückgebliebenen Frauen oder stehende Ehen,

$\frac{374 \times 415 \times 6}{415} = 374 \times 6$ zurückgebliebene Männer mit verstorbenenen Frauen oder neu entstandene Wittwer,

$\frac{7 \times 415 \times 409}{415} = 7 \times 409$ verstorbene Männer mit zurückgebliebenen Frauen oder neu entstandene Wittwen,

$\frac{7 \times 415 \times 6}{415} = 7 \times 6$ verstorbene Männer mit verstorbenen Frauen oder neu ausgestorbene Paare.

Hiernach ergiebt sich ganz analog dem früheren Satze, Seite 66:

Geht man von einem Vereine so vieler verbundener Paare aus, als das Produkt der Tabellenzahlen der anfänglich Lebenden angiebt, so erhält man im Laufe eines jeden beliebigen Zeitabschnittes die

1) *neu entstandenen Wittwer, wenn man die zurückgebliebenen Männer und die während dieser Zeit verstorbenen Frauen,*

2) neu entstandenen Wittwen, wenn man die zurückgebliebenen Frauen und die während dieser Zeit verstorbenen Männer,
3) neu ausgestorbenen Paare, wenn man die während dieser Zeit verstorbenen Männer und Frauen

mit einander multiplicirt.

Eben so ist hier wiederum

$$374 \times 409 + 374 \times 6 + 7 \times 409 + 7 \times 6 = 374 \times 415 + 7 \times 415 = 381 \times 415,$$

weil von der letztern Zahl alle möglichen Ausgänge in Rechnung gestellt sind.

Dieser Regel gemäß ist die nachfolgende Tabelle berechnet.

Tabelle 29.

Lebensalter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Im Laufe der Jahre neu entstandene stehende Paare.	Wittwer.	Wittwen.	ausgestorbene Ehen.	Lebensalter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Im Laufe der Jahre neu entstandene stehende Paare.	Wittwer.	Wittwen.	ausgestorbene Ehen.
	a	b	c	d		a	b	c	d
35	179551	0	0	0	66	30522	1368	2010	90
36	174066	2412	3031	42	67	27264	1278	1920	90
37	168665	2370	2989	42	68	24024	1320	1820	100
38	163348	2328	2947	42	69	20984	1220	1720	100
39	158115	2286	2905	42	70	18144	1120	1620	100
40	152966	2244	2863	42	71	15656	1030	1368	90
41	147534	2569	2814	49	72	13348	940	1278	90
42	142200	2520	2765	49	73	11220	850	1188	90
43	136964	2471	2716	49	74	9394	770	976	80
44	131826	2422	2667	49	75	7728	690	896	80
45	126786	2373	2618	49	76	6386	558	721	62
46	121844	2324	2569	49	77	5170	495	658	63
47	116640	2268	2880	56	78	4165	441	510	54
48	111548	2212	2824	56	79	3311	344	462	48
49	106568	2156	2768	56	80	2553	296	414	48
50	101700	2100	2712	56	81	1984	224	310	35
51	96612	2037	2988	63	82	1540	196	220	28
52	91368	2256	2916	72	83	1176	144	196	24
53	86268	2184	2844	72	84	860	120	172	24
54	81312	2112	2772	72	85	629	102	111	18
55	76500	2040	2700	72	86	448	70	96	15
56	71586	2214	2619	81	87	336	48	56	8
57	66834	2133	2538	81	88	240	40	48	8
58	62244	2052	2457	81	89	160	32	40	8
59	57816	1971	2376	81	90	102	18	34	6
60	53550	1890	2295	81	91	70	15	14	3
61	49446	1809	2214	81	92	48	8	12	2
62	45504	1728	2133	81	93	30	6	10	2
63	41496	1638	2280	90	94	16	4	8	2
64	37668	1548	2190	90	95	6	2	6	2
65	34020	1458	2100	90	96	0	0	0	1

Die Sprünge, welche in dieser Tabelle, besonders Col. d, vorkommen, rühren, wie schon erwähnt, von der Mortalitäts-Tabelle selbst her.

Was das Versicherungsgeschäft betrifft, so sind vorher alle Versicherungs-Modalitäten, die nach Tab. 25 möglich waren, aufgeführt worden. Col. e jener Tabelle enthält die stehenden Paare, welche im Allgemeinen als Ernährer oder Zahler anzusehen waren. In den Colonnen f und g waren sämmtliche noch vorhandene Lebende verzeichnet. Sollte demnach von deren Ernährung die Rede sein, so konnte damit nur eine alljährliche Speisung gemeint werden, weil es sonst keinen Sinn gehabt haben würde, Ueberlebende, die bereits aus älteren Zeiten datiren, immer wieder von Neuem heranzuziehen. Endlich enthielt Col. h die bereits ganz ausgestorbenen Paare, mit welchen in ihrer Gesammtheit sich einzulassen ein Versicherungsverein gar nicht Gelegenheit haben kann.

Ganz anders stellt sich das Sachverhältniß nach Tab. 29. Zwar enthält auch hier Col. a die stehenden Paare, welche wieder als Ernährer anzusehen sind; aber schon Col. b und c findet man die im Laufe eines Jahres neu entstandenen Ueberlebenden. Soll von deren Unterhaltung die Rede sein, so kann dieselbe nur in einer einmaligen Abfindung bestehen, weil im Falle einer bloß zeitweiligen Befriedigung die früheren Ueberlebenden, so weit solche nur noch vorhanden sind, immer wieder heranzuziehen wären und man auf diese Weise auf die Colonnen f und g, Tab. 25, zurückkommen würde. Was nun die besprochene Abfindung betrifft, so kann diese möglicherweise doppelter Art sein. Erstlich nämlich kann es eine abgeschlossene Verpflichtung von **bestimmtem Betrage** sein, wie es immer alsdann der Fall ist, wenn Jemand sein Leben zu Gunsten einer bestimmten Person versichert, mit deren etwaigem früheren Absterben sowohl die Zahlungsverbindlichkeiten des Versichernden, als auch des Vereins aufhören, oder wie es z. B. bei der Berliner allgemeinen Wittwen-Pensions- und Unterstützungs-Kasse der Fall ist, welche der Wittwe außer der fortlaufenden jährlichen Wittwenpension noch den vierten Theil einer solchen Pension als Beerdigungskosten des verstorbenen Mannes ein für allemal auszahlt. Zweitens aber kann die Abfindung auf das ganze Verpflegungswesen der Ueberlebenden Bezug haben, in der Art, daß der Verein an die berechtigte Person selbst oder an eine dritte einen einmaligen Betrag zahlt, wofür dem Ueberlebenden ein gleich guter lebenslänglicher Unterhalt gewährt wird und welcher Betrag natürlich um so geringer ausfallen wird, je älter die Person in ihrer Verbindung mit der versichernden Person bereits geworden war. Auch die Col. d Tab. 29 kann als Gegenstand eines Versicherungsgeschäfts angesehen werden, indem man es gegenwärtig immer nur mit denjenigen ausgestorbenen Paaren zu thun hat, welche im Laufe eines und desselben Jahres dahin gelangten. So z. B. zahlte die Königlich Preußische allgemeine Wittwen-

Verpflegungs-Anstalt, falls das Antrittsgeld baar erlegt war, unter allen Umständen den Betrag einer einjährigen Pension, welches demnach dem Principe nach nichts anderes heißt, als daß die Anstalt für diejenigen Ehepaare, welche im Laufe eines und desselben Jahres sterben, jenen bestimmt festgesetzten Betrag hergab.

Was nun die Abfindung der Wittwer, Wittwen und der ganz ausgestorbenen Ehepaare mit dem Betrage 1 betrifft, so ergiebt sich dafür der Aussterbebedarf, wenn man Tab. 29 die Colonnen b, c, d durch die Zahlen der Col. a dividirt, wie solches Tab. 30 geschehen, aus welcher man wiederum das starke Anwachsen dieses Bedarfs kennen lernt.

Tabelle 30.

Alter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Aussterbebedarf für eine einmalige Abfindung mit dem Betrage 1.			Alter der Männer. Das der Frauen ist je um 5 Jahr jünger.	Aussterbebedarf für eine einmalige Abfindung mit dem Betrage 1.		
	Wittwer.	Wittwen.	Ausgestorbene Paare.		Wittwer.	Wittwen.	Ausgestorbene Paare.
	a	b	c		a	b	c
35	0.0134	0.0169	0.0002	65	0.0402	0.0598	0.0026
36	0136	0172	0002	66	0418	0628	0029
37	0138	0175	0002	67	0484	0667	0037
38	0140	0178	0003	68	0508	0716	0042
39	0142	0181	0003	69	0534	0772	0048
40	0168	0184	0003	70	0568	0754	0050
41	0172	0187	0003	71	0600	0817	0057
42	0174	0191	0003	72	0644	0890	0067
43	0177	0195	0004	73	0686	0865	0071
44	0180	0198	0004	74	0735	0954	0085
45	0183	0203	0004	75	0722	0933	0082
46	0186	0236	0005	76	0755	1030	0099
47	0189	0242	0005	77	0853	0986	0104
48	0192	0248	0005	78	0826	1109	0115
49	0197	0254	0005	79	0894	1250	0145
50	0200	0294	0006	80	0878	1214	0137
51	0233	0302	0007	81	0988	1109	0141
52	0239	0311	0008	82	0935	1273	0156
53	0245	0321	0008	83	1020	1463	0119
54	0251	0332	0009	84	1186	1291	0209
55	0289	0342	0011	85	1113	1526	0238
56	0298	0355	0011	86	1071	1250	0179
57	0307	0368	0012	87	1191	1490	0238
58	0317	0382	0013	88	1333	1667	0333
59	0327	0397	0014	89	1125	2125	0375
60	0338	0413	0015	90	1471	1373	0294
61	0349	0431	0016	91	1143	1714	0286
62	0360	0501	0020	92	1250	2083	0417
63	0373	0528	0022	93	1333	2667	0667
64	0.0387	0.0557	0.0024	94	0.1250	0.3750	0.1250

Zur Beurtheilung des Sachverhältnisses bei Abfindung der Ueberlebenden in Bezug auf ihre lebenslängliche Unterhaltung ist die nachfolgende Tabelle berechnet.

Tabelle 31.

Alter der Ueberlebenden.	Abfindungsquantum für eine lebenslängliche jährliche Zahlung 1.	Abfindungsquantum für sämmtliche Ueberlebende.		Abfindungsbetrag beim Aussterben für die Wittwer.	Abfindungsbetrag beim Aussterben für die Wittwen.
	a	b	c	d	e
30	15.0847	.	45722	.	0.255
31	14.9055	.	44552	.	256
32	14.7195	.	43378	.	257
33	14.5265	.	42199	.	258
34	14.3260	.	41015	.	259
35	14.1175	34051	39727	0.189	260
36	13.9379	33033	38538	190	261
37	13.7523	32015	37351	190	263
38	13.5604	30999	36166	190	264
39	13.3619	29984	34981	190	265
40	13.1565	33799	33799	221	267
41	12.9437	32618	37278	221	306
42	12.7233	31439	35931	221	308
43	12.4946	30262	34580	221	310
44	12.2572	29086	33242	221	312
45	12.0108	27913	35888	220	353
46	11.7546	26659	34276	219	355
47	11.5266	25497	32782	219	359
48	11.2912	24344	31299	219	363
49	11.0478	23200	29829	218	367
50	10.7961	21992	28275	216	370
51	10.5752	23858	26840	247	375
52	10.3492	22603	25428	247	380
53	10.1180	21369	24040	248	386
54	9.8815	20158	22678	247	392
55	9.6394	21342	21342	280	398
56	9.3918	20033	20033	280	405
57	9.1384	18753	20836	280	458
58	8.8790	17501	19445	281	468
59	8.6137	16280	18089	0.282	0.480

Alter der Ueber-lebenden.	Abfindungsquantum für eine lebenslängliche jährliche Zahlung 1.	Abfindungsquantum für sämmtliche Ueberlebende.		Abfindungsbetrag beim Aussterben für die Wittwer.	Abfindungsbetrag beim Aussterben für die Wittwen.
	a	b	c	d	e
60	8.3422	15091	16768	0.282	0.493
61	8.0643	13935	15484	282	501
62	7.7800	12744	14160	280	519
63	7.5358	11665	12962	281	540
64	7.2929	10633	11815	282	563
65	7.0528	9648	9648	283	532
66	6.8175	8713	8713	285	556
67	6.5895	8698	7828	319	587
68	6.3722	7774	6219	324	554
69	6.1703	6911	5529	329	589
70	5.9901	6170	4319	340	559
71	5.7740	5428	3799	347	595
72	5.5799	4743	2846	355	550
73	5.4176	4172	2503	372	600
74	5.2197	3502	2161	373	653
75	5.0578	2822	1568	365	614
76	4.8541	2403	1068	376	538
77	4.6907	2069	919	400	597
78	4.4757	1540	770	370	655
79	4.3043	1274	478	385	556
80	4.2023	941	403	364	641
81	4.0532	794	227	300	501
82	3.8175	550	183	357	545
83	3.6319	436	145	371	600
84	3.5326	360	120	402	750
85	3.3222	232	47	370	461
86	3.1957	153	38	344	543
87	2.8775	115	29	342	510
88	2.5911	83	21	346	700
89	2.3684	43	14	269	0.875
90	2.2841	34	.	333	.
91	1.851	15	.	214	.
92	1.406	8	.	167	.
93	0.949	4	.	133	.
94	0.481	1	.	0.062	.

Am Rande ist das Alter der Ueberlebenden unter Bezugnahme auf das ursprüngliche Alter und das Geschäftsjahr, in welchem das Ueberleben eintrat, angegeben. Col. a enthält dagegen diejenigen Beträge, aus welchen man, der Wahrscheinlichkeit nach, den Personen des danebenstehenden Alters, so lange dieselben leben, am Ende eines jeden Jahres den Betrag 1 verabfolgen kann, wenn die Ueberschüsse mit 4% jährlich verzinst werden. Im zweiten Abschnitte wird von diesen Werthen ausführlich die Rede sein. In der Col. b und c sind die Werthe Col. a mit den Zahlen der betreffenden Ueberlebenden aus den Colonnen b und c der Tab. 29 multiplicirt, so daß die Produkte in den Colonnen b und c, Tab. 31 den jährlich aufzubringenden Gesammtbedarf für alle neu entstandene Ueberlebende, resp. Wittwer oder Wittwen, angeben. Dividirt man dieselben durch die Zahl der noch vorhandenen Paare, Col. a Tab. 29, so erhält man in den Colonnen d und e der gegenwärtigen Tabelle den repartirten Jahresbetrag für jedes noch vorhandene Paar, oder das, was wir den jeweiligen Bedarf nannten. Man sieht, daß derselbe auch unter der gegenwärtigen Bedingung noch bis über das Doppelte wächst.

Es sind sonach im Vorhergehenden alle Arten von Versicherungen, die in Bezug auf zwei verbundene Leben vorkommen können, für die Periode des Aussterbens durchgenommen worden; es bleibt daher noch übrig, zur Betrachtung der Fälle überzugehen, in welchen außer den ursprünglichen Mitgliedern noch neue Mitglieder des ursprünglichen Alters hinzukommen, und setzen wir hierbei wiederum einen gleichmäßigen Zutritt voraus.

Was zunächst die jährliche Speisung der Ueberlebenden betrifft, so bleibt es sich nach dem Vorhergehenden ganz gleich, ob man dabei von Tab. 25 oder Tab. 28 ausgeht und wählen wir nur deshalb das Letztere, weil sich hierfür die Zahlen etwas leichter controliren lassen. Der Personalbestand am Anfange eines jeden Geschäftsjahres wird für alle vier Arten möglicher Fälle ganz eben so berechnet, wie Tab. I für ein einzelnes Leben. Bleiben nämlich nach Tab. 28 Col. a von 10000 Paaren am Anfange des zweiten Jahres noch 9695, so geben diese mit den 10000 neu hinzugekommenen Paaren 10000 + 9695; von jenen bleiben für den Anfang des dritten Jahres wiederum 9695, von den letzteren aber noch 9394, so daß am Anfange des dritten Jahres, nach Hinzurechnung der neuen Paare, 10000 + 9695 + 9394 vorhanden sein werden u. s. w. Ganz eben so ist es natürlich mit dem Personalbestande

der Wittwer,	resp.	134,	134 + 264,	134 + 264 + 389 u. s. w.
der Wittwen,	„	169,	169 + 333,	169 + 333 + 492 u. s. w.
der ausgestorbenen Ehen	„	2,	2 + 9,	2 + 9 + 21 u. s. w.,

so daß man wieder den betreffenden Personalbestand am Anfange eines jeden Jahres findet, wenn man die Zahlen der Colonnen a, b, c, d, Tab. 28 vom

ersten bis zum gegebenen Jahre addirt, und wird sich für die vorhandenen Ehepaare der Beharrungszustand nach Ablauf der Altersergänzung der ältern Person der in Rede stehenden Paare, der Beharrungszustand für die Wittwer und Wittwen nach Ablauf der Altersergänzung resp. der beigetretenen Männer oder Frauen einstellen, wie solches aus

Tabelle 32.

Geschäftsjahr:	Stehende Ehen.	Wittwer.	Wittwen.	Aus-gestorbene Ehen.	Geschäftsjahr:	Stehende Ehen.	Wittwer.	Wittwen.	Aus-gestorbene Ehen.
	a	b	c	d		a	b	c	d
1	10000	.	.	.	34	182367	50739	66130	40764
2	19695	134	169	2	35	183536	52553	68879	45032
3	29089	398	502	11	36	184547	54281	71559	49613
4	38187	787	994	32	37	185419	55927	74149	54505
5	46993	1296	1641	70	38	186162	57482	76640	59716
6	55512	1921	2438	129	39	186787	58935	79022	65256
7	63729	2677	3378	216	40	187310	60294	81278	71118
8	71649	3559	4456	336	41	187740	61551	83399	77310
9	79277	4562	5666	495	42	188096	62711	85390	83803
10	86619	5680	7003	698	43	188384	63768	87243	90685
11	93680	6907	8461	952	44	188616	64734	88947	97703
12	100466	8238	10035	1261	45	188800	65601	90517	105082
13	106962	9664	11739	1635	46	188942	66363	91946	112749
14	113175	11178	13567	2080	47	189052	67035	93248	120665
15	119111	12773	15513	2603	48	189138	67634	94415	128813
16	124775	14444	17571	3210	49	189204	68155	95466	137175
17	130156	16178	19753	3913	50	189252	68596	96397	145755
18	135245	17984	22045	4726	51	189287	68977	97205	154531
19	140050	19854	24438	5658	52	189312	69294	97909	163485
20	144579	21780	26925	6716	53	189331	69569	98528	172572
21	148840	23754	29498	7908	54	189344	69800	99062	181794
22	152827	25782	32140	9251	55	189353	69986	99509	191152
23	156549	27854	34841	10756	56	189359	70127	99890	200624
24	160016	29962	37593	12429	57	189363	70245	100205	210187
25	163236	32096	40387	14281	58	189366	70340	100476	219818
26	166218	34248	43213	16321	59	189368	70412	100702	229518
27	168971	36409	46063	18557	60	189369	70460	100883	239288
28	171505	38569	48928	20998	61	189369	70484	101019	249128
29	173816	40708	51810	23666	62	189369	70484	101133	259014
30	175914	42815	54701	26570	63	189369	70484	101224	268923
31	177809	44881	57590	29720	64	189369	70484	101292	278855
32	179511	46896	60467	33126	65	189369	70484	101338	288809
33	181029	48850	63322	36799	66	189369	70484	101361	298786

zu ersehen, die auf die angegebene Art aus Tabelle 28 berechnet worden ist.

Die Zahlen der Col. a dieser Tabelle entsprechen in jeder Beziehung den Zahlen Col. a Tab. I, so daß man aus diesen Zahlen oder einfacher aus den Zahlen, die auf dieselbe Weise durch Addition der Zahlen Col. a Tab. 25 hervorgehen, die mittlere Verbindungsdauer berechnen kann, wie man nach Tab. I die mittlere Lebensdauer berechnet hat. In der That entspricht

35jährigen	Männern	und	30jährigen	Frauen	das	Produkt	409×439
36	=	=	31	=	=	=	402×433
37	=	=	32	=	=	=	395×427
38	=	=	33	=	=	=	388×421
39	=	=	34	=	=	=	381×415,
u. s. w.			u. s. w.				u. s. w.

und setzt man wiederum voraus, daß die Trennung der Ehe am Ende eines jeden Jahres geschehe, so durchleben 409×439 Paare zunächst je ein Jahr, alsdann von ihnen 402×433 Paare wiederum je ein Jahr, ferner 395×427 Paare wiederum je ein Jahr u. s. w., so daß von den 409×439 Paaren in gegenseitiger Verbindung überhaupt $409 \times 439 + 402 \times 433 + 395 \times 427 + 388 \times 421 + \cdots$ Jahre, somit von jedem Paare durchschnittlich

$$\frac{409 \times 439 + 402 \times 433 + 395 \times 427 + 388 \times 421 + \cdots}{409 \times 439}$$

Jahre in Verbindung mit einander durchlebt werden, wonach man die Regel erhält:

Um die mittlere Verbindungsdauer eines Paares bestimmter Alter zu erhalten, multiplicire man die Tabellenzahlen der Männer vom gegebenen und aller höheren Alter resp. mit den Tabellenzahlen der Frauen vom gegebenen und aller höheren Alter, addire sämmtliche Produkte und dividire die Summe durch das erste Produkt.

Demnach wäre die mittlere Verbindungsdauer eines Paares von resp. sechsunddreißig und einunddreißig Jahren

$$\frac{402 \times 433 + 395 \times 427 + 388 \times 421 \times 381 \times 415}{402 \times 433}$$

und unterscheidet sich der frühere Zähler vom jetzigen nur darin, daß er den ersten Summanden mehr hatte. Daraus geht hervor:

Soll man die mittlere Verbindungsdauer für alle Paare gleichen Altersunterschiedes berechnen, so multiplicire man die entsprechenden Tabellenzahlen wie vorher, addire die Produkte

successive von unten auf und dividire jede Summe durch ihren höchsten Summanden.

Auch sieht man, daß diese Regel noch unverändert bleibt, wenn man für beiderlei Personen verschiedene Mortalitäts-Tabellen in Anwendung bringt. Als Beispiel wähle ich ein Paar, bei welchem die eine Person um acht Jahr älter als die andere ist, wofür sich ergiebt:

Tabelle 33.

Lebensalter beider verbundener Personen.	Lebende.		Produkte der beiden vorhergehenden Colonnen a × b	Summen der Zahlen in vorhergehender Colonne.	Verbindungsdauern d : c
	a	b	c	d	e
95—87	1	12	12	12	1.00
94—86	2	14	28	40	1.43
93—85	3	17	51	91	1.78
92—84	4	20	80	171	2.14
91—83	5	24	120	291	2.42
90—82	6	28	168	459	2.73
89—81	8	32	256	715	2.80
88—80	10	37	370	1085	2.93
87—79	12	43	516	1601	3.10
86—78	14	49	686	2287	3.32
85—77	17	55	905	3192	3.53
84—76	20	62	1240	4432	3.57
83—75	24	69	1656	6088	3.68
82—74	28	77	2156	8244	3.82
81—73	32	85	2720	10964	4.03
80—72	37	94	3478	14442	4.15
79—71	43	103	4429	18871	4.26
78—70	49	112	5488	24359	4.44
77—69	55	122	6710	31069	4.63
76—68	62	132	8184	39253	4.80
75—67	69	142	9798	49051	5.01
74—66	77	152	11704	60755	5.19
73—65	85	162	13770	74525	5.41
72—64	94	172	16168	90963	5.61
71—63	103	182	18746	109439	5.84
70—62	112	192	21504	130943	6.09
69—61	122	201	24522	155465	6.34
68—60	132	210	27720	183185	6.61
67—59	142	219	31098	214283	6.89
	u. s. w.			u. s. w.	

Nach diesem Schema ist die Berechnung der mittleren Verbindungsdauern für Paare gleichen Altersunterschiedes nicht allzu weitläuftig, wird es jedoch dadurch, daß dieselbe für jeden einzelnen Altersunterschied von Neuem angelegt werden muß. In der angehängten Tab. II sind nun zunächst die mittleren Dauern für Verbindungen von Personen vom sechszehnten Lebensjahre bis zum höchsten Alter, deren Altersunterschiede durch 5 theilbar und nicht größer als 25 sind, berechnet und lassen sich daraus die mittleren Verbindungsdauern für Personen zwischenliegender Altersunterschiede sehr leicht durch Interpolation finden. Behufs dieser Interpolation hat man zuvörderst zu ermitteln, in welcher Art die berechneten Werthe am vortheilhaftesten nebeneinander zu stellen sind. Man kann hierbei nämlich entweder das niedrigere oder das höhere Alter der beiden verbundenen Personen zu Grunde legen. Im ersteren Falle kommen die Verbindungen [16,16], [21,16], [26,16] u. s. w., — so werden wir der Kürze wegen eine Verbindung zweier Personen bezeichnen, von denen die eine 16, die andere resp. 16, 21, 26 u. s. w. Jahr alt ist, — nebeneinander, also am Anfange die Werthe

27.61, 26.09, 24.50, 22.79, 20.97, 19.13

mit den Differenzen

— 1.52, — 1.59, — 1.71, — 1.82, — 1.84

und am Schlusse

2.53	2.67	2.80	2.93	3.04	3.14
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

mit den Differenzen

— 1.53, — 1.67, — 1.80, — 1.93, — 2.04, — 2.04,

wo nun namentlich diese Schlußdifferenzen gegen die ursprünglichen Werthe so groß sind, daß man die Interpolation nicht mehr mit einiger Sicherheit anwenden kann, weil sich bei der relativen Größe dieser Differenzen nicht mehr voraussetzen läßt, dieselben werden sich über den ganzen Zeitraum von fünf Jahren gleichmäßig verbreiten. Stellt man dagegen, wie es in der Tab. II geschehen, die mittleren Dauern nach dem höheren Alter der beiden verbundenen Personen zusammen, so beginnt die Tabelle mit den Werthen

24.78	23.39	21.87	20.23	18.54
26.09	24.50	22.79	20.97	19.13

also den Differenzen

1.31, 1.11, 0.92, 0.74, 0.59

und schließt mit den Werthen 1.00, also mit der gemeinschaftlichen Differenz 0.00, so daß die Interpolation mit hinlänglicher Sicherheit angewendet werden kann.

Soll demnach die mittlere Verbindungsdauer für ein gegebenes Paar aus der Tabelle gefunden werden, so nehme man zunächst das höhere Alter am

Rande der Tabelle, welches vom sechszehnten Lebensjahre aufwärts immer vorhanden ist. Wäre nun das Alter der verbundenen jüngeren Person von der Art, daß der Altersunterschied 25 nicht übersteigt und gerade durch 5 theilbar ist, so findet sich die mittlere Verbindungsdauer unmittelbar in einer der mit 0, 5, 10, 15, 20 und 25 überschriebenen Colonnen. Ist dagegen der vorliegende Altersunterschied nicht durch 5 theilbar, so hat man das jüngere Alter so viel zu erniedrigen und zu erhöhen, daß beide Altersunterschiede durch 5 theilbar werden, die betreffenden Werthe aus der Tabelle zu nehmen und in Bezug auf das gegebene Alter zu interpoliren. Soll man demnach [67,59] bestimmen, so nimmt man zunächst aus der Tabelle

$$[67,62] = 6.49,\ [67,57] = 7.11,\ \text{Differenz } 0.62,$$

folglich

$$[67,59] = 6.49 + \tfrac{3}{5}\, 0.62 = 6.86.$$

Der größeren Bequemlichkeit wegen sind die Differenzen, wie 0.62, schon neben dem höheren Alter angegeben, so daß die vorher verlangte Erniedrigung des jüngeren Alters ganz erspaart wird. Die Differenzen beziehen sich auf einen Zeitraum von fünf Jahren und könnten daher, durch 5 dividirt, auf ein Jahr bezogen werden. Da indessen nur resp. mit 1, 2, 3, 4 zu multipliciren und durch 5 zu dividiren ist, so kann man eben so leicht mit 2, 4, 6, 8 multipliciren und vom Produkte die letzte Decimale weglassen. Man erhält daher fast unmittelbar aus der Tabelle

$$[67,59] = (6.49 + 6 \times 0.062) = 6.86,$$

während Tab. 33 die direkte Rechnung 6.89 ergab, so daß der Unterschied nur sehr gering ist.

Sind, wie es z. B. bei Tetens der Fall ist, die mittleren Verbindungsdauern nicht für alle fortlaufenden Alter einer und derselben Altersdifferenz, sondern gleichfalls nur von fünf zu fünf Jahren gegeben, so hat man nach beiden Richtungen hin zu interpoliren, wodurch die Rechnung weitläuftig wird. Für das gewählte Beispiel wäre die Interpolation

$$[65,55] = 7.70,\ [70,55] = 6.79,\ \text{Diff.} - 0.91,\ \text{also } [67,55] = 7.70 - 4 \times 0.091 = 7.34$$

$$[65,60] = 7.10,\ [70,60] = 6.33,\ \text{Diff.} - 0.77,\ \text{also } [67,60] = 7.10 - 4 \times 0{,}077 = 6.79$$

$$[67,55] = 7.34,\ [67,60] = 6.79,\ \text{Diff.} - 0.55,\ \text{also } [67,59] = 7.34 - 8 \times 0.055 = 6.90$$

Da der wahre Werth nach Tab. 33 6.89 ist und wir vorher 6.86 fanden, so giebt die doppelte Interpolation in dem Werthe 6.90 ein genaueres Resultat, als die einfache. Dies ist jedoch nur als zufällig anzusehen und werden im Allgemeinen die Resultate durch einmalige Interpolation für zuverlässiger anzusehen sein, als die andern.

Bei der Verbindung zweier Leben sind noch zwei andere Dauern denkbar, indem man fragen kann, wie viele Jahre durchschnittlich jede einzelne von beiden Personen die andere überleben werde. Man nennt diese Dauern die mittleren Ueberlebensdauern. Die direkte Berechnung derselben würde keine besonderen Schwierigkeiten darbieten. Nach Tab. 25 würde man nämlich sagen: 179551 Paare liefern bezüglich 2412, 2370, 2328 Wittwer u. s. w., welche je ein Jahr leben, folglich leben alle Wittwer zusammengenommen 2412 + 2370 + 2328 + · · · · Jahre und demnach durchschnittlich jeder einzelne $\frac{2412+2370+2328+\ldots}{179551}$ Jahr, woraus sich die Regel ergeben würde: Um die mittlere Ueberlebensdauer einer bestimmten Person einer gegebenen Verbindung zu erhalten, multiplicire man die Tabellenzahlen der Lebenden jener Person vom gegebenen Anfangsalter und aller höheren Alter resp. mit den Tabellenzahlen der Gestorbenen der zu überlebenden Person, addire die Produkte und dividire die Summe durch das Produkt aus den Tabellenzahlen der anfänglich Lebenden beider Personen.

Diese Art der Berechnung würde indeß sehr weitläuftig werden; denn indem man es hier mit den Gestorbenen (nicht mit den Sterbenden) zu thun hat, und diese für jedes Anfangsalter anders ausfallen, so würde man hier für jede Combination, nicht bloß für jeden Altersunterschied, die Rechnung fast gänzlich von Neuem durchzuführen haben. Zum Glück bieten sich aber die mittleren Ueberlebensdauern nach einer einfachen Betrachtung durch eine ganz leichte Rechnung dar. Da es nämlich wahrscheinlich ist, daß eine einzelne Person länger lebt, als ihre Verbindung mit einer andern dauern wird, indem die Möglichkeit vorhanden ist, daß diese vor jener stirbt, so wird sich die Lebensdauer einer jeden solchen Person aus ihrer Verbindungsdauer mit der andern und aus ihrer Ueberlebensdauer zusammensetzen, demnach auch die mittlere Lebensdauer gleich sein der mittlern Verbindungsdauer und der mittlern Ueberlebensdauer zusammengenommen. Man erhält demnach die mittlere Ueberlebensdauer einer jeden von zwei verbundenen Personen, wenn man von der mittlern Lebensdauer der betreffenden Person ihre mittlere Verbindungsdauer mit der andern subtrahirt. So ist z. B. nach Tab. I die mittlere Lebensdauer einer dreißigjährigen Person 29.07, die einer fünfunddreißigjährigen Person dagegen 25.99, die mittlere Verbindungsdauer beider aber nach Tab. II, 18.94, folglich die mittlere Ueberlebensdauer einer dreißigjährigen in Bezug auf eine fünfunddreißigjährige Person $\left|\frac{30}{35}\right| = 29.07 - 18.94 = 10.13$, und die mitttlere Ueberlebensdauer einer fünfunddreißigjährigen Person in Bezug auf die dreißigjährige $\left|\frac{35}{30}\right| = 25.99 - 18.94 = 7.05$.

Von der Uebereinstimmung dieser Werthe mit den nach der früheren Regel berechneten kann man sich auf direktem Wege sehr leicht überzeugen.

Nach jener Regel ist nämlich die mittlere Ueberlebensdauer der dreißigjährigen über die fünfunddreißigjährige Person (siehe Tab. I):

$$(6) \quad \frac{439 \times 0 + 433 \times 7 + 427 \times 14 + 421 \times 21 + \cdots}{439 \times 409}$$

wofür man jedoch auch schreiben kann

$$\frac{439 \times (409-409) + 433 \times (409-402) + 427 \times (409-395) + 421 \times (409-388) + \cdots}{439 \times 409}$$

oder auch

$$\frac{439 \times 409 + 433 \times 409 + 427 \times 409 + 421 \times 409 + \cdots}{439 \times 409}$$

$$- \frac{439 \times 409 + 433 \times 402 + 427 \times 395 + 421 \times 388 + \cdots}{439 \times 409},$$

oder wenn man beim ersten Bruche den dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktor weghebt,

$$\frac{439 + 433 + 427 + 421 + \cdots}{439}$$

$$- \frac{439 \times 409 + 433 \times 402 + 427 \times 395 + 421 \times 388 + \cdots}{439 \times 409}$$

woraus man unmittelbar sieht, daß die mittlere Ueberlebensdauer gleich ist der mittlern Lebensdauer weniger die mittlere Verbindungsdauer.

Es kann im ersten Augenblick auffallen, daß man für ein und dasselbe Paar von der mittleren Ueberlebensdauer einer jeden der beiden Personen über die andere spricht, da in der Wirklichkeit doch nur eine von beiden die andere überleben kann. Dieser Widerspruch verschwindet aber sofort, wenn man sich daran erinnert, daß alle hier entwickelten Zahlenverknüpfungen, wie schon ihr Name andeutet: mittlere Lebensdauer, mittlere Verbindungs-, mittlere Ueberlebensdauer, — nur Durchschnittszahlen für eine größere Menge von Personen oder Paaren sein sollen. Denkt man sich z. B., wie in Tab. 28 geschehen, 10000 solcher Paare, so hat es bei jeder beliebigen Altersverbindung gar nichts Auffallendes, daß theils die Männer die Frauen, theils die Frauen die Männer überleben werden und kann man daher sehr wohl sagen, aus jenen 10000 Ehepaaren werden Wittwer hervorgehen, welche überhaupt im Wittwerstande so und so viele Jahre, und Wittwen, welche in diesem Stande überhaupt so und so viele Jahre leben werden; kann auch der größeren Einfachheit wegen und um sich von jeder Anfangszahl loszumachen, sagen, bei einer Verbindung der und der Alter wird jeder Wittwer noch durchschnittlich die und die, so wie jede Wittwe noch durchschnittlich die und die Anzahl von Jahren leben.

Die mittlere Ueberlebensdauer ist eine Differenz, deren Minuendus für jedes Alter bekannt, deren Subtrahendus man aber nur für die Alters-

unterschiede von 5 zu 5 Jahren zu berechnen pflegt. Will man demnach für dazwischen liegende Altersunterschiede interpoliren, so hätte man eigentlich die Einschaltung nur in Bezug auf den Subtrahendus oder die mittlere Verbindungsdauer vorzunehmen und das Resultat von der bekannten mittlern Lebensdauer zu subtrahiren. Man kann jedoch die Interpolation, wenn man nicht ganz genaue Resultate zu haben wünscht, auch unmittelbar an den Ueberlebensdauern vornehmen, falls man diese letzteren so zusammenstellt, daß die gleichen mittleren Lebensdauern neben einander zu stehen kommen würden, d. h. also, falls man die Ueberlebensdauern nach den gleichen Altern der überlebenden Personen neben einander stellt. Solches ist in Tab. III geschehen, wonach sich von selbst die etwas sonderbar scheinende Anordnung ergab. In den Hauptcolonnen sind zuvörderst alle in Tab. II verzeichneten mittleren Verbindungsdauern von den mittleren Lebensdauern der am Rande stehenden betreffenden Alter der überlebenden Personen subtrahirt und die Differenzen je nach den gleichen Altern neben einander gestellt, woraus sich von selbst ergab, daß die zu überlebenden Alter wachsen oder abnehmen, je nachdem sie höher oder niedriger als die überlebenden Alter sind. In den Nebencolonnen sind die Differenzen in Bezug auf das nachfolgende, um fünf Jahr höhere oder niedrigere Alter angegeben und sind beim Einschalten die Resultate aus den mit + überschriebenen Differenzen zu addiren, die Resultate aber aus den mit — überschriebenen Differenzen zu subtrahiren. So findet man z. B.

$$\left|{}^{59}_{67}\right| = 5.64 + 6 \times 0.084 = 6.14$$

$$\text{und } \left|{}^{67}_{59}\right| = 3.14 - 6 \times 0.062 = 2.77.$$

Diese Resultate stimmen nun genau genug mit denjenigen überein, welche man durch die Interpolation nach den Verbindungsdauern erhalten würde, indem natürlich hierbei von einem so geordneten Fortschreiten der Differenzen, wie sie sich bei reinen Zahlenverbindungen, z. B. in einer Logarithmentabelle ergeben, Abstand genommen werden muß. Die mittlere Lebensdauer einer neunundfunfzigjährigen Person ist nach Tab. I: 13.05, die einer siebenundsechzigjährigen Person 9.63 und die Verbindungsrente beider Personen fanden wir 6.86; hiernach wäre also

$$\left|{}^{59}_{67}\right| = 13.05 - 6.86 = 5.19 \text{ (statt 5.14)}$$

$$\text{und } \left|{}^{67}_{59}\right| = 9.63 - 6.86 = 2.77 \text{ (genau).}$$

Aus den aufgestellten Begriffen von der mittlern Verbindungs- und der mittlern Lebensdauer erhält man mit Berücksichtigung der durch (5) und (6) bezeichneten Beispiele analog den Seite 30 aufgeführten Satz: *Ist ein Verein verbundener Paare aus einem jährlich gleichmäßigen Zutritte hervorgegangen, so erhält man die Anzahl der vorhandenen*

Paare oder die Anzahl der Ueberlebenden im Beharrungszustande, wenn man die mittlere Verbindungsdauer oder die mittlere Ueberlebensdauer für die Eintrittsalter mit dem Produkte aus den entsprechenden Tabellenzahlen der Lebenden multiplicirt. Hieraus folgt alsdann weiter, daß bei einem solchen Vereine im Beharrungszustande das Verhältniß der Ueberlebenden zu den bestehenden Paaren dem Verhältniß der mittlern Ueberlebensdauer zu dem der mittlern Verbindungsdauer gleich ist.

Die Colonnen c und d der Tab. 33 vertreten für die mittleren Verbinbindungsdauern genau die Stelle der Colonnen a und c Tab. I für die mittlere Lebensdauer. Der Raumersparung wegen pflegt man indessen jene Colonnen, so wie die damit verwandten Colonnen f, g, h, Tab. 25, nicht abdrucken zu lassen. Der Praktiker indessen, der viel mit Wittwenkassen beschäftigt ist, wird gut thun, sich alle diese Colonnen, so wie ihre Summen und die Summen dieser Summen nach den zu Grunde zu legenden Mortalitäts-Tabellen ein für allemal zu berechnen, weil er sich dadurch vielerlei andere Rechnungen theils ganz erspaart, theils sehr verkürzt. Vermittelst der zuletzt genannten Summen der Summen der verschiedenartigen Produkte ist man z. B. im Stande, die mittlere Lebensdauer oder das mittlere Lebensalter der Männer und Frauen noch bestehender Verbindungen, der Wittwer und Wittwen halb abgestorbener Verbindungen, unter der Voraussetzung eines gleichmäßigen jährlichen Beitritts, für jedes beliebige Geschäftsjahr zu berechnen, ganz auf dieselbe Weise, wie ich solches vorher beim einfachen Leben ausführlich auseinandergesetzt habe, hier aber übergehe, weil sich wirklich nichts Neues hinzusetzen ließe und überdies die betreffenden Zahlen für die Beispiele fehlen. Die gänzliche Uebereinstimmung der Begriffe und Rechnungsmethoden für ein einfaches Leben und für die Verbindung zweier Leben, die in der Folge immer mehr hervortreten wird, hat übrigens gar nichts Ueberraschendes, da es sich überall nur darum handelt, den jedesmaligen Bestand und den jedesmaligen Abgang oder Zugang auszumitteln und es alsdann ganz gleichgültig ist, woher sich derselbe schreibe.

Nachdem wir auf diese Weise wiederum kennen gelernt haben, die Zustände, welche bei der Verbindung zweier Leben auftreten, als mittlere zu behandeln, kehren wir zu der leitenden Idee dieses Abschnittes, der Ermittelung des jedesmaligen Bedarfs, zurück.

In Beziehung auf die jährliche Verpflegung der Ueberlebenden sind in Tab. 32 Col. a die stehenden Ehen, Col. b und c aber die Ueberlebenden aufgeführt; dividirt man demnach die letzteren Zahlen durch die ersteren, so erhält man

Tabelle 34.

Geschäftsjahr:	Jährlicher Bedarf der Wittwer.	Jährlicher Bedarf der Wittwen.	Geschäftsjahr:	Jährlicher Bedarf der Wittwer.	Jährlicher Bedarf der Wittwen.
	a	b		a	b
1	0.013	0.017	34	0.288	0.373
2	020	025	35	296	390
3	027	034	36	303	402
4	034	043	37	310	413
5	041	052	38	317	424
6	048	061	39	323	435
7	056	070	40	329	445
8	064	079	41	334	455
9	072	088	42	339	464
10	080	098	43	344	472
11	088	107	44	348	480
12	096	117	45	352	487
13	105	127	46	355	493
14	113	137	47	358	499
15	121	148	48	360	505
16	130	158	49	363	509
17	138	169	50	364	514
18	147	180	51	366	517
19	156	192	52	368	520
20	164	204	53	369	523
21	173	216	54	370	526
22	182	228	55	370	527
23	191	241	56	371	529
24	201	252	57	372	532
25	210	264	58	372	533
26	219	277	59	372	533
27	228	289	60	372	534
28	237	302	61	372	535
29	246	315	62	372	535
30	255	327	63	372	535
31	264	340	64	372	535
32	272	353	65	372	535
33	280	366	66	372	535

aus welcher man sieht, daß der jährliche Bedarf für die Fünfunddreißigjährigen nach dem Ableben der Dreißigjährigen von 0.013 bis 0.372, also bis zum Neunundzwanzigfachen, und der jährliche Bedarf für die Dreißigjährigen nach dem Ableben der Fünfunddreißigjährigen von 0.017 bis 0.535, also bis zum Einunddreißigfachen steigt.

Der letztere Bedarf 0.535 zeigt an, daß unter den angegebenen Bedingungen auf zwei stehende Ehen etwa eine Wittwe kommt, und in der That lehrt die Erfahrung, daß sich bei den seit längerer Zeit bestehenden Wittwenkassen dieses Verhältniß herauszustellen pflegt, so daß das gewählte Paar, bei welchem der Mann fünfunddreißig, die Frau dreißig Jahr alt ist, in seinem Alter ungefähr mit dem durchschnittlichen Aufnahmealter der Eheleute, welche einer Wittwenkasse beizutreten pflegen, übereinstimmt.

Wäre der Altersunterschied noch größer als fünf Jahre oder wären auch nur beide Personen älter, so würden im Beharrungszustande noch mehr Wittwen im Verhältniß zu den stehenden Ehen, der jährliche Bedarf also noch größer sein. Dieser Bedarf kann nach dem Satze, der kurz vorher, Seite 95, mitgetheilt wurde, durch das Verhältniß der mittlern Ueberlebensdauer zu der mittlern Verbindungsdauer dargestellt werden und läßt sich also, eben so wie der Bedarf des ersten Jahres, leicht berechnen, wie solches zur Vergleichung in nachfolgender Tabelle ausgeführt ist.

Tabelle 35.

Alter der zu überlebenden Person.	Die überlebende Person ist jünger, Jahre:						Die überlebende Person ist älter, Jahre:				
	25	20	15	10	5	0	5	10	15	20	25
						0.0101	0.0101	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
20						0.405	0.350	0.301	0.257	0.217	0.183
						40.1	34.7	30.1	25.7	21.7	18.3
					0.0106	0.0106	0.0107	0.0105	0.0105	0.0106	0.0104
25					0.486	0.420	0.360	0.307	0.259	0.217	0.181
					45.8	39.6	33.6	29.2	24.7	20.5	17.4
				0.0135	0.0135	0.0135	0.0134	0.0134	0.0134	0.0133	0.0132
30				0.590	0.510	0.437	0.372	0.314	0.263	0.219	0.180
				43.7	37.8	32.4	27.7	23.4	19.6	16.5	13.6
			0.0169	0.0169	0.0169	0.0168	0.0167	0.0169	0.0166	0.0165	0.0164
35			0.711	0.623	0.535	0.456	0.385	0.322	0.266	0.220	0.179
			42.1	36.9	31.7	27.1	23.1	19.1	16.0	13.3	10.9
		0.0185	0.0185	0.0185	0.0184	0.0184	0.0183	0.0181	0.0181	0.0179	
40		0.869	0.756	0.651	0.555	0.467	0.390	0.322	0.263	0.213	
		47.0	40.9	35.2	30.2	25.4	21.3	17.8	14.5	11.9	
	0.0204	0.0204	0.0204	0.0203	0.0202	0.0202	0.0200	0.0199	0.0198		
45	1.079	0.943	0.816	0.699	0.590	0.492	0.407	0.332	0.268		
	52.4	46.2	40.0	34.4	29.2	24.3	20.3	16.7	13.3		
	0.0297	0.0296	0.0295	0.0294	0.0294	0.0291	0.0290	0.0290			
50	1.184	1.030	0.886	0.753	0.631	0.521	0.427	0.344			
	39.7	34.8	30.0	25.6	21.5	17.9	14.7	11.8			
	0.0348	0.0347	0.0346	0.0346	0.0342	0.0340	0.0338				
55	1.287	1.113	0.948	0.796	0.660	0.540	0.435				
	37.0	32.1	27.4	23.0	19.3	15.9	12.9				
	0.0421	0.0421	0.0419	0.0416	0.0413	0.0410					
60	1.438	1.234	1.040	0.866	0.712	0.575					
	34.2	29.3	24.8	20.8	17.2	14.0					

In dieser Tabelle giebt bei jeder Altersverbindung die Zahl der ersten Reihe den geringsten oder ersten jährlichen Bedarf, die der zweiten Reihe den Bedarf im Beharrungszustande und die in der dritten Reihe das gegenseitige

Verhältniß beider Beträge. Man sieht daraus, daß der Bedarf im Beharrungszustande im Allgemeinen zunimmt, wenn das Alter der zu überlebenden oder der versichernden Person zu- und das Alter der versicherten Person abnimmt, und daß von der erstern Regel nur in einem viel höheren Alter der letzteren Personen Ausnahmen stattfinden. Innerhalb der Tabelle ist der geringste Bedarf 0.179, und der höchste 1.438, also etwa das resp. $\frac{1}{5}$ Fache und $1\frac{1}{2}$ Fache der versicherten jährlichen Pension. Was dagegen das Verhältniß des Bedarfs im Beharrungszustande zum erstjährigen Bedarf, also die Größe der Steigerung des Bedarfs während der Dauer des Geschäfts betrifft, so ist dieselbe zwar um so größer, desto geringer das Alter der versicherten gegen das der versichernden Person ist, nimmt aber bei gleichen Altersunterschieden mit dem vorgerückten Beitrittsalter ab. Innerhalb der Tabelle ist das geringste Steigerungsverhältniß 1 : 10.9 und das höchste 1 : 45.8, also noch viel höher, als bei einer Sterbekasse, und mehr als hoch genug, um Ehepaare vom Zutritt zu einer Wittwenkasse, welche die Beiträge nach dem jeweiligen Bedarf erheben wollte, abzuschrecken.

Wir gehen jetzt zur sofortigen Abfindung der neu entstandenen Ueberlebenden und ganz aussterbenden Verbindungen über und betrachten zunächst den Fall, wo das Abfindungsquantum für jeden fällig gewordenen Anspruch dasselbe, also 1 ist. Die Menge der zahlenden Verbindungen, so wie den Gesammtbedarf für die auf einander folgenden Geschäftsjahre erhält man natürlich, wenn man die Zahlen der Col. a—d Tab. 29 von oben herunter successive addirt, und den repartirten Bedarf für die einzelne Verbindung, also den jeweiligen Bedarf, wenn man die letzteren Summen durch die Anzahl der noch vorhandenen Verbindungen dividirt, welche Rechnungen in

Tabelle 36.

Geschäftsjahr:	Anzahl der vorhandenen Verbindungen.	neu entstehenden Wittwer.	neu entstehenden Wittwen.	aussterbenden Paare.	Jährlicher Abfindungs-Bedarf für die Wittwer.	Wittwen.	aussterbenden Paare.
	a	b	c	d	e	f	g
1	179551	2412	3031	42	0.0134	0.0169	0.00023
2	353617	4782	6020	84	135	170	24
3	522282	7110	8967	126	136	172	24
4	685630	9396	11872	168	137	173	24
5	843745	11640	14735	210	138	175	25
6	996711	14209	17549	259	143	176	26
7	1144245	16729	20314	308	146	178	27
8	1286445	19200	23030	357	149	179	28
9	1423409	21622	25697	406	152	181	29
10	1555235	23995	28315	455	154	182	29
11	1682021	26319	30884	504	156	184	30
12	1803865	28587	33764	560	158	187	31
13	1920505	30799	36588	616	160	191	32
14	2032053	32955	39356	672	162	194	33
15	2138621	35055	42068	728	164	197	34
16	2240321	37092	45056	791	166	201	35
17	2336933	39348	47972	863	169	205	37
18	2428301	41532	50816	935	171	209	39
19	2514569	43644	53588	1007	174	213	40
20	2595881	45684	56288	1079	176	217	42
21	2672381	47898	58907	1160	180	220	43
22	2743967	50031	61445	1241	182	224	45
23	2810801	52083	63902	1322	185	227	47
24	2873045	54054	66278	1403	188	231	49
25	2930861	55944	68573	1484	191	234	51
26	2984411	57753	70787	1565	194	237	52
27	3033857	59481	72920	1646	196	240	54
28	3079361	61119	75200	1736	198	244	56
29	3120857	62667	77390	1826	201	248	58
30	3158525	64125	79490	1916	203	252	61
31	3192545	65493	81500	2006	205	255	63
32	3223097	66771	83420	2096	0.0207	0.0259	0.00065

Geschäftsjahr.	Anzahl der				Jährlicher Abfindungs-Bedarf für die		
	vorhandenen Verbindungen.	neu entstehenden Wittwer.	neu entstehenden Wittwen.	aussterbenden Paare.	Wittwer.	Wittwer.	aussterbenden Paare.
	a	b	c	d	e	f	g
33	3250361	68091	85240	2196	0.0209	0.0262	0.00068
34	3274385	69311	86960	2296	212	266	70
35	3295369	70431	88580	2396	214	269	73
36	3313513	71461	89948	2486	216	271	75
37	3329169	72401	91226	2576	217	274	77
38	3342517	73251	92414	2666	219	276	80
39	3353737	74021	93390	2746	221	278	82
40	3363131	74711	94286	2826	222	280	84
41	3370859	75269	95007	2889	223	282	86
42	3377245	75764	95665	2952	224	283	87
43	3382415	76205	96175	3006	225	284	89
44	3386580	76549	96637	3054	226	285	90
45	3389891	76845	97051	3102	227	286	92
46	3392444	77069	97361	3137	227	287	93
47	3394428	77265	97581	3165	227	288	93
48	3395968	77409	97777	3189	228	288	94
49	3397144	77529	97949	3213	228	288	95
50	3398004	77631	98060	3231	228	289	95
51	3398633	77701	98156	3246	229	289	96
52	3399081	77749	98212	3254	229	290	96
53	3399417	77789	98260	3262	229	290	96
54	3399657	77821	98300	3270	229	290	96
55	3399817	77839	98334	3276	229	290	96
56	3399919	77854	98348	3279	229	290	97
57	3399989	77862	98360	3281	229	290	97
58	3400037	77868	98370	3283	229	290	97
59	3400067	77872	98378	3285	229	290	97
60	3400083	77874	98384	3287	229	290	97
61	3400083	77874	98384	3288	0.0229	0.0290	0.00097

ausgeführt sind. Wie man sieht, steigt der Bedarf für die Wittwer von 0.0134 auf 0.0229, also auf das 1.7 Fache, der für die Wittwen von 0.0169 auf 0.0290, gleichfalls auf das 1.7 Fache und der für die ausgestorbenen Paare von 0.00023 auf 0.00094, auf das 3.1 Fache, so daß die ersteren Steigerungen für das vorliegende Beispiel gering genug ausfallen.

Um den Gegenstand allgemeiner aufzufassen, bemerke man, daß z. B. die jährliche Zahl der neu entstehenden Wittwer im Beharrungszustande ist:

$$402 \times 6 + 395 \times 6 + 388 \times 6 + 381 \times 6 + 374 \times 6 + 367 \times 7 + \cdots$$

wo die ersten Faktoren die zurückgebliebenen Männer, die zweiten die sterbenden Frauen bedeuten. Für diesen Ausdruck kann man aber auch schreiben:

$$402 \times (439 - 433) + 395 \times (433 - 427) + 388 \times (427 - 421) + 381 \times (421 - 415)$$
$$+ 374 \times (415 - 409) + 367 \times (409 - 402) + \cdots$$

oder was dasselbe ist:

$$402 \times 439 + 395 \times 433 + 388 \times 427 + 381 \times 421 + \cdots$$
$$- 402 \times 433 - 395 \times 427 - 388 \times 421 - 381 \times 415 - \cdots$$

d. h.

$$402 \times 439 \times [36,30] - 402 \times 433 \times [36,31],$$

während die Anzahl der bestehenden Verbindungen durch $409 \times 439 \times [35,30]$ ausgedrückt wird. Hieraus ergiebt sich folgende Regel: Soll man für eine gegebene Verbindung bei jährlich unveränderlichem Beitritt und einer und derselben Abfindung für neu entstehende Ueberlebende den repartirten Bedarf im Beharrungszustande berechnen, so subtrahire man von der Zahl der vorhandenen Verbindungen im Beharrungszustande für ein Paar, bei welchem der Ueberlebende um ein Jahr älter wäre, die entsprechende Zahl für das Paar, bei welchem beide verbundene Personen um ein Jahr älter wären und dividire die Differenz durch die gleiche Zahl für das gegebene Paar.

Entnimmt man die Werthe für die in den vorhergehenden Beispielen vorkommenden Verbindungen theils direkt, theils durch Interpolation aus Tab. II, so ist

$$409 \times 439 \times [35,30] = 409 \times 439 \times 18.94 = 3400696$$
$$402 \times 433 \times [36,31] = 402 \times 433 \times 18.50 = 3220221$$
$$402 \times 439 \times [36,30] = 402 \times 439 \times 18.69 = 3298374$$
$$409 \times 433 \times [35,31] = 409 \times 433 \times 18.72 = 3315256.$$

Demnach würden im Beharrungszustande neu entstehen:

Wittwer: $3298374 - 3220221 = 78153$

Wittwen: $3315256 - 3220221 = 95035.$

Diese Zahlen weichen freilich von den in Tab. 36 Col. b und c berechneten Endresultaten nicht unbedeutend ab, indeß ist dieser Umstand dermalen noch unvermeidlich. Die Verbindungsdauern sind nämlich nur auf zwei Decimalen berechnet und werden resp. mit den Produkten

$$409 \times 439,\ 402 \times 433,\ 402 \times 439,\ 409 \times 433$$

multiplicirt, so daß der Fehler um 0.01 in den Verbindungsdauern schon einen Fehler von mehr als 1600 Ganzen ergiebt. Nun sind zwar die Fehler in den Verbindungsdauern, soweit dieselben Tab. II unmittelbar verzeichnet stehen, kleiner als 0.005, dagegen können die Fehler der durch Interpolation gefundenen Verbindungsrenten mehrere Einheiten der zweiten Decimale betragen, wodurch die wesentlichen Abweichungen in den Endprodukten entstehen. Um diesem Mangel zu entgehen, hätte man nach höheren Differenzen zu interpoliren. Da dieses aber zu weitläuftig ist, unterläßt man es um so eher, weil die Endresultate nur wenig von einander abweichen. Man erhält nämlich im gewählten Beispiele als Beitrag im Beharrungszustande

für die Wittwer $\frac{78153}{3400696} = 0.0230$ statt 0.0229

für die Wittwen $\frac{95035}{3400696} = 0.0279$ statt 0.0290.

Demnach fände man das Verhältniß des Anwachsens der Beiträge

für die Wittwer $\frac{0.0230}{0.0134} = 1.72$ statt 1.71 und das

für die Wittwen $\frac{0.0279}{0.0168} = 1.66$ statt 1.73,

welche Resultate für den vorliegenden Fall genau genug sind.

Auf die eben besprochene Weise ist nun die

Tabelle 37.

Alter der zu überlebenden Person.	Die überlebende Person ist jünger, Jahre:						Die überlebende Person ist älter, Jahre:				
	25	20	15	10	5	0	5	10	15	20	25
						0.0101	0.0101	0.0100	0.0101	0.0100	0.0100
20						0.0201	0.0190	0.0178	0.0169	0.0159	0.0143
						1.99	1.88	1.78	1.67	1.59	1.43
					0.0156	0.0106	0.0106	0.0105	0.0105	0.0105	0.0104
25					0.0220	0.0208	0.0196	0.0182	0.0172	0.0161	0.0153
					2.08	1.96	1.85	1.73	1.64	1.53	1.47
				0.0135	0.0135	0.0135	0.0134	0.0134	0.0134	0.0133	0.0132
30				0.0261	0.0252	0.0239	0.0230	0.0207	0.0197	0.0190	0.0173
				1.93	1.87	1.77	1.72	1.54	1.47	1.43	1.31
			0.0169	0.0170	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168	0.0166	0.0165	0.0164
35			0.0304	0.0300	0.0279	0.0280	0.0264	0.0252	0.0232	0.0215	0.0202
			1.80	1.77	1.66	1.67	1.57	1.50	1.40	1.30	1.23
		0.0185	0.0185	0.0185	0.0184	0.0184	0.0183	0.0182	0.0181	0.0179	
40		0.0358	0.0358	0.0331	0.0314	0.0297	0.0279	0.0265	0.0248	0.0228	
		1.93	1.93	1.79	1.71	1.62	1.52	1.46	1.37	1.27	
	0.0204	0.0204	0.0204	0.0203	0.0203	0.0202	0.0200	0.0199	0.0198		
45	0.0424	0.0424	0.0401	0.0383	0.0368	0.0340	0.0319	0.0303	0.0277		
	2.08	2.08	1.97	1.89	1.81	1.68	1.59	1.52	1.40		
	0.0297	0.0296	0.0295	0.0295	0.0294	0.0291	0.0290	0.0289			
50	0.0509	0.0487	0.0472	0.0449	0.0452	0.0434	0.0408	0.0378			
	1.72	1.64	1.60	1.52	1.54	1.49	1.41	1.31			
	0.0348	0.0347	0.0346	0·0346	0.0342	0.0340	0.0342				
55	0.0593	0.0576	0.0558	0.0551	0.0507	0.0477	0.0456				
	1.70	1.66	1.61	1.59	1.49	1.40	1.33				
	0.0420	0.0420	0.0420	0.0416	0.0432	0.0410					
60	0.0710	0.0689	0.0689	0.0649	0.0606	0.0584					
	1.69	1.64	1.64	1.56	1.40	1.42					

hergestellt worden, aus welcher die Verhältnisse des Wachsens der Beiträge, bei sofortiger Befriedigung durch einen unveränderlichen Betrag, vom ersten

Jahre bis zu dem des Beharrungszustandes für die verschiedenen Altersverbindungen entnommen werden können.

In Bezug auf die Abfindung ganz ausgestorbener Ehepaare ist zu bemerken, daß bei dem vorausgesetzten Paare von resp. fünfunddreißig und dreißig Jahr und dem jährlich gleichmäßigen Zutritt von 409×439 Paaren, die Anzahl der jährlich ganz aussterbenden Verbindungen im Beharrungszustande

$$7 \times 6 + 7 \times 6 + 7 \times 6 + 7 \times 6 + 7 \times 6 + 7 \times 7 + \cdots$$

ist. Schreibt man dafür

$$(409-402)\times(439-433)+(402-395)\times(433-427)+(395-388)\times(427-421) \\ +(388-381)\times(421-415)+\cdots$$

und multiplicirt wirklich, so erhält man

$$\begin{aligned} &409 \times 439 + 402 \times 433 + 395 \times 427 + 388 \times 421 + \cdots \\ &+ 402 \times 433 + 395 \times 427 + 388 \times 421 + 381 \times 415 + \cdots \\ &- 409 \times 433 - 402 \times 427 - 395 \times 421 - 388 \times 415 - \cdots \\ &- 402 \times 439 - 395 \times 433 - 388 \times 427 - 381 \times 421 - \cdots \end{aligned}$$

woraus man sieht, daß die betreffende Anzahl nach der Formel

$$409 \times 439 \times [35,30] + 402 \times 433 \times [36,31] - 409 \times 433 \times [35,31] \\ - 402 \times 439 \times [36,30]$$

zu finden ist, d. h.

Um bei einem jährlich gleichmäßigen Zutritt von Ehepaaren die jährliche Anzahl ganz aussterbender Paare im Beharrungszustande zu finden, addire man die Zahlen der vorhandenen Paare im Beharrungszustande für das gegebene Paar und für ein Paar, wo beide verbundene Personen um ein Jahr älter sind und subtrahire von der Summe die Summe der betreffenden Zahlen für diejenigen Paare, wo je eine der beiden verbundenen Personen um ein Jahr älter, die andere aber im gegebenen Aufnahmealter geblieben ist.

Von vorstehender Regel läßt sich jedoch bei dem angegebenen Interpolationsverfahren kein Gebrauch machen. Da nämlich, wie schon aus Tab. 36 zu ersehen, die in Rede stehende Zahl verhältnißmäßig immer nur klein ist, so können die aus der Interpolation entspringenden Fehler möglicherweise größer als die Zahl selbst sein. So würden wir für das vorliegende Paar nach der frühern Rechnung

$$\frac{\begin{Bmatrix} 3400696 \\ 3220221 \end{Bmatrix}}{6620917} - \frac{\begin{Bmatrix} 3298374 \\ 3315256 \end{Bmatrix}}{6613630} = 7287$$

erhalten, während die Tabelle nur 3288 ergiebt.

Zum Glück ist die direkte Berechnung unter Beihülfe eines Laufzettels

sehr einfach, da keine Zahl der Sterbenden größer ist als 10, und findet man die Resultate in

Tabelle 38.

Lebensalter der einen Person.	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 0	5	10	15	20	25
20	3707					
25	3584	3585				
30	3437	3440	3369			
35	3257	3288	3219	3068		
40	3012	3078	3030	2903	2703	
45	2767	2833	2820	2714	2538	2361
50	2462	2560	2547	2480	2327	2166
55	2057	2209	2232	2165	2057	1923
60	1652	1804	1881	1850	1742	1653

Vermittelst dieser Tabelle läßt sich das Steigerungsverhältniß des Bedarfs vom ersten Jahre bis zum Beharrungszustande sehr leicht direkt berechnen, ohne den erstjährigen Bedarf hinzuzuziehen. Für das gewählte Beispiel ist der Bedarf im Beharrungszustande $\frac{3288}{409 \times 439 \times [35,30]}$, der des ersten Jahres $\frac{7 \times 6}{409 \times 439}$, also das Verhältniß beider

$$\frac{3288}{409 \times 439 \times [35,30]} : \frac{7 \times 6}{409 \times 439} = \frac{3288}{7 \times 6 \times [35,30]}.$$

Man erhält also das Steigerungsverhältniß des Bedarfs zur Befriedigung der Ansprüche für ganz aussterbende Ehepaare, wenn man ihre mittlere Verbindungsdauer mit den erstjährigen Sterbenden beider verbundenen Personen multiplicirt und mit dem Resultate in die Anzahl der ganz aussterbenden Paare des Beharrungszustandes dividirt, welche Regel angewandt worden ist bei Berechnung der

Tabelle 39.

Lebensalter der einen Person.	Die andere Person ist jünger, Jahre: 0	5	10	15	20	25
20	5.87					
25	6.31	6.00				
30	4.72	5.38	5.02			
35	3.71	4.13	4.62	4.24		
40	3.90	3.76	4.10	4.51	4.06	
45	4.17	3.97	3.76	4.04	4.37	4.04
50	2.64	3.28	3.06	2.87	3.01	3.26
55	2.61	2.59	3.15	2.89	2.65	2.82
60	2.56	2.54	2.44	2.80	2.67	2.43

aus der das Steigerungsverhältniß für die verschiedenen Verbindungen zu ersehen ist.

Um die Abfindung der Ueberlebenden beim gleichmäßigen Zutritt neuer Verbindungen nach Verhältniß ihres Alters oder in der Art zu bestimmen, daß dieselben aus dem ihnen überwiesenen Kapitale durchschnittlich, so lange sie leben, jährlich den Betrag 1 entnehmen können, ist zu bemerken, daß die Menge der in jedem Jahre vorhandenen zahlenden Paare dieselbe ist, wie in Tab. 36, daß man dagegen den jedesjährigen Bedarf erhält, wenn man die Beträge Tab. 31 Col. b und c von oben herunter successive addirt. Dividirt man die erhaltenen Summen durch die Zahlen der vorhandenen Verbindungen, so erhält man den repartirten jährlichen Bedarf, wie solcher

Tabelle 40.

Geschäftsjahr:	Zahl der stehenden Ehen.	Jährlicher Bedarf für die Wittwer.	Jährlicher Bedarf für die Wittwen.	Jährlicher repartirter Bedarf für die Wittwer.	Jährlicher repartirter Bedarf für die Wittwen.
	a	b	c	d	e
1	179551	34051	45722	0.1896	0.2546
2	353617	67084	90274	1897	2553
3	522282	99099	133652	1897	2559
4	685630	130098	175851	1897	2565
5	843745	160082	216866	1897	2570

Geschäftsjahr:	Zahl der stehenden Ehen.	Jährlicher Bedarf für die		Jährlicher repartirter Bedarf für die	
		Wittwer.	Wittwen.	Wittwer.	Wittwen.
	a	b	c	d	e
6	996711	193881	256593	0.1945	0.2574
7	1144245	226499	295131	1987	2579
8	1286445	257938	332482	2005	2585
9	1423409	288200	368647	2025	2590
10	1555235	317286	403628	2040	2595
11	1682021	345199	437427	2052	2601
12	1803865	371858	474705	2061	2631
13	1920505	397355	510636	2069	2660
14	2032053	421699	545221	2075	2683
15	2138621	444899	578462	2080	2705
16	2240321	466891	614350	2084	2742
17	2336933	490749	648626	2100	2775
18	2428301	513352	681408	2114	2806
19	2514569	534721	712707	2127	2834
20	2595881	554879	742536	2138	2861
21	2672381	576221	770811	2156	2884
22	2743967	596254	797651	2173	2892
23	2810801	615007	823079	2184	2928
24	2873045	632507	847119	2201	2949
25	2930861	648787	869797	2214	2968
26	2984411	663878	891139	2225	2986
27	3033857	677813	911172	2234	3003
28	3079361	690557	932008	2242	3027
29	3120857	702222	951453	2250	3049
30	3158525	712855	969542	2257	3070
31	3192545	722503	986310	2263	3090
32	3223097	731216	1001793	2269	3105
33	3250361	739914	1015953	2276	3126
34	3274385	747688	1028915	2283	3142
35	3295369	754599	1040729	2290	3158
36	3313513	760760	1050377	2296	3170
37	3329169	766197	1059010	2301	3181
38	3342517	770940	1066918	2307	3192
39	3353737	775112	1073137	0.2311	0.3200

Geschäftsjahr:	Zahl der stehenden Ehen.	Jährlicher Bedarf für die		Jährlicher repartirter Bedarf für die	
		Wittwer.	Wittwen.	Wittwer.	Wittwen.
	a	b	c	d	e
40	3363131	778614	1078666	0.2315	0.3207
41	3370859	781436	1082985	2318	3213
42	3377245	783839	1086784	2321	3218
43	3382415	785908	1089630	2323	3222
44	3386580	787448	1092133	2325	3225
45	3389891	788722	1094294	2327	3228
46	3392444	789663	1095862	2328	3230
47	3394428	790457	1096930	2329	3232
48	3395968	791007	1097849	2329	3233
49	3397144	791443	1098619	2330	3234
50	3398004	791803	1099097	2330	3234
51	3398633	792036	1099500	2330	3235
52	3399081	792189	1099727	2331	3235
53	3399417	792304	1099910	2331	3235
54	3399657	792387	1100055	2331	3236
55	3399817	792430	1100175	2331	3236
56	3399919	792464	1100222	2331	3236
57	3399989	792479	1100260	2331	3236
58	3400037	792487	1100289	2331	3236
59	3400067	792491	1100310	2331	3236
60	3400083	792492	1100324	0.2331	0.3236

Col. d und e aufgeführt ist. Man sieht hieraus, daß dieser Bedarf für die fünfunddreißigjährigen Wittwer von 0.1896 auf 0.2331, also auf das 1.23 Fache, und für die dreißigjährigen Wittwen von 0.2546 auf 0.3236, also auf das 1.27 Fache steigt. Da sich der Gegenstand hier noch nicht allgemein auffassen läßt, so soll außer dem eben behandelten Mittelfalle noch der Grenzfall berechnet werden, in welchem beim Eintritt in den Verein die Männer sechzig und ihre Ehefrauen fünfunddreißig Jahr alt sind.

Tabelle 41.

Geschäftsjahr:	Vorhandene Paare.	Neu entstehende Wittwer.	Neu entstehende Wittwen.	Bedarf für die Wittwer.	Bedarf für die Wittwen.
	a	b	c	d	e
1	85890	.	.	.	.
2	80802	1407	3618	11737	51077
3	75840	1344	3555	10838	49549
4	70616	1274	3880	9912	53359
5	65532	1204	3810	9073	51665
6	60588	1134	3740	8270	49973
7	55784	1064	3670	7504	48284
8	51120	994	3600	6777	46597
9	46596	924	3530	6089	44913
10	42212	854	3460	5442	42231
11	37968	784	3390	5137	41552
12	34196	721	2988	4319	35888
13	30456	752	2916	4342	34276
14	26860	680	2844	3794	32782
15	23716	616	2464	3337	27822
16	20700	552	2400	2881	26515
17	18042	558	2037	2822	21992
18	15510	495	1974	2403	20875
19	13377	441	1638	2069	16952
20	11352	387	1584	1732	16027
21	9435	333	1530	1433	15119
22	7872	288	1230	1210	11856
23	6636	252	948	1021	8903
24	5472	216	912	825	8334
25	4380	180	876	654	7778
26	3570	153	630	540	5427
27	2814	126	603	418	5030
28	2304	108	384	345	3097
29	1820	100	364	288	2832
30	1376	80	344	207	2592
31	972	60	324	142	2363
32	760	50	152	114	1072

Geschäftsjahr:	Vorhandene Paare.	Neu entstehende		Bedarf für die	
		Wittwer.	Wittwen.	Wittwer.	Wittwen.
	a	b	c	d	e
33	568	40	142	74	968
34	396	30	132	42	870
35	244	20	122	19	777
36	112	10	112	5	691
37	0	0	103	0	617

enthält in den Spalten a, b und c resp. die Anzahl der vorhandenen Ehepaare, so wie der neu entstehenden Wittwer und Wittwen. Multiplicirt man wiederum die Zahlen der beiden letzten Colonnen mit den baaren Werthen der Leibrenten bei 4%, resp. vom sechzigsten und fünfunddreißigsten Jahre aufwärts, so erhält man Col. d und e den Bedarf in der Aussterbeperiode, der erforderlich ist, um für die neu entstandenen Wittwer oder Wittwen so viel aufzubringen, um davon jeder der überlebenden Personen im Durchschnitt lebenslänglich am Ende eines jeden Jahres den Betrag 1 gewähren zu können.

Addirt man die Colonnen a, d und e der vorhergehenden Tabelle, so erhält man die Anzahl der vorhandenen Ehepaare, so wie den Gesammtbedarf für die Wittwer und Wittwen vom ersten Geschäftsjahre bis zum Beharrungszustande, wie solcher verzeichnet steht in den Colonnen a, b, c der

Tabelle 42.

Geschäftsjahr:	Vorhandene Paare.	Gesammtbedarf für die neu entstehenden		Repartirter Bedarf für die neu entstehenden	
		Wittwer.	Wittwen.	Wittwer.	Wittwen.
	a	b	c	d	e
1	85890	11737	51077	0.1366	0.5947
2	166692	22575	100626	1354	6037
3	242532	32487	153985	1339	6349
4	313148	41560	205650	1327	6567
5	378680	49830	255623	1316	6750
6	439268	57334	303907	1305	6919
7	495052	64111	350504	1295	7080
8	546172	70200	395417	1285	7221
9	592768	75642	437648	1276	7383
10	634980	80779	479200	0.1272	0.7547

Geschäftsjahr:	Vorhandene Paare.	Gesammtbedarf für die neu entstehenden		Repartirter Bedarf für die neu entstehenden	
		Wittwer.	Wittwen.	Wittwer.	Wittwen.
	a	b	c	d	e
11	672948	85098	515088	0.1265	0.7654
12	707144	89440	549364	1265	7769
13	737600	93234	582164	1264	7892
14	764400	96571	609968	1263	7979
15	788176	99452	636483	1262	8075
16	808876	102274	658475	1264	8142
17	826918	104677	679350	1266	8215
18	842428	106746	696302	1267	8266
19	855805	108478	712329	1267	8326
20	867157	109911	727448	1267	8389
21	876592	111121	739304	1268	8434
22	884464	112142	748207	1268	8459
23	891100	112967	756541	1268	8490
24	896572	113621	764319	1267	8525
25	900952	114161	769746	1267	8544
26	904522	114579	774776	1267	8566
27	907336	114942	777873	1267	8573
28	909640	115212	780705	1266	8583
29	911460	115419	783297	1266	8594
30	912836	115561	785660	1266	8606
31	913808	115675	786732	1266	8609
32	914568	115749	787700	1265	8612
33	915136	115791	788570	1265	8617
34	915532	115810	789347	1265	8622
35	915776	115815	790038	1264	8628
36	915888	115815	790665	0.1264	0.8633

und dividirt man endlich die Zahlen der beiden letzten Colonnen durch die der ersten, so liefern die Quotienten in den Colonnen d und e den repartirten Bedarf eines jeden Jahres während des genannten Zeitraums. Man ersieht daraus, daß der Bedarf der sechzigjährigen Personen nach ihrer Verwittwung von den fünfunddreißigjährigen eine fortwährende Tendenz zum Sinken hat, (die Steigerung vom sechzehnten bis dreiundzwanzigsten Jahre liegt mehr in der Mortalitäts-Tabelle, als in der Natur der Sache, ist überdies eine vorübergehende und erreicht der Bedarf nicht einmal die Höhe desselben im ersten

Jahre), während der Bedarf der fünfunddreißigjährigen Personen nach ihrer Verwittwung von den sechzigjährigen auch nur von 0.5947 auf 0.8633, demnach auf das 1.45 Fache steigt.

Es bleibt sonach nur noch die Aussterbeperiode zu untersuchen. Zu dem Ende subtrahire man die Zahlen der Colonnen a, b und c der vorhergehenden Tabelle von oben herunter successive von ihren Gesammtbeträgen, also resp. von

915888, 115815, 790655

wie solches in den Colonnen a, b, c der nachfolgenden geschehen.

Tabelle 43.

Jahr der Aussterbeperiode.	Zahlende Verbindungen.	Gesammtbedarf für die		Repartirter Bedarf für die	
		Wittwer.	Wittwen.	Wittwer.	Wittwen.
	a	b	c	d	e
1	915888	115815	790655	0.1264	0.8633
2	829998	104678	739578	1254	8923
3	749196	93240	690029	1245	9210
4	673356	83328	636670	1237	9455
5	602740	74255	585005	1232	9705
6	537208	65985	535032	1228	9960
7	476620	58481	486748	1227	1.0213
8	420836	51704	440151	1229	0459
9	369716	45615	395238	1234	0690
10	323120	40173	353007	1243	0925
11	280908	35036	311455	1247	1087
12	242940	30717	275567	1264	1343
13	208744	26375	241291	1264	1559
14	178288	22581	208509	1267	1695
15	151428	19244	180687	1271	1932
16	127712	16363	154172	1281	2072
17	107012	13541	133180	1265	2445
18	88970	11138	111305	1252	2511
19	73460	9069	94353	1234	2844
20	60083	7337	78326	1221	3036
21	48731	5904	63207	1212	2970
22	39296	4694	51351	1194	3068
23	31424	3673	42448	0.1169	1.3508

Jahr der Aussterbeperiode.	Zahlende Verbindungen.	Gesammtbedarf für die		Repartirter Bedarf für die	
		Wittwer.	Wittwen.	Wittwer.	Wittwen.
	a	b	c	d	e
24	24788	2848	34114	0.1149	1.3768
25	19316	2194	26336	1141	3635
26	14936	1654	20909	1107	4000
27	11366	1236	15879	1087	3971
28	8552	891	12782	1042	4946
29	6248	603	9950	0965	5925
30	4428	396	7358	0894	6617
31	3052	254	4995	0832	6637
32	2080	140	3923	0673	8861
33	1320	66	2955	0509	2.2386
34	752	24	2085	0349	2.7726
35	356	5	1308	0140	3.6741
36	112	0	617	0.0000	5.5089
37	0	0	0		

Dividirt man nun die Zahlen der Colonnen b und c durch die der Col. a, so geben die Quotienten in den Colonnen d und e den repartirten jährlichen Bedarf während der Aussterbeperiode an. Man sieht daraus, daß für die fünfunddreißigjährigen Ueberlebenden gegen die sechzigjährigen zu Ueberlebenden der Bedarf von 0.5949 auf 5.5809, also auf das 9.38 Fache steigt, während er nach der Tab. 36 und dem Schlusse der Tab. 28 sogar von 0.0169 auf 1.0000, also auf das 59.27 Fache steigen würde. Sollen daher, wie es bei Wittwen-Kassen gewöhnlich der Fall ist, jüngere Personen gegen das Ableben von älteren versichert werden, so kann auch bei dieser Art der Abfindung die Einzahlung der Beiträge nach dem Bedarf nicht eingeführt werden. Allenfalls würde sich ein solcher Verein halten, so lange er in der Blüthe ist, jedoch der Bankrutt alsbald hervortreten, wenn der Zugang neuer Mitglieder abnimmt und gar, wenn der Verein in die Aussterbeperiode eingetreten ist.

Betrachtet man dagegen den Bedarf für die sechzigjährigen Versicherten seitens der fünfunddreizigjährigen Versicherer, so sieht man, daß derselbe auch während der Aussterbeperiode im Allgemeinen sich verringert. Der Bedarf fünfunddreißigjähriger Versicherter von Seiten dreißigjähriger Versicherer würde dagegen schon während der ganzen Dauer des Geschäfts von 0.0134 auf 0.3333, d. i. auf das 24.88 Fache steigen. Aus dem allen ersieht man, daß es möglich ist, einen Versicherungsverein für Ueberlebende nach Aufbringung

des jeweiligen Bedarfs einzurichten, wenn nach jedem einzelnen Falle der Verwittwung gleich so viel aufgebracht wird, daß daraus der berechtigten Person lebenslänglich die festgesetzte Summe gezahlt werden kann und wenn die versicherten Personen viel älter sind als die Versicherer. Kinder könnten z. B. auf diese Weise für den Fall ihres Ablebens den Aeltern eine Pension versichern.

Ist der Verein ein geschlossener, so daß für jeden Fall des Ausscheidens ein neuer Versicherer eintritt, so wird der Bedarf wiederum zwischen den des gleichmäßigen Zutritts und den der Aussterbeperiode fallen, weil die Seite 56 gemachten Schlüsse hier eben so wohl anzuwenden sind als dort. Im Allgemeinen könnten die Bedingungen des Eintritts doppelter Art sein; entweder tritt ein neues Paar erst beim gänzlichen Ausscheiden eines frühern, oder schon beim Ausscheiden eines früheren Versicherers ein; im ersteren Falle würde man sich dem Aussterbebedarf ungleich mehr nähern als im letztern. Jene Art des Eintretens dürfte indeß in der Praxis nie vorkommen, während es bei Wittwen-Kassen für eine bestimmte Kategorie von Beamten in der Natur der Sache liegt, daß der neue Beamte, der an die Stelle eines verstorbenen getreten, der Kasse eine neue Ehefrau zuführt. Der Eintritt neuer Paare hängt somit von dem Wegsterben der Männer allein ab. Kommt es demnach darauf an, den Personalbestand eines solchen Vereins an Wittwern, Wittwen oder die Zahl ganz ausgestorbener Paare empirisch darzustellen, so hat die Sache keine eigentliche Schwierigkeit, wiewohl sie sehr weitläuftig werden kann. Zunächst wird man gut thun, die unveränderliche Zahl der Ehepaare auf eine runde Zahl zu bringen und danach die zur Darstellung vorzuführende Kategorie, z. B. die Wittwen der ursprünglichen Paare, zu bestimmen. Alsdann berechnet man das Aussterben der Männer oder, was dasselbe ist, den Eintritt neuer Paare für die aufeinander folgenden Jahre nach Art der Tab. 22 oder 23. Geht man von 10000 funfzigjährigen Männern aus, so treten nach Tab. 22

im 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten, 8ten, 9ten, 10ten Jahre
300, 309, 318, 327, 337, 347, 358, 368, 379 Paare

ein, von welchen man die betreffenden Wittwen Jahr für Jahr nach Anleitung der ersten Colonne berechnet und wobei sich die runde Anfangszahl als sehr zweckmäßig erweisen wird, weil man bei der Reduction nicht zu dividiren hat. Für die ersten neun Jahre ersieht man das Resultat für funfzigjährige Männer und fünfundvierzigjährige Frauen aus folgender

Tabelle 44.

Geschäftsjahr:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Wittwen überhaupt:
	Es treten neue Paare ein, im Jahre:									
Eintretende Paare	10000	300	309	318	327	337	347	358	368	
1	294	.	.	.	.	.	.	.	.	294
2	572	9	.	.	.	.	.	.	.	581
3	839	17	9	.	.	.	.	.	.	865
4	1090	25	18	9	.	.	.	.	.	1142
5	1327	33	26	18	9	.	.	.	.	1413
6	1545	40	34	26	19	10	.	.	.	1674
7	1747	46	41	35	27	19	10	.	.	1872
8	1933	52	48	42	36	28	20	11	.	2170
9	2103	58	54	49	43	37	29	20	11	2404

Auf dieselbe Weise würde man die Anzahl der vorhandenen Wittwer, Wittwen, der ganz ausgestorbenen Paare, so wie auch die der neu entstehenden Wittwer, Wittwen und der ganz aussterbenden Paare berechnen.

Bis jetzt ist vorausgesetzt worden, daß die Verpflegung des Ueberlebenden, falls dieselbe nicht in einer bloß einmaligen Abfindung in unveränderlichem Betrage bestand, eine lebenslängliche sein soll. Man kann aber auch annehmen, daß nur eine zeitweise Verpflegung gewährt werden solle, wie es z. B. alsdann der Fall ist, wenn der Vater oder die Mutter auf ihren Todesfall die nächste Zukunft ihrer Kinder durch jährlich zu beziehende Verpflegungsgelder sicher stellen wollen. Um für diesen Fall geeignete Resultate zu erhalten, setze ich das Alter der versichernden Person als funfzigjährig voraus, während die Kinder unmittelbar nach der Geburt oder mit dem zwölften Lebensjahre, also bei größter und geringster Sterblichkeit, eingekauft werden und die Verpflegungsgelder bis zum zurückgelegten zwanzigsten Lebensjahre gezahlt werden sollen. — Man hat hier offenbar eben so zu rechnen, als ob zur letztgenannten Zeit keine versicherte Person mehr vorhanden wäre.

Für die unmittelbar nach der Geburt eingekauften Kinder ergiebt sich alsdann folgende

Tabelle 45.

Geschäftsjahr:	Beim Aussterben.			Beim gleichmäßigen Zutritt.		
	Beitragende Mitglieder.	Zu unterstützende Kinder.	Bedarf.	Beitragende Mitglieder.	Zu unterstützende Kinder.	Bedarf.
	a	b	c	d	e	f
1	300000	6750	0.023	300000	6750	0.026
2	218250	11898	054	518250	18648	036
3	186402	16686	090	704652	35334	050
4	168714	21348	127	873366	56682	065
5	156552	26055	166	1029918	82737	080
6	147645	30618	207	1177563	113355	096
7	139482	35026	251	1317045	148381	113
8	131772	39384	299	1448817	187765	130
9	124716	43659	342	1573538	231424	147
10	118041	47880	406	1691574	279304	165
11	111720	52173	467	1803294	331477	184
12	105927	56484	533	1909221	387961	203
13	100416	61242	610	2009637	449203	223
14	94458	65820	697	2104095	515023	245
15	88580	70518	796	2192675	585541	267
16	82782	75036	906	2275457	660577	291
17	77064	79474	1.031	2352521	740051	315
18	71426	83832	1.173	2423947	823883	340
19	65868	88110	1.338	2489815	911993	366
20	60390	92308	1.528	2550205	1004301	394

Wie man sieht, steigt der Bedarf beim Aussterben von 0.023 auf 1.528, d. i. auf das 66.41 Fache und beim gleichmäßigen Beitritte immer noch von 0.023 auf 0.394 oder auf das 17.0 Fache.

Die im zwölften Jahre eingekauften Kinder liefern die

Tabelle 46.

Geschäftsjahr:	Beim Aussterben.			Beim gleichmäßigen Zutritt.		
	Beitragende Mitglieder.	Zu unterstützende Kinder.	Bedarf.	Beitragende Mitglieder.	Zu unterstützende Kinder.	Bedarf.
	a	b	c	d	e	f
1	156900	4671	0.030	156900	4671	0.050
2	151029	9270	065	307929	13941	045
3	145230	13797	095	453159	27738	061
4	139503	18252	124	592662	45990	078
5	133848	22635	167	726510	68625	094
6	128265	26946	210	854775	95511	112
7	122754	31185	254	977529	126756	130
8	117315	35352	301	1099844	162108	148
9	111948	39366	352	1206972	201474	167

bei welcher der Bedarf für die Aussterbeperiode von 0.030 auf 0.352, also auf das 11.7 Fache und beim gleichmäßigen Zutritt von 0.030 auf 0.167, demnach auf das 5.6 Fache steigt.

Der Bedarf im ersten Jahre ist in diesem Falle größer als im vorhergehenden, weil die Sterblichkeit der versicherten Kinder eine geringere ist; der Bedarf im letzten dagegen kleiner, weil die Sterblichkeit der Versicherer noch bei weitem nicht die Höhe erreicht hat wie früher. —

Bei einer einzelnen Person waren nur zwei Fälle möglich, — entweder Leben oder Tod. Als eine zweite Person mit der ersten in Verbindung gesetzt wurde, waren der möglichen Fälle schon vier, weil die zweite Person unter beiden Formen mit jeder der beiden Formen der ersten Person in Beziehung zu setzen war. Läßt man demnach zu einer Verbindung zweier Personen noch eine dritte hinzutreten, so wird man schon acht verschiedene Fälle erhalten, nämlich

alle drei Personen leben, eine Form;

zwei Personen leben, die dritte ist todt, drei Formen, weil jede Person die todte sein kann;

eine Person lebt, zwei sind todt, wiederum drei Formen, weil jede Person die lebende sein kann;

alle drei Personen sind todt, eine Form.

Vorstehendes gilt jedoch nur für die Fälle, wo die drei Personen ungleichen Alters sind oder wo man bei ihnen verschiedene Mortalitäts-Tabellen in Anwendung bringt. Stimmen dagegen zwei Personen in der Mortalität

überein, so liefert jeder der beiden mittelsten Fälle nur zwei Formen, so daß im Ganzen sechs, ist endlich bei allen drei Personen gleiche Sterblichkeit vorauszusetzen, so liefert jeder der beiden mittelsten Fälle nur eine einzige, so daß im Ganzen nur vier verschiedene Fälle möglich sind.

Geht man bei drei Personen von so vielen Verbindungen aus, als das Produkt aus den drei Faktoren der Lebenden eines jeden Alters (einer jeden Mortalitäts-Tabelle) ergiebt, so ist es sehr einfach, die Anzahl der Erscheinungen einer jeden Form zu jeder gegebenen Zeit zu berechnen, indem man das betreffende Produkt für die gegebene Form der beiden ersten Personen mit der der Form der dritten Person entsprechenden Zahl zu multipliciren hat, weil die Seite 66 und Seite 76 gemachten Schlüsse hier wörtlich wiederholt werden können. Eben so sieht man, daß es eine mittlere Verbindungsdauer aller drei Personen geben werde. Was dagegen die Ueberlebensdauer betrifft, so erscheinen dafür sogar zwei Hauptfälle in den vorher erwähnten Unterfällen; man kann nämlich von der mittlern Lebensdauer zweier Personen über die dritte und auch von der mittlern Lebensdauer einer Person über die beiden andern sprechen, welche beide man erhält, wenn man die entsprechenden Produkte vom ersten Jahre bis zum letzten addirt und die Summe durch die Anfangszahl der Verbindungen dividirt.

Die vorher aufgeführten acht Formen könnten nun zu einer sehr großen Menge der verschiedenartigsten Versicherungen Veranlassung geben; da dieselben indessen weit über das gegenwärtige praktische Bedürfniß hinausgehen, so werde ich nur eine Hauptart besprechen und daran gleichzeitig nachweisen, in wie viele Unterabtheilungen dieselbe zerfällt. Es soll nämlich untersucht werden, auf welche Weise zwei Personen auf ihren beiderseitigen Todesfall für eine dritte Person eine jährliche Pension versichern, wie solches wohl von Aeltern in Bezug auf ihre Kinder, wenigstens bis zu einem gewissen Lebensalter der letzteren, geschieht.

A. In Bezug auf die jährliche Beitragszahlung, von der wir nur allein handeln, kann vorausgesetzt werden

1) daß von beiden Aeltern bis zu ihrem oder des Kindes Ableben gezahlt werde;
2) daß solches vom Vater allein geschehe;
3) daß solches von der Mutter allein geschehe.

B. In Bezug auf die Pensionserhebung könnte man abmachen, daß dieselbe erfolgen solle

1) nach dem Tode des Vaters,
2) nach dem Tode der Mutter oder
3) erst nach dem Ableben beider Aeltern.

Da sich nun jeder Fall unter A mit jedem Falle unter B verbinden läßt, so erhält man schon für dieses einfache Geschäft neun Arten möglicher Versicherungen. Indessen gehören zwei davon nicht hierher, indem A 2 und B 1, so wie A 3 und B 2 sich nur auf die Verbindung zweier Personen, Vater und Kind ohne Mutter, oder Mutter und Kind ohne Vater, bezieht. Es bleiben demnach noch sieben verschiedene Arten übrig.

Setzen wir den Fall voraus, daß der Vater allein zahle, so lange er und das Kind leben, so wirkt das Leben der Mutter gar nicht direkt auf die Einzahlung ein; solches ist dagegen bei der Auszahlung betheiligt, falls die Pension erst nach dem Tode beider Aeltern gezahlt werden soll. Ist nun der Vater beim Antritt der Versicherung funfzig Jahr, das Kind so eben geboren (also nach Tab. 45) und die Mutter dreißig Jahr alt, so hat man von

$$300 \times 1000 \times 439$$

Personen auszugehen und demnach für die aufeinander folgenden Jahre resp.

$$300 \times 1000 \times 439$$
$$291 \times 750 \times 439$$
$$282 \times 661 \times 439$$
$$273 \times 618 \times 439$$
u. s. w.

Zahler, indem der Faktor für die Mutter unverändert bleibt und nur hinzuzusetzen ist, weil gegenwärtig nicht von 300 × 1000 Vätern und Kindern, sondern von 439 mal so viel ausgegangen wird. Dagegen werden für diesen Fall in den auf einander folgenden Jahren pensionsberechtigt resp.

$$9 \times 750 \times 6$$
$$18 \times 661 \times 12$$
$$27 \times 618 \times 18$$
$$36 \times 593 \times 24$$
u. s. w.

Kinder, wo sich die dritten Faktoren auf die gestorbenen Mütter beziehen, so daß die Zahlen Tab. 45, Col. b noch resp. mit 6, 12, 18, 24 u. s. w. zu multipliciren sind, wobei es für die Praxis jedoch nicht nöthig wäre, alle Ziffern dieser Produkte zu ermitteln, indem schon die richtigen fünf ersten Ziffern mehr als hinreichend wären. Bei der Division dieser letzteren Produkte durch die ersteren lassen sich mit Vortheil, da der Divisor 439 ein gemeinschaftlicher ist, vier- bis fünfstellige Logarithmen-Tafeln anwenden. In

Tabelle 47.

Geschäftsjahr:	Beim Aussterben.			Beim gleichmäßigen Zutritt.		
	Beitragende Mitglieder.	Zu unterstützende Kinder.	Bedarf.	Beitragende Mitglieder.	Zu unterstützende Kinder.	Bedarf.
	a	b	c	d	e	f
1	300000×439	40500	0.0003	300000×439	40500	0.0003
2	218250	142776	0015	518250	183276	008
3	186402	300348	0037	704652	483624	016
4	168714	512352	0069	873366	995976	026
5	156552	781650	0114	1028918	1777626	039
6	147645	1132866	0175	1177563	2910492	056
7	139482	1541144	0252	1317045	4451636	074
8	131772	2008584	0347	1448817	6460220	104
9	124716	2532222	0417	1573533	8992442	130
10	118041	3112200	0601	1691574	12104642	163
11	111720	3756456	0766	1803294	15861098	213
12	105927	4462236	0960	1909221	20323334	243
13	100416	5266812	1195	2009637	25590146	290
14	94458	6121260	1481	2104095	31711406	343
15	88580	7051800	1813	2192675	38763206	403
16	82782	8028852	2290	2275457	46792058	468
17	77064	9139510	2701	2352521	55931586	542
18	71426	10311336	3288	2423947	66242904	623
19	65868	11542410	3787	2489815	77785314	712
20	60390	12830812	0.4840	2550205	90616126	0.0809

ist das Geschäft Col. a, b und c ausgeführt, in Col. d sind die Zahlen der Col. a von oben herunter successive addirt, wobei der Faktor 439 als gemeinschaftlicher beibehalten werden konnte, ohne daß es nöthig gewesen wäre, denselben einzumultipliciren. Col. e enthält die entsprechenden Summen der Zahlen Col. b, und endlich Col. f die Quotienten der beiden vorhergehenden Colonnen. Wie man sieht, steigt der Bedarf beim Absterben von 0.0003 auf 0.4840, also auf das 1613 Fache, und beim gleichmäßigen Zutritt von 0.0003 auf 0.0809, d. i. auf das 270 Fache.

Wären zwölfjährige Kinder angenommen worden, so würde, aus schon angegebenen Gründen, der Bedarf im ersten Jahre größer, im letzten geringer geworden sein. Ueberhaupt aber wird, wenn die Ernährung einer

Person seitens eines Vereins von dem vorhergegangenen Absterben mehrerer anderer Personen abhängen soll, der jährliche Bedarf zwar um so geringer, die Steigerung desselben aber im Allgemeinen um so größer sein, desto mehr Personen vorher abzusterben haben.

Werfen wir einen Blick auf das bisher Vorgetragene zurück, so haben wir gefunden, daß bei Versicherungen der mannigfaltigsten Art, welche sich auf das Leben oder den Tod der Menschen beziehen, der auf die vorhandenen beitragenden Mitglieder vertheilte jährliche Bedarf der Art ist, daß er, mit Ausnahme zweier nur selten vorkommender Fälle, mit der Dauer des Geschäfts steigt. Stirbt demnach ein solcher Verein in sich selbst aus, so bleibt der Bedarf in ununterbrochenem Wachsen; treten dagegen von Termin zu Termin neue Mitglieder hinzu, so wird die Steigerung zwar nicht gänzlich aufgehoben, wohl aber gehemmt, weniger, wenn verhältnißmäßig eine geringere, mehr, wenn eine höhere Anzahl neuer Mitglieder erscheint. Ist der Zutritt solcher Mitglieder ein gleichmäßiger, so wird die Steigerung zu der Zeit, wo sämmtliche Mitglieder des ersten Geschäftsjahres ausscheiden, ihren vorläufig unveränderlichen höchsten Stand erreichen, welcher jedoch bereit ist, jederzeit dem so eben angegebenen durch die Zahl der neuen Mitglieder bedingten Impulse zu folgen. Treten endlich keine Mitglieder mehr in den Verein, so nimmt die Steigerung über das Maximum hinaus, bis zum Ausscheiden des letzten Mitgliedes, ununterbrochen zu.

Fordert daher ein solcher Verein den beitragenden Mitgliedern den jährlichen Bedarf ab, so werden die Beiträge der einzelnen Mitglieder denselben Gang wie der repartirte Bedarf inne halten; die ersten Mitglieder werden durchschnittlich zu wenig eingezahlt haben und die zurückgebliebenen gezwungen sein, den Ausfall zu decken, also unter allen Umständen viel mehr zu zahlen, als die Versicherung selbst werth ist. Das Unbillige, was in dieser Forderung liegt, wird vom Publikum über kurz oder lang empfunden werden und Niemand mehr dem Verein beitreten. Damit beginnt er denn in sich selbst auszusterben und sieht sich genöthigt, den noch vorhandenen Mitgliedern, also zumeist solchen, die bereits ein Bedeutendes hergegeben haben, immer größere und größere Lasten aufzuerlegen, so daß erst dieser und jener, dann mehrere und zuletzt sämmtliche noch zurückgebliebene Mitglieder sich bewogen fühlen, mit Aufgebung der erworbenen Ansprüche den Verein zu verlassen!

Der Fehler, den ein solcher Verein mit seiner getroffenen Einrichtung

gemacht hat, liegt offenbar darin, daß er unterlassen, dem Beispiel des unbemittelten Mannes zu folgen, zu Zeiten des Minderbedarfs etwas zu erspaaren, damit er im Stande sei, zu mäßigen Beiträgen der Mitglieder so viel zuzulegen, daß der erforderliche größere Bedarf gedeckt werden könne. Alles, was ein Verein den ersten Mitgliedern über den Bedarf abfordert, kommt den späteren zu Gute, ohne gerade dieselben dadurch besonders zu begünstigen.

Zwar bleibt bei dem am besten eingerichteten Versicherungsverein das Geschäft in so weit ein gewagtes und macht es eben das Wesen der Versicherung aus, daß, je nach dem Bedarf, der eine mehr zurückempfängt, als er hingegeben, während der andere contraktlich gehalten ist, mehr hinzugeben, als er zurückempfangen wird; aber der Uebelstand bei denjenigen Vereinen, die den Mitgliedern nur den jedesmaligen Bedarf abfordern, liegt eben darin, daß dieselben den zuerst abgehenden Mitgliedern, die überdies am wenigsten zahlen, so wenig wie irgend möglich abverlangen.

Ueberlegt man die Handlungsweise der Mitglieder eines solchen Vereins, denen es darum zu thun sein wird, unter den festgesetzten Umständen den versicherten Betrag herausgezahlt zu erhalten, so sieht man sich gezwungen zuzugeben, daß diese Mitglieder so handeln, wie man es im gewöhnlichen Leben als leichtsinnig zu bezeichnen pflegt. Sie geben ihr Geld hin und dulden es, daß dasselbe vollständig für die Bedürfnisse Anderer verausgabt wird, ohne auf Ansammlung eines Fonds bedacht zu sein, aus dem sie selbst ihrerzeit Befriedigung mit Sicherheit erwarten können; sie begnügen sich vielmehr mit der Anweisung auf den guten Willen ihrer Mitversicherer, den sie wenig, so wie auf den künftiger Versicherer, den sie gar nicht kennen. Hört dieser gute Wille auf, so können jene Mitglieder nichts empfangen.

Auch ein ganz vollkommen organisirter Verein kann sich durch andere als finanzielle Verhältnisse genöthigt sehen, das Geschäft einzustellen, aber ein solcher wird seine bisherigen Mitglieder nicht mit leeren Händen entlassen, sondern vielmehr im Stande sein, denselben so viel hinzugeben, daß es ihnen mit Einzahlung des Empfangenen und Fortzahlung der bedungenen Beiträge möglich wird, die Versicherung bei jedem andern Vereine gleicher Art fortzusetzen.

Die in Bezug auf die bloße Abforderung nach dem Bedarf gerügten Mängel werden zwar nicht allgemein eingesehen, indessen traten dieselben doch da zu augenfällig hervor, wo ein bereits wankend gewordener Verein solcher Art umgeformt oder im Umkreise eines solchen ein neuer Verein begründet werden sollte, so daß man nicht umhin konnte, diese oder jene mangelhafte Einrichtung zuzugeben. Anstatt aber dem in Rede stehenden Principe gänzlich zu entsagen, begnügte man sich damit, unzureichende Palliative einzuführen, welche weder das Hauptübel beseitigen, noch sonst der Billigkeit angemessen sind.

Zunächst sorgte man für einen Reservefonds, aus welchem die letzten Mitglieder ihre Befriedigung erhalten sollen. Gegen diese Einrichtung an und für sich ist um so weniger einzuwenden, da das bereits oben berührte Spaarsystem auf einen solchen Fonds hinweist. Fehlerhaft bleibt es aber immer, wenn man von Hause aus zu geringe Mittel dafür aussetzt: ein verhältnißmäßig geringes Antrittsgeld, die Zinsen und Zinseszinsen der eigenen Bestände und sonstige außerordentliche Einnahmen, die mehr dem Namen nach als in der Wirklichkeit aufzufinden sind.

Aber auch durch die bessere Dotirung des Reservefonds mittelst Erhöhung des Antrittsgeldes wird man den Ansprüchen der Billigkeit nur dann genügen, wenn man denselben gleich so hoch sein läßt, daß man sicher ist, aus demselben und den Zinsen seiner Bestände die künftigen Ansprüche ohne alle Einforderung irgend welcher Beiträge befriedigen zu können; denn bei jeder Abforderung nach dem ganzen oder theilweisen Bedarf werden immer die zuerst ausscheidenden Mitglieder über die Gebühr begünstigt werden. Die Ansprüche der Mitglieder an den Verein wachsen mit der Dauer der Mitgliedschaft; will man daher die Zahlungsfähigkeit der Theilnehmer nicht durch eine einmalige Zahlung allzu sehr anspannen, so bleibt es thunlich, den Reservefonds durch die Ueberschüsse der Einzahlungen über den jedesmaligen Bedarf und durch die Zinsen seiner eigenen Bestände nach und nach anwachsen zu lassen.

Fehlerhaft bleibt es ferner, wenn man die künftige Höhe dieses Reservefonds von Hause aus im Statute fixirt, bevor man noch weiß oder wissen kann, bis zu welcher Ausdehnung ein solcher Verein anwächst, während offenbar ein kleiner Verein weniger baare Bestände als ein größerer erfordert. Fehlerhaft bleibt es endlich, wenn in Bezug auf die künftige Verwendung dieses Fonds gar keine, unzureichende oder gar ganz willkührliche äußere Bestimmungen gemacht werden, wie z. B.: daß sich die letzten „so und so vielen" Mitglieder den Reservefonds zu theilen haben sollen. Die einzig richtige Verwendung eines solchen Reservefonds kann ferner nur die sein, zur Deckung des Bedarfs von der Zeit an mit herangezogen zu werden, wo es unbillig erscheint, die ganze Last den zahlenden Mitgliedern aufzuerlegen. Zu allen solchen Feststellungen gehört aber eine genaue Abwägung zwischen den Einnahmen und den Ausgaben, d. h. eine Vorausberechnung nach der Wahrscheinlichkeit zu erwartender Ereignisse, welche wiederum nur durch sorgfältige Erforschung vorausgegangener Ereignisse zu erreichen ist.

Eine andere Art der Speisung des Reservefonds aus den Beiträgen der Mitglieder ist die, daß man für jeden Fall eingetretener Anspruchsberechtigung einen ein für allemal festgesetzten Beitrag einfordert und dann den Ueberschuß der Gesammtbeiträge über die Ausgaben zum Reservefonds schlägt.

Die Erscheinungen, welche hierbei hervortreten, sind sehr interessant. Man denke sich zwei, drei oder mehrere Reihen einer und derselben Anzahl von Mitgliedern mit gleichen wahrscheinlichen Anspruchsqualitäten, so ist bei der vorausgesetzten Gleichartigkeit der Ansprüche kein Grund zu der Annahme vorhanden, daß die Ansprüche der einen Reihe anders ausfallen werden, als die der andern Reihe; die wahrscheinlichste Annahme, die zu machen, ist vielmehr die, daß die Ansprüche der Mitglieder in allen Reihen dieselben sein werden. Vereinigt man demnach jene Reihen, so werden sich bei doppelter, dreifacher, vierfacher Mitgliederzahl auch die Ansprüche verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen u. s. w. Zur Untersuchung der Einnahmen auf die oben angegebene Weise wählen wir ein bestimmtes Beispiel, welches indessen genügen wird, dem zu Sagenden Allgemeingültigkeit zu verschaffen. Von 300 funfzigjährigen Männern sterben jährlich 9, demnach ist die durchschnittliche Anzahl der Beitragenden, nach Seite 14, $294\frac{1}{2}$ und werden dem eben Gesagten zufolge von 600, 900, 1200 u. s. w. funfzigjährigen Männern jährlich 18, 27, 36 u. s. w. sterben und 589, $882\frac{1}{2}$, 1178 Beitragende liefern. Wird nun von jedem Mitgliede der jedesmalige Beitrag 1 gezahlt, so ist die jährliche Einnahme

bei	300	funfzigjährigen Männern	$9 \times 294\frac{1}{2}$	
„	600	„ „	18×589	$= 4 \times 9 \times 294\frac{1}{2}$
„	900	„ „	$27 \times 882\frac{1}{2}$	$= 9 \times 9 \times 294\frac{1}{2}$
„	1600	„ „	36×1179	$= 16 \times 9 \times 294\frac{1}{2}$
		u. s. w.		u. s. w.

Während die Mitgliederzahl zweimal, dreimal, viermal größer wird, vergrößert sich die Einnahme auf das $4 = 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$ Fache u. s. w. Da dies für jedes einzelne Jahr gilt, so lange keine neuen Mitglieder eintreten, so erhält man den Satz: Wenn sich eine Gesellschaft versicherter Personen von derselben Anspruchsqualität vergrößert oder verkleinert, so vergrößert oder verkleinert sich der Bedarf nach demselben Verhältniß. Wird bei jedem Falle der entstandenen Anspruchsberechtigung jedem Mitgliede ein unveränderlicher Beitrag abgefordert, so vergrößern oder verkleinern sich sowohl die Jahres-, als auch beim Aussterben des Vereins die Gesammt-Einnahmen nach dem mit sich selbst multiplicirten Verhältniß. Endlich ist das Verhältniß der Einnahmen zu den Ausgaben der ursprünglichen Mitgliederzahl proportional.

Hatte sich z. B. bei einem in sich selbst aussterbenden Vereine ergeben, daß bei obiger Art der Besteuerung die Einnahmen 3000 Thlr., die Ausgaben aber 12000 Thlr. betrugen, so würden bei gleichem Steuersatze und

doppelter Mitgliederzahl die Einnahmen		12000 Thlr.,	die Ausgaben		24000 Thlr.	
dreifacher	=	=	= 27000	=	=	= 36000 =
vierfacher	=	=	= 48000	=	=	= 48000 =

betragen, im letzten Falle also das richtige Verhältniß zwischen Einnahmen und Ausgaben hergestellt sein.

Wären bei einem andern in sich selbst aussterbenden Vereine von 374 Personen 8609 Thlr. eingenommen und 10250 Thlr. auszugeben gewesen, so hätte sich das Gleichgewicht hergestellt, wenn ursprünglich

$$\frac{374 \times 10250}{8609} = 445$$

Personen im Vereine gewesen wären. In der That betragen alsdann

die Einnahmen $8609 \times \frac{445}{374} \times \frac{445}{374}$ Thlr. = 12188 Thlr.

die Ausgaben $10250 \times \frac{445}{374}$ = 12196 Thlr.,

wo nun beide Summen einander so nahe gerückt sind, daß bei ursprünglich 446 Personen schon ein Ueberschuß, nämlich 12243 Thlr. Einnahmen gegen 12223 Thlr. Ausgaben, hervortreten würde.

Faßt man alles Gesagte zusammen, so ergiebt sich daraus: *Werden in einem Vereine bei jeder eingetretenen Anspruchsberechtigung von den Mitgliedern ein für allemal festgesetzte Beiträge eingefordert, so kann dem Bedürfnisse mit jedem noch so kleinen jedesmaligen Beitrage Genüge geleistet werden, so bald nur der Verein Mitglieder genug zählt.*

So sonderbar dieser Satz anfänglich erscheinen mag, so leicht ist derselbe erklärt. Zählt nämlich ein Verein Mitglieder genug, so wird auch in jedem beliebigen Zeitabschnitte eine hinreichende Menge anspruchsberechtigter Fälle vorkommen und werden demnach die Mitglieder bei jeder Einsammlung zwar nur einen sehr geringen Betrag, diesen dafür aber auch desto häufiger zu entrichten haben.

Tritt erstens zu der angegebenen Bestimmung noch die Festsetzung hinzu, daß alle aus den Collekten hervorgehende Ueberschüsse, sobald der Betrag einer Versicherung sich ein oder zweimal in der Kasse vorfindet, zur Auszahlung der fällig werdenden Summen benutzt und dafür Collekten ausgelassen werden sollen, so kommt man wiederum auf die Einziehung der Beiträge nach dem Bedarf zurück.

Abgesehen zweitens davon, daß jene Art der Beitragszahlung den Bemittelten wie den Armen zuletzt lästiger werden, den Verein auch zur Aufwendung von mehr Verwaltungskosten nöthigen wird, als jede andere in bestimmt festgesetzten Terminen, so behält sie auch den großen theoretischen Fehler, daß die zuerst abgehenden Mitglieder über die Gebühr begünstigt werden. Um dies einzusehen, setze man z. B. eine Sterbekasse mit 332 sechsundvierzigjäh-

rigen Mitgliedern voraus. Davon sterben nach Süßmilch jährlich 8, welche im Laufe des Jahres, Seite 13, $\frac{7 \times 8}{2}$ sind 28 Beiträge, eingezahlt haben werden. Läßt man dagegen vierteljährliche Vorausbezahlungen leisten, welche mit demselben Jahresbeitrage in gleichem Verhältnisse stehend, gleich 2 anzusetzen wären, so würden die im Laufe eines Jahres verstorbenen Mitglieder, weil vorauszusetzen, daß vierteljährlich zwei sterben, $2 \times (8 + 6 + 4 + 2)$ d. h. 40, also zwölf Beiträge **mehr** eingezahlt haben. Das Gleiche wiederholt sich von Jahr zu Jahr, so lange jedesmal 8 Mitglieder sterben, und vergrößert oder verringert sich, je nachdem in einem Jahre mehr oder weniger Mitglieder mit Tode abgehen. Stürben z. B. jährlich 12 Mitglieder, so würden dieselben bei der Einsammlung nach Sterbefällen im Laufe des Sterbejahres $\frac{11 \times 12}{2}$ d. h. 66 Beiträge eingezahlt haben, bei vierteljährlicher Vorausbezahlung aber $3 \times (12 + 9 + 6 + 3) = 90$, demnach 24 mehr. Bei halbjährlicher oder gar jährlicher Vorausbezahlung wäre der Unterschied noch größer, bei monatlicher oder wöchentlicher dagegen geringer. Man sieht also: **Läßt ein Verein die Beiträge erst nach jedem Falle der Anspruchsberechtigung einziehen, so zahlen die im Laufe eines Jahres ausscheidenden Mitglieder gegen die Pränumerandozahlung um desto weniger, je größer die Wahrscheinlichkeit des Anspruchs bereits geworden und aus je mehr Mitgliedern der Verein besteht.**

Eine zweite, in ihren Folgen noch nachtheiliger wirkende Mangelhaftigkeit entspringt aus der in Rede stehenden Art der Einkassirung der Beiträge daraus, daß sich nur selten vorausbestimmen läßt, aus wie vielen Mitgliedern der Verein jedesmal bestehen werde, man demnach auch nicht im Stande ist, die richtige, d. h. ausreichende und doch nicht überflüssige Höhe des jedesmaligen Beitrages zu bestimmen. Man hat da, wo dieser Fehler eingesehen wurde, denselben auf mannigfache Weise zu beseitigen gesucht. Die Erfahrung hatte gelehrt, daß die Möglichkeit vorhanden war, den Mitgliedern bei großer Frequenz im Laufe einer gewissen Zeit viel zu viel, bei geringerer viel zu wenig abgefordert zu haben; deshalb tarifirte man zunächst die Höhe des jedesmaligen Beitrags nach der größern oder geringern Mitgliederzahl. Im Principe war man dabei allerdings in seinem Rechte; denn welcher Beitrag auch der richtige sein mag, so kann man, sobald die Anzahl der Mitglieder am Anfange eines Jahres und nach der Erfahrung der im Laufe desselben etwa zu erwartende Zugang bekannt ist, mit derselben Wahrscheinlichkeit jenen richtigen Beitrag auf die zu erwartenden Fälle der Anspruchsberechtigung repartiren, vermittelst welcher man zu der Ueberzeugung von der durchschnittlichen Richtigkeit des Beitrags überhaupt gelangt. So verfährt man jedoch nicht. In der Regel setzt man nach Gutdünken eine zu erwartende Mitgliederzahl voraus und bestimmt danach den einzelnen Beitrag dergestalt, daß bei einer einmaligen Collekte der versicherte

Betrag oder auch mehr oder weniger darüber zusammen gebracht wird und läßt nun diesen Beitrag nach demselben Maßstabe fallen oder steigen, je nachdem sich die Mitgliederzahl von 50 zu 50 oder von 100 zu 100 vermehrt oder vermindert. Daß hierdurch der Anforderung an einen richtig berechneten Reservefonds nicht Genüge geleistet werden kann, folgt schon daraus, daß die Anspruchsberechtigung von 50 oder 100 Mitgliedern zu verschiedenen Zeiten eine ganz verschiedene ist, ja sogar, daß jede zeitweilige Verminderung der Sterbefälle dem Vereine schadet, indem er nun die Zinsen der etwaigen Ueberschüsse mehr oder weniger lange einbüßt. Mir wurde eine Kasse bekannt, welche die ursprünglich festgesetzte Probezeit nur aus dem Grunde aufhob, um mehr Gelegenheit zum Collektiren und Ansammeln der daraus hervorgehenden Ueberschüsse zu gewinnen.

An andern Orten bestimmt man geradezu, daß die Mitgliederzahl immer unveränderlich sein, oder wenigstens eine bestimmte Höhe nicht übersteigen solle, indem man die sich etwa darüber hinaus Meldenden einstweilen als Anwarter notirt. Allerdings läßt sich alsdann danach für die ganze Dauer des Geschäfts ein unveränderlicher Beitrag, der bei jedem einzelnen Todesfalle zu erheben wäre, mit ziemlicher Sicherheit berechnen. Allein es ist denn doch nicht abzusehen, weshalb ein solcher Besteuerungsmodus dem viel sicherern einer terminlichen Beitragszahlung vorzuziehen sein solle. Ueberdies, wer steht dem Vereine dafür, daß er immer die festgesetzte Zahl von Mitgliedern haben werde? während jeder Ausfall an Mitgliedern einen Ausfall in der Einnahme hervorbringt.

Um sich gegen eine solche Verminderung der Mitgliederzahl zu sichern, verpflichtet man jedes Mitglied, vor dem Empfange der fällig gewordenen Versicherungssumme einen Nachfolger zu stellen, widrigenfalls ihm ein bestimmter Abzug gemacht wird. Allein diese Festsetzung wird es wohl nur selten bewirken, daß einem Vereine, der einmal in den Augen des Publikums als unsolide dasteht, noch eine oder die andere Person betritt, zumal, da sie sich sehr leicht umgehen läßt. Ist nämlich der Abzug wirklich so erheblich, daß er ein Mitglied bewegen kann, ernstlich um einen Nachfolger bemüht zu sein, so wird es im Falle des Mißlingens die erste beste Person herbeiführen und das Antrittsgeld, so wie den ersten oder die beiden ersten Beiträge zahlen, ohne daß es nachher in der Gewalt des Vereins steht, den Remplaçant festzuhalten. Andererseits ist auch keinesweges zu billigen, bei einem Vereine Einrichtungen zu treffen, die es nothwendig erscheinen lassen, dem größeren Bedürfnisse des Publikums Schranken entgegen zu setzen. Glaubt man einen Verein zu begründen, der, bei aller Rücksicht auf eigenen Gewinn, der Allgemeinheit nützlich sein werde, so ist es auch zugleich erforderlich, daß man den freiwilligen Eintritt in denselben so sehr wie möglich erleichtere. Selbst für die Sicherheit und Wohlfeilheit der Verwaltung wird dadurch am besten gesorgt, indem diese ver-

hältnißmäßig um so weniger kostet, das Risico aber, dem ein jeder Versicherungsverein unterworfen bleibt, verhältnißmäßig um so geringer wird, desto mehr Mitglieder der Verein zählt.

Eine fernere Einrichtung ist die, daß man, um die letzten, so wie die später eintretenden Mitglieder nicht allzusehr zu übertheuern, festsetzt, jedes Mitglied, das im Ganzen so viel an Beiträgen gezahlt hat, wie der Versicherungsbetrag ausmacht, solle mit Beibehaltung seiner vollen Ansprüche von ferneren Zahlungen entbunden und als ausgezahltes oder sogenanntes Ehrenmitglied betrachtet werden. Daß auch einer derartigen Festsetzung, richtig durchgeführt, theoretisch nichts im Wege steht, ist leicht nachzuweisen. Man denke sich z. B., 300 funfzigjährige Personen wollten auf ihren Tod einen gewissen Betrag versichern und zahlten die ganze Summe sofort aus. Stürben nun auch diese Mitglieder unmittelbar nach der Einzahlung, so wäre der Verein, abgesehen von den Verwaltungskosten, dennoch im Stande, die festgesetzten Auszahlungen zu leisten. Nun sterben aber jene 300 Personen nicht unmittelbar nach dem Abschlusse des Geschäfts, eine jede von ihnen bleibt vielmehr noch kürzere oder längere Zeit am Leben, während welcher der Verein das eingezahlte Geld zinsbar benutzt, und dieser Zinsertrag ist es eben einzig und allein, welchen der Verein seinen Mitgliedern zu Gute rechnen kann, insofern er es möglich macht, auch gegen eine Einzahlung, die geringer ist, als das versicherte Kapital, zur gehörigen Zeit die Zahlungen zu leisten, da die gewonnenen Zinsen die geringere Einzahlung auf den festgesetzten Betrag bringen können. Wollten nun jene 300 Personen auch dieses geringere Kapital nicht auf einmal, sondern in zwei Raten, die eine sofort, die andre nach Jahresfrist einzahlen, so wird sich der Verein genöthigt sehen, jede dieser beiden Raten etwas höher anzusetzen, als die Hälfte der einmaligen Zahlung, indem ihm für die zweite Rate nicht allein die Zinsen des ersten Jahres verloren gehen, sondern er auch zu erwarten hat, daß von den 300 Personen im Laufe des ersten Jahres 9 sterben, er also am Anfange des zweiten Jahres nur auf 291 Raten rechnen könne. Daß sich der Betrag dieser Raten, sobald die Größe jener einmaligen Einzahlung bekannt ist, leicht bestimmen lasse, ist ersichtlich. Man hat die Rate nämlich so groß zu nehmen, daß der 300fache Betrag der Rate mit den Zinsen des ersten Jahres zu dem 291fachen der Rate addirt, gleich sei dem 300fachen der einmaligen Einzahlung mit ihren Jahreszinsen. Wollen die 300 Versicherer die Zahlung in drei aufeinander folgenden Jahren leisten, so ist nicht allein mehr als das Drittel der einmaligen Zahlung, sondern auch mehr als zwei Drittel der zweimaligen Zahlung zu fordern, weil der Verein auch für das zweite Jahr Einbuße erleidet. So sieht man, wie sich die Repartition über eine immer größere Anzahl von Jahren ausdehnen und zugleich so einrichten läßt, daß mit der Einzahlung der vollen versicherten

Summe jede weitere Zahlungsverbindlichkeit aufhören kann. Von dergleichen Rechnungen pflegt man aber keinen Gebrauch zu machen, sondern fordert nur eben so viel, oder wenig mehr, als das jedesmalige Bedürfniß erheischt. Stirbt der Verein aus, so versteht es sich nach allem früher Gesagten von selbst, daß das Verfahren unhaltbar ist. Man erwartet aber stets den bessern Erfolg von dem Hinzutritt neuer Mitglieder. Wie ein solcher Versuch ausfällt, hat zwar die Erfahrung aller Orte gelehrt, kann indeß erst nach Erörterung einer andern Einrichtung zum vollen Bewußtsein gebracht werden. Nach Verlauf mehrerer Jahre pflegt nämlich ein solcher Verein mehr Ehrenmitglieder als Beitragszahler zu haben, so daß er seine Zahlungen einzustellen gezwungen ist und auch die Ehrenmitglieder unbefriedigt bleiben. Hierdurch gewitzigt, haben neuere Unternehmer festgestellt, daß das versicherte Begräbnißgeld unmittelbar nach eingetretener Ehrenmitgliedschaft eingesammelt und hier dem Mitgliede sofort ausgezahlt, dort bis zum wirklich erfolgten Tode bei einer Spaarkasse sicher angelegt und nur die Zinsen im Interesse des Vereins verwendet werden sollen.

Die Folgen dieser Bestimmung können klar dargelegt und sollen an einem Beispiele gezeigt werden, das von mir keineswegs ersonnen, sondern, wie überhaupt jede hier zur Sprache gebrachte Einrichtung, aus mehr als einem Statute entnommen ist.

Man bestimme, daß für jedes verstorbene sogleich ein neues zahlendes Mitglied eintrete, daß bei jeder Collekte überhaupt das versicherte Sterbegeld eingefordert werde, daß die Ehrenmitgliedschaft eintrete, wenn das Mitglied successive den Betrag des versicherten Sterbegeldes eingezahlt hat und letzteres sofort von den übrigen Mitgliedern im Wege der Einkassirung aufgebracht werden solle. Setzt man nun 300 funfzigjährige Mitglieder voraus und nimmt man an, daß nach jedem Todesfalle sofort ein neues Mitglied eintrete, so ergiebt sich die Anzahl der jährlich eintretenden nach Tab. 22, oder vielmehr nach Tab. 23, welche eben für den Zweck solcher Berechnungen, wie die gegenwärtige, entworfen worden ist. Diese Neueingetretenen stehen in nachfolgender

Tabelle 48.

Geschäftsjahr:	Statistik der gezahlten Beiträge bei einer Sterbekasse von 300 funfzigjährigen Personen, für den Fall, daß für jedes verstorbene sogleich ein neues Mitglied eintritt, vom ersten Geschäftsjahre bis zur Auszahlung der ältesten Mitglieder.								Es werden bei der Auszahlung der ersten Mitgieder erforderlich, Beiträge:		
	Von den ursprünglichen Mitgliedern leben:	Verstorbene resp. neu eingetretene Mitglieder am Anfange der Jahre.	Beiträge sind überhaupt gezahlt am Anfange der Jahre.	Lebende neuere Mitglieder bei der Auszahlung.	Die neueren Mitglieder haben Beiträge gezahlt		Die neueren Mitglieder haben noch Beiträge zu zahlen im Mittel		Ohne Berücksichtigung der einzuzahlenden Beiträge.	Nach Abzug der eingezahlten Beiträge.	Beiträge für die Ansprüche der neueren sich ausgezahlt habenden Mitglieder.
					mindestens.	im Mittel.	das einzelne Mitglied.	sämmtliche Mitglieder.			
	a	b	c	d	e	f	g	h	a′	b′	c′
1	300								25670	25661	900
2	291	9	9	3	293	297	3	9	26561	26525	900
3	282	10	19	3	283	288	12	36	27425	27337	1200
4	273	10	29	4	273	278	22	88	28537	28409	1200
5	264	10	39	4	263	268	32	128	29609	29399	1500
6	255	10	49	5	253	258	42	210	30899	30639	1500
7	246	11	60	5	242	248	52	260	32139	31755	1800
8	237	11	71	6	231	236	64	384	33555	33111	1800
9	228	11	82	6	220	226	74	444	34911	34395	1800
10	219	11	93	6	209	214	86	516	36195	35523	2100
11	210	11	104	7	198	204	96	672	37623	36759	2400
12	201	12	116	8	186	192	108	864	39159	38070	2700
13	192	13	129	9	173	179	121	1089	40770	39573	2700
14	182	13	142	9	160	167	133	1197	42273	40803	3000
15	172	14	156	10	146	153	147	1470	43803	42032	3300
16	162	14	170	11	132	139	161	1771	45332	43044	3900
17	152	16	186	13	116	124	176	2288	46944	44448	3900
18	142	16	202	13	100	108	192	2496	48348	45436	4200
19	132	16	218	14	84	92	208	2912	49636	46500	4200
20	122	16	234	14	68	76	224	3136	50700	47100	4500
21	112	16	250	15	52	60	240	3600	51600	47239	5100
22	103	18	268	17	34	43	257	4369	52331	47931	4800
23	94	17	285	16	17	25	275	4400	52731	47784	5100
24	85	17	302	17	0	9	291	4947	52884		
				215							
	300										

verzeichnet und addirt man dieselben von oben herunter, so erhält man die Anzahl der seit Begründung des Vereins überhaupt stattgehabten Collekten, aus welcher sich ergiebt, daß am Anfange des vierundzwanzigsten Geschäftsjahres 302 mal kassirt und die von den ursprünglichen Mitgliedern noch zurückgebliebenen 85 zur Ehrenmitgliedschaft gelangt sind. Gleichzeitig ersieht man aus diesen Zahlen, daß von den später eingetretenen Personen bereits 87 gestorben sein müssen, und ist es sehr leicht zu bestimmen, wie viele von den in jedem einzelnen Jahre eingetretenen Mitgliedern noch am Leben sind, indem man nach der Mortalitäts-Tabelle

$$300 : 94 = 9 : x_1 = 3$$
$$300 : 103 = 10 : x_2 = 3$$
$$300 : 112 = 10 : x_3 = 4$$
$$300 : 122 = 10 : x_4 = 4$$
u. s. w.

erhält, welche Zurückgebliebene Col. d verzeichnet stehen. Um zu ermitteln, wie viele Beiträge diese Mitglieder bereits eingezahlt haben, bedenke man, daß am Anfange des vierundzwanzigsten Geschäftsjahres überhaupt 302 und am Anfange des zweiten Jahres 9 Beiträge eingesammelt waren, so daß die am Anfange des zweiten Jahres eingetretnen Mitglieder 302 — 9 = 293 Beiträge eingezahlt, ebenso die am Anfange des dritten Jahres eingetretnen 302 — 19 = 283, die am Anfange des vierten Jahres eingetretnen 302 — 29 = 273 u. s. w., Col. e. Dies sind indessen erst die geringsten Angaben über die geleisteten Beiträge, indem die für den Anfang des zweiten Jahres verzeichneten neuen Mitglieder, da, der gemachten Annahme nach, jedes sofort an die Stelle eines verstorbenen ursprünglichen Mitgliedes getreten ist, der wirkliche Eintritt so wie die Beitragszahlung eigentlich schon im Laufe des ersten Jahres stattfand, so daß auf die eingetretenen 9 Mitglieder im ersten Jahre schon resp. 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, zusammen $\frac{9 \times 10}{2} = 45$, durchschnittlich also 5 Beiträge mehr kommen. Da sich dasselbe für jedes Jahr wiederholt, so hat man diese um $\frac{1}{2}$ vergrößerten Hälften der in jedem Jahre eingetretenen Mitglieder noch zu den Zahlen Col. e zu addiren, um für die Zurückgebliebenen die mittlere Zahl der geleisteten Beiträge zu erhalten. Solches ist zu Gunsten der Kasse mit Weglassung des Bruches $\frac{1}{2}$, Col. f, geschehen, und subtrahirt man diese Zahlen von 300, so erhält man die von den zurückgebliebenen der in den verschiedenen Geschäftsjahren eingetretenen Mitglieder bis zur Erlangung der Ehrenmitgliedschaft noch durchschnittlich zu zahlenden Beiträge, Col. g, die Gesammtzahl dieser Beiträge für alle noch vorhandene Mitglieder eines jeden Jahrganges aber in Col. h. — Für die im dreiundzwanzigsten Geschäftsjahre zuerst entstehenden 85 Ehrenmitglieder ist nun nach der gemachten Bestimmung

der 85 Fache Betrag des Sterbegeldes mit 25500 Beiträgen einzukassiren; außerdem aber hätten die Ehrenmitglieder schon je 302 Beiträge statt 300 gezahlt, so daß noch auf jedes Mitglied 2, zusammen 170 Beiträge zurückzurechnen sind und es also um die sofortige Aufbringung von 25670 Beiträgen zu thun ist, Col. a'. Es steht zwar sehr zu bezweifeln, daß nun sofort 85 Personen vorhanden sein werden, die überhaupt, namentlich aber bei der gegenwärtigen Sachlage, geneigt sein möchten, dem Vereine beizutreten. Da indessen die Möglichkeit nicht zu bestreiten ist, soll auch dieses zugegeben werden und hätte alsdann jedes Mitglied 85 Beiträge einzuzahlen. Nun haben aber die 3 aus dem zweiten Geschäftsjahre noch vorhandenen Mitglieder überhaupt nur noch 9 Beiträge zu zahlen, Col. h, so daß auf die übrigen 25661 Beiträge, Col. b', kämen. Indessen sind die genannten 3 Mitglieder durch ihre letzte Einzahlung zur Ehrenmitgliedschaft gelangt und beanspruchen für sich 900 Beiträge, weswegen die übrigen Mitglieder in der That noch 26561 Beiträge zu decken haben, Col. a'. Zieht man auf diese Weise nach und nach die Mitglieder eines jeden Jahrganges heran, Col. b', c', a', so findet sich, daß die später eingetretenen Mitglieder fast den ganzen Betrag der Versicherung mit einemmale zu decken haben und dennoch für die am Anfange des vierundzwanzigsten Geschäftsjahres vorhandenen Mitglieder, (ausschließlich der soeben eingetretenen 85), 52884 Beiträge oder das 176 Fache des versicherten Sterbegeldes fehlt. Ließe man auch noch inmitten aller dieser Collekten für jedes beitragsfrei gewordene Mitglied ein neues eintreten, so wäre natürlich der Erfolg ganz derselbe. Jedes Mitglied brächte zwar 300 Beiträge mit, verlangte aber eben so viele zurück.

Kehren wir jetzt zu dem früher unerledigt gebliebenen Falle zurück und setzen voraus, daß zwar die 85 ältesten Mitglieder zur Befreiung von der Beitragszahlung gelangen, indessen für sie der Bedarf nur nach wirklich eingetretenem Todesfalle eingesammelt werden soll, so hat zwar der Verein viel eher Aussicht, sich durch den Hinzutritt neuer Mitglieder wiederum auf den Normalbestand von 300 Einzahlern zu bringen, indessen ist das berechnete Deficit gleichwohl vorhanden und wird dem Vereine damit nur bis zum successiven Absterben jener 85 Ehrenmitglieder Indult gegeben.

Hätte man die Mitglieder bei jeder Kassirung mehr als zum Gesammtbetrage eines Sterbegeldes einzahlen lassen, so würde der Verein zwar Kapitalien angesammelt haben, indeß kämen dieselben ihm nur zum Theil zu Gute, nämlich von den Mitgliedern, die vor Erlangung der Ehrenmitgliedschaft verstorben sind, von denen er also andrerseits den Schaden hat, auch die Befreiung von der Beitragszahlung um so früher eintritt. Hätte z. B. der Verein, Tabelle 48, bei jeder Einkassirung statt des Beitrages 1 den Beitrag $1\frac{1}{4}$ eingefordert, so würde die Ehrenmitgliedschaft schon nach dem 240sten Todesfalle im

Laufe des zwanzigsten Geschäftsjahres, bei dem Beitrage $1\frac{1}{2}$ nach dem 200sten Todesfalle im Laufe des siebzehnten, bei dem Beitrage $1\frac{3}{4}$ nach dem 172sten Todesfalle im Laufe des sechzehnten Geschäftsjahres und bei dem Beitrage 2 nach dem 150sten Todesfalle im Laufe des vierzehnten Geschäftsjahres eintreten. Alle Personen, welche eintreten, nachdem die ältesten Mitglieder von der Zahlung der Beiträge befreit sind, zahlen sich nun immer schneller aus, indem je mehr und mehr Mitglieder beitragsfrei werden und bei ihrem Tode zu collektiren sein wird. Man geräth hier, wie bei der oben erwähnten Aufhebung der Probezeit, wiederum dahin, daß das, was den einzelnen Mitgliedern größere Verluste verursacht, dem Vereine selbst zum Vortheile gereicht, und umgekehrt. Ganz eben so ist es mit den aus den Ueberschüssen zu gewinnenden Zinsen und Zinseszinsen, die zwar dem Vereine ganz zufallen, indessen um so weniger betragen werden, desto langsamer die Mitglieder absterben.

Es ließe sich einwenden, daß das hohe Alter, oder vielmehr die bereits vorgeschrittene größere Sterblichkeit der zu Grunde gelegten funfzigjährigen Vereinsmitglieder an dem entwickelten Ausgange der Sache Schuld sei, indeß ist dieses nur zum kleinsten Theile der Fall. Bei keinem Vereine, mögen auch die Mitglieder in der kräftigsten Lebensperiode eintreten, werden zuerst alle ursprünglichen Mitglieder, dann erst alle späterhin eingetretenen absterben; vielmehr werden sich die Todesfälle nach Verhältniß der Anzahl und des Alters der Mitglieder untereinander mischen. Jeder solcher Verein wird also, nachdem überhaupt so viele gestorben sind, als die zu Grunde gelegte Anfangszahl beträgt, von den ursprünglichen Mitgliedern so viele als Ehrenmitglieder zurückbehalten, als bis dahin später eingetretene Mitglieder abstarben. Jeder dieser Vereine hat von den jüngeren Mitgliedern schon mehr oder weniger an Beiträgen bezogen, Tab. 48, Col. f; verstehen sich demnach diese Mitglieder dazu, sei es aus freiem Antriebe oder durch die Statuten festgesetzt, die noch fehlenden Beiträge einzuzahlen, so werden sie von der Beitragszahlung befreit und haben Anspruch auf ihr Sterbegeld, sofort oder nach eingetretenem Todesfalle, aber immer auf mehr als sie hingegeben, demnach auf vielmehr, als nach Befriedigung der Ehrenmitglieder des ersten Jahrganges davon übrig bleibt und dieser Ausfall kann nur mit den Beständen des inzwischen angesammelten Reservefonds gedeckt werden, wenn die von den festgesetzten Beiträgen herrührenden Ueberschüsse groß genug waren, einen bedeutenden Zinsgewinn abzuwerfen.

Man sollte es kaum glauben, ich kann aber versichern, daß mir ein Mann, dessen äußere Stellung wissenschaftliche Bildung, namentlich auch im Rechnungsfache erforderte, der sogar, wie ich später erfuhr, für eine andere sehr ausgedehnte Aussteuerkasse Agenturgeschäfte betrieb, einen Statutenentwurf zu einer solchen Kasse zur Beurtheilung übersandte, in welchem, mit ausdrücklicher Verwerfung von Beständen und Zinsgewinn, festgesetzt war, daß die Mitglieder

außer durch Heirath oder Tod, auch dann Anspruch auf Herauszahlung des versicherten Kapitals erlangen sollten, sobald drei Viertel desselben eingezahlt worden. Wo sollte hier der Verlust an die übrigen Mitglieder, wo der Ueberschuß für den eignen Gewinn herkommen? Darf man die Absicht zur Täuschung Anderer nicht voraussetzen, so beruhen dergleichen Bestimmungen auf Selbsttäuschung, die aus der unrichtigen Auffassung von den Wirkungen großer Zahlen hervorgegangen.

Eine Einkassirung bestimmter Beiträge nach Maßgabe der eingetretenen Todesfälle genügt also gleichfalls noch nicht zur Herstellung eines für alle Betheiligte gleich billigen Verhältnisses zwischen Einnahme und Ausgabe. Außerdem hat diese Art der Besteuerung mit allen übrigen noch das Nachtheilige, daß es fast unmöglich ist, ein gehöriges Gleichgewicht zwischen den Beiträgen und den Berechtigungsansprüchen verschiedener Kategorien von Mitgliedern herzustellen. Bei Sterbe-, Wittwen- und Aussteuerkassen z. B. werden entweder die jüngeren Mitglieder zum Vortheil der älteren, oder auch wohl diese zum Vortheil jener übertheuert. Bei dieser Gelegenheit mache ich darauf aufmerksam, daß es eine ganz unrichtige Auffassung ist, anzunehmen, ältere Personen hätten bei allen Arten von Versicherungen mehr zu entrichten als die jüngeren, während doch öfter der umgekehrte Fall stattfindet. Kommt es z. B. darauf an, die lebenslängliche Ernährung von Personen zu übernehmen, so räumt jeder sogleich ein, daß die jüngeren Personen mehr einzulegen haben werden, als die älteren, wogegen man in allen Statuten für sogenannte Altersaussteuerkassen wiederum von der unrichtigen entgegengesetzten Meinung ausging. Die Kassen genannter Art, wie sie ab und zu mir zugekommen, sind von den Heirathsaussteuerkassen nur darin verschieden, daß sie terminliche Beiträge abfordern und das Kapital nur alsdann herauszahlen, wenn das Mitglied verstarb oder die Mitgliedschaft eine bestimmte Anzahl von Jahren gedauert hatte. Trennen wir, als bereits allseitig untersucht, die Sterbekasse davon ab, und setzen als Dauer der Mitgliedschaft zehn Jahr, so wie den jährlichen Pränumerandobeitrag 1 voraus. Legt man nun

Tabelle 49.

Geschäftsjahr:	Fünfunddreißigjährige Personen.				Sechzigjährige Personen.			
	Am Anfange der Jahre werden eingezahlt, Beiträge:	Kapitalbestand am Anfange der Jahre:	Zinsen der Bestände à 4 pCt. im Laufe der Jahre:	Kapital und Zinsen zusammen:	Am Anfange der Jahre werden eingezahlt, Beiträge:	Kapitalbestand am Anfange der Jahre:	Zinsen der Bestände à 4 pCt. im Laufe der Jahre:	Kapital und Zinsen zusammen.
	a	b	c	d	a′	b′	c′	d′
1	409	409.00	16.36	425.36	210	210.00	8.40	218.40
2	402	827.36	33.09	860.45	201	419.40	16.78	436.18
3	395	1255.45	50.22	1305.67	192	628.18	25.13	653.31
4	388	1693.67	67.75	1761.42	182	835.31	33.41	868.72
5	381	2142.42	85.70	2228.12	172	1040.72	41.63	1082.35
6	374	2602.12	104.08	2706.20	162	1244.35	49.77	1294.12
7	367	3073.20	122.93	3196.13	152	1446.12	57.84	1503.96
8	360	3556.13	142.25	3698.38	142	1645.96	65.84	1711.80
9	353	4051.38	162.05	4213.43	132	1843.80	73.75	1917.55
10	346	4559.43	182.38	4741.81	122	2039.55	81.58	2121.13

Col. a fünfunddreißigjährige, Col. a′ dagegen sechzigjährige Mitglieder zu Grunde, so haben 409 der ersteren sofort 409 oder 409.00 — Col. b — einzuzahlen, welcher Betrag im Laufe des ersten Jahres bei 4% p. a. 16.36 an Zinsen abwirft, Col. c, und dadurch die gemachten Einzahlungen am Ende des Jahres auf 425.36, Col. d, erhöht. Von den eingetretenen Personen leben am Anfange des zweiten Jahres noch 402, die eben so viel an Beiträgen entrichten, welche zusammen genommen mit dem oben berechneten Bestande aus dem ersten Jahre 827.36 ergeben, die ihrerseits im zweiten Jahre 33.09 Zinsen abwerfen u. s. w. Ganz eben so ist die Rechnung für die 210 ursprünglich sechzigjährigen Personen in den Colonnen a′, b′, c′, d′.

Nun leben am Ende des zehnten Jahres von den ursprünglichen 409 fünfunddreißigjährigen Personen noch 339, im Besitze eines Vermögens von 4741.81, so daß bei der Theilung auf jedes noch vorhandene Mitglied $\frac{4741.81}{339} = 14.00$ kommen, wogegen die von den sechzigjährigen Personen zurückgebliebenen 112 Mitglieder 2121.13 zu theilen haben, also der Antheil eines jeden $\frac{2121.13}{112} = 18.93$ beträgt. Sollen demnach fünfunddreißigjährige und sechzigjährige Personen gemeinschaftlich spaaren und nach Verlauf von zehn Jahren das erworbene Kapital zu gleichen Theilen zurückempfangen, so haben die jüngeren Personen jährlich das $\frac{18.93}{14.00}$ d. i. das 1.35 Fache von dem, was die älteren, vorauszuentrichten, wenn beide Theile mit gleicher Billigkeit behandelt werden sollen.

Eine eigenthümliche Einrichtung ist endlich die, daß man die Mitglieder-

zahl unbeschränkt, die bei jedem Fall der Anspruchsberechtigung einzusammelnden Beiträge entweder unverändert oder doch weniger steigen oder fallen, als es dem Seite 125 gegebenen Satze gemäß wäre, dagegen den Betrag der herauszuzahlenden Versicherungssumme mit der Mitgliederzahl zu- und abnehmen läßt. Daß diese Bestimmung gegen alle Regeln einer richtigen Haushaltungslehre ist, bedarf kaum eines Beweises. Jeder vernünftige Versicherer muß wissen, wie viel er zu seinem Zwecke braucht, dann aber darf man es auch nicht dem Zufalle anheimgeben, ob dieser Betrag erreicht oder bei weitem überschritten werden wird. Aber mehr noch verstößt die genannte Bestimmung gegen das Princip der Billigkeit, welche das Fundament des Versicherungswesens ist. So lange nämlich die Mitgliederzahl steigt, werden die Abgegangenen, welche in der Regel schon bei gleichem Versicherungsbetrage zu wenig eingezahlt, noch um so viel weniger für das vergrößerte Kapital geleistet haben; wenn dagegen späterhin die Mitgliederzahl fällt, werden die Anspruchsberechtigten, die meistentheils schon beim unveränderlichen Versicherungsbetrage zu viel eingezahlt haben, beim verringerten Betrage um so viel mehr zu viel hingegeben haben.

Man sieht also, daß die verschiedenen Modalitäten, welche man angewandt hat, um einem unrichtigen Principe einen festern Halt zu geben, sich dazu theils als ungenügend, theils als noch unrichtiger und unhaltbarer als das Princip selbst ausweisen, weswegen nichts übrig bleibt, als zu einer wissenschaftlich begründeten Feststellung des Gleichgewichts zwischen der nach der Wahrscheinlichkeit zu erwartenden Einnahme und Ausgabe zu schreiten.

Fragt man aber, was denn eigentlich die Leute abzuhalten pflegt, sofort zur Rechnung ihre Zuflucht zu nehmen? so dürfte in den meisten Fällen die Antwort die sein, daß die Unkenntniß der Sache sie bedenklich macht, sich einer Rechnung anzuvertrauen, deren Principien kennen zu lernen man sich nicht Mühe gegeben und die man dadurch zu verdächtigen sucht, daß man sagt, die Mortalitäts-Tabellen seien zu unzuverlässig und können täuschen, die berechneten Beiträge kommen zu hoch und könne man den Zweck ohne Rechnung wohlfeiler erreichen, weil die Rechnung die zu Grunde gelegte Anzahl Mitglieder sofort aussterben lasse und auf den Beitritt neuer Mitglieder keine Rücksicht nehme. Wie weit die Unsicherheit in den Mortalitäts-Tabellen geht, werden wir im zweiten Abschnitte sehen, keinesfalls aber ist diese so groß, daß bei richtiger und vorschriftsmäßiger Anwendung solcher Tabellen irgend welche Gefahr für ein Versicherungsinstitut daraus entstehen könnte. Am allerwenigsten haben diejenigen Personen ein Recht, von Gefahr zu sprechen, die ihrerseits vermeinen, das Geschäft wohlfeiler betreiben zu können. Wie grundlos aber eine solche Meinung sei, läßt sich leicht nachweisen. Der Rechner verfährt nämlich ganz so, wie wir es bereits in diesem Abschnitte gethan; er setzt einen Verein mit einer bestimmten Mitgliederzahl voraus, läßt die Mitglieder, je nach der vor-

liegenden Art der Versicherung, auf Grund früher gemachter, möglichst richtiger Erfahrungen ausscheiden und bestimmt danach Jahr für Jahr die Anzahl der noch vorhandenen Beitragenden, so wie den Gesammtbedarf für die Ausgeschiedenen. Setzt er nun, wie in Tab. 49, den jährlichen Beitrag 1 für jedes Mitglied voraus und rechnet von Jahr zu Jahr die Zinsen der bereits angesammelten Bestände, Col. c, hinzu, so findet er, wieviel der Verein von den am Anfange des Geschäfts vorausgesetzten Mitgliedern nach Beendigung der ganzen Versicherung an Kapital und Zinsen gewonnen haben würde, wenn während dieser Zeit keine Ausgaben gemacht worden wären. Was die letzteren betrifft, so hat er zu den bereits gefundenen Ausgaben des ersten Jahres nur die Zinsen hinzuzufügen, um zu wissen, was am Ende des Jahres von der Einnahme in Abzug zu bringen gewesen wäre. Ohne dies jedoch zu thun, legt man dem vorgefundenen Betrage den Bedarf des zweiten Jahres nebst den Zinsen des ganzen Kapitals hinzu, um zu wissen, welchen Ausfall an Kapital und Zinsen der Verein durch die Ausgaben der beiden ersten Jahre erleidet. Diesen Ausfall und die Ausgaben des dritten Jahres behandelt man nun eben so wie vorher und fährt damit von Jahr zu Jahr fort, woraus man nach Beendigung des ganzen Geschäfts erfährt, wie groß zu dieser Zeit der Ausfall ist, den der Verein an ausgezahltem Kapital und den für ihn davon verloren gegangenen Zinsen und Zinseszinsen zu erleiden gehabt. Vergleicht man schließlich die vorher berechneten Einnahmen mit den gefundenen Ausgaben, so ergiebt sich daraus ganz genau das richtige Verhältniß zwischen der Versicherungssumme und dem durchschnittlichen jährlichen Beitrage. Um die Sache noch deutlicher hervortreten zu lassen und zugleich darzuthun, wie einfach die Anfänge dieser Rechnungen sind, wähle ich, als Repräsentanten der am häufigsten vorkommenden Versicherungen, eine Invaliden- oder lebenslängliche Verpflegungs-Kasse, eine Sterbe- und eine Wittwen-Kasse und nehme das Alter der betreffenden Personen nur deshalb so hoch an, damit dieser erste Entwurf zu den künftigen ausführlicheren Berechnungen übersichtlicher bleibe.

Man setze deshalb voraus, eine größere Menge sechsundsiebenzigjähriger Personen solle lebenslänglich am Anfange eines jeden Jahres den Betrag 1 erhalten und sei zu ermitteln, welche Ausgabe und welcher Verlust an Kapital und Zinsen der zahlenden Kasse daraus erwächst, oder auch, wie viel der Kasse für jede Person durchschnittlich vorauszuzahlen wäre, damit dieselbe aus dem daraus hervorgehenden Kapitale und den Zinsen seiner von einem Jahre zum andern disponiblen Bestände ohne Gewinn oder Verlust die Zahlungen leisten könnte, wenn man dabei die Süßmilch'sche Mortalitäts-Tabelle und den Zinsfuß von 4% zu Grunde legt. In

Tabelle 50.

Geschäftsjahr.	Invaliden-Kasse.			Kapitals-Verzinsung.		Darstellung des Geschäftsganges. Ursprüngliches Kapital, resp. Ueberschüsse aus den früheren Jahren		
	Lebende Invaliden.	Kapitalsaufwand am Anfange der Jahre.	Zinsverlust à 4 pCt. im Laufe der Jahre.	Ursprüngliches resp. angewachsenes Kapital.	Zinsen à 4 pCt. im Laufe der Jahre.	vor Auszahlung der Invaliden-Pensionen.	nach Auszahlung der Invaliden-Pensionen.	Jährliche Zinsen der Ueberschüsse à 4 pCt.
	a	b	c	d	e	f	g	h
1	62	62.00	2.48	362.94	14.52	362.94	300.94	12.04
2	55	119.48	4.78	377.46	15.10	312.98	257.98	10.32
3	49	173.26	6.93	392.56	15.70	268.30	219.30	8.77
4	43	223.19	8.93	408.26	16.33	228.07	185.07	7.40
5	37	269.12	10.76	424.59	16.98	192.47	155.47	6.22
6	32	311.88	12.48	441.57	17.66	161.69	129.69	5.19
7	28	352.36	14.09	459.23	18.37	134.88	106.88	4.27
8	24	390.45	15.62	477.60	19.10	111.15	87.15	3.49
9	20	426.07	17.04	496.70	19.87	90.64	70.64	2.85
10	17	460.11	18.40	516.57	20.66	73.49	56.49	2.26
11	14	492.51	19.70	537.23	21.49	58.75	44.75	1.79
12	12	524.21	20.97	558.72	22.35	46.54	34.54	1.38
13	10	555.18	22.21	581.07	23.24	35.92	25.92	1.04
14	8	585.39	23.42	604.31	24.17	26.96	18.96	0.76
15	6	614.81	24.59	628.48	25.14	19.72	13.72	0.55
16	5	644.40	25.78	653.62	26.14	14.27	9.27	0.37
17	4	674.18	26.97	679.76	27.19	9.64	5.64	0.23
18	3	704.15	28.13	706.95	28.28	5.87	2.87	0.11
19	2	734.28	29.87	735.23	29.41	2.98	0.98	0.04
20	1	764.65	.	764.64	.	1.02	0.02	.

enthält nun Col. a die Lebenden nach Süßmilch, d. h. von 62 sechsundsiebenzigjährigen Personen ausgehend, die Anzahl derjenigen Personen, welche davon am Anfange der aufeinander folgenden Jahre noch vorhanden sein werden. Da nun zu dieser Zeit jede noch lebende Person den Betrag 1 erhalten soll, so giebt Col. a zugleich die Beträge an, welche die Kasse am Anfange des ersten und der darauf folgenden Jahre bis zum Tode des letzten Mitgliedes zu zahlen hat. Zahlt diese aber am Anfange des ersten Jahres 62, oder was dasselbe ist 62.00, Col. b, so ist dieses für sie der erste Ausfall, aus welchem ihr noch im Laufe des ersten Jahres ein anderer Ausfall dadurch erwächst, daß ihr die Zinsen, welche sie im Besitze jener 62.00 hätte erwerben können, gleichfalls verloren gehen. Diese würden, zu 4% gerechnet, am Ende des

ersten Jahres 62.00 × $\frac{4}{100}$ = 2.48, Col. c, betragen haben, demnach am Anfange des zweiten aus den Zahlungen des ersten Jahres der Verlust 62.00 + 2.48 sein. Da indeß die Kasse zu dieser Zeit wiederum 55, Col. a, zu zahlen hat, so ist ihr bisheriger Verlust 62.00 + 2.48 + 55.00 = 119.48, Col. b, wenn mit zwei Decimalstellen gerechnet wird. Hieraus erwächst für die Kasse bis zu Ende des zweiten Jahres ein Zinsausfall von 119.48 × $\frac{4}{100}$ = 4.78, Col. c, so daß sie am Anfange des dritten Jahres, nach Auszahlung der wiederum fällig gewordenen 49, Col. a, den Verlust 119.48 + 4.78 + 49.00 = 173.26, Col. b, hat. Rechnet man nun auf dieselbe Weise fort, so findet man Col. b, daß die Kasse am Anfange des zwanzigsten Jahres, oder nach abgelaufenen neunzehn Geschäftsjahren den Gesammtverlust 764,65 haben würde. Von dieser Zeit ab erleidet sie nur noch den Ausfall an Zinsen des eben genannten Kapitals, weil im Laufe des zwanzigsten Geschäftsjahres das letzte Mitglied verstirbt. Wollte man also der Kasse gerecht werden, so hätte man ihr am Anfange des zwanzigsten Geschäftsjahres jene 764.65 zurückzuzahlen. Mit solcher Nachzahlung ist indeß in der Wirklichkeit keiner Kasse gedient, denn ihr pflegen nicht allein die Mittel zu fehlen, woraus die Vorschüsse geleistet werden könnten, sondern die Kassen werden auch in den wenigsten Fällen auf den Rückempfang der gemachten Vorschüsse nach Abwickelung des ganzen Geschäfts mit Sicherheit rechnen können. Sie sind daher genöthigt, vor dem Beginne der Zahlungen das dazu erforderliche Kapital einzuziehen und wäre dasselbe im vorliegenden Falle offenbar so abzumessen, daß daraus im Laufe von neunzehn Jahren durch den jährlichen Zuschlag der Zinsen von 4% gerade der obige Betrag hervorgeht; es wären sonach für alle 62 ursprüngliche Mitglieder 764.65 × 0.474642 = 362.94 erforderlich. Im zweiten Abschnitte wird die Art und Weise dieser Berechnung erklärt werden; will man sich indeß von der Richtigkeit des Resultats durch die Probe überzeugen, so dienen dazu die Colonnen d und e. Erstere fängt mit dem gefundenen Kapitale 362.94 an, während man in Col. e die Zinsen desselben zu 4% mit 14.52 verzeichnet findet. Schlägt man diese am Anfange des zweiten Jahres zum Kapital, so ist dasselbe auf 362.94 + 14.52 = 377.46 angewachsen, Col. d, welche im Laufe des zweiten Jahres 15.10 Zinsen, Col. e, erzielen. Durch continuirliche Fortsetzung dieser Rechnung findet man wirklich, daß das zu Grunde gelegte Kapital am Anfange des zwanzigsten Geschäftsjahres auf den oben geforderten Betrag, mit der geringen Differenz 0.01, angewachsen ist. Sollen nun die ursprünglichen 62 Mitglieder mit gleicher Billigkeit behandelt werden, so hat jedes von ihnen am Anfange des Geschäfts $\frac{362.94}{62}$ = 5.854 herzugeben, d. h. 5.854 Thaler, wenn die jährliche Auszahlung einen Thaler, 12 × 5.854 = 70.248 Thaler, wenn die Auszahlung 12 Thaler, 100 × 5.854 = 585.4 Thaler, wenn sie 100 Thaler betrüge u. s. w. Damit man sich auch a poste-

riori von der Nothwendigkeit und Hinlänglichkeit des geforderten Betrages überzeugen könne, sind noch die Colonnen f, g und h hinzugefügt. Col. f beginnt mit dem Totalbedarf von 362.94, Col. g enthält den Bestand nach Auszahlung der 62, Col. a, und da dieser Bestand im Laufe des Jahres nicht zur Verwendung kommt, kann derselbe zinslich nutzbar gemacht werden und trägt 12.04 Zinsen, Col. h, so daß man am Anfange des zweiten Jahres von dem ursprünglichen Kapitale noch 300.94 + 12.04 = 312.98, Col. f, zur Verfügung hat, welche indeß nach Auszahlung der anderweitig fällig gewordenen 55, Col. a, auf 257.98 Bestand, Col. g, herabsinken und im Laufe des zweiten Jahres 10.32 Zinsen, Col. h, eintragen. Nach Beendigung der Rechnung findet man nun, daß nach Befriedigung des letzten Mitgliedes der Kasse in der That nur noch 0.02 zurückbleiben, welche als Reingewinn des ganzen Geschäfts anzusehen wären.

Empfängt umgekehrt die Kasse, anstatt zu zahlen, von jedem Mitgliede, so lange dasselbe lebt, am Anfange eines jeden Jahres den Betrag 1, so bleibt die Rechnung natürlich ganz dieselbe, nur daß daraus der Kasse am Anfange des zwanzigsten Geschäftsjahres der Gewinn 764.65, also auf jedes der ursprünglichen Mitglieder durchschnittlich $\frac{764.65}{62} = 12.333$ erwächst.

Als zweiter Fall werde der genommen, daß eine Sterbekasse auf eine große Menge sechsundsiebenzigjähriger Personen nach jedem eingetretenen Todesfalle 100 zahlen solle und man zu ermitteln habe, wie viel dafür ein für allemal beim Beginne des Geschäfts, oder an lebenslänglichen jährlichen Beiträgen der Mitglieder einzuzahlen sei, wenn daraus für die Kasse weder Gewinn noch Verlust hervorgehen soll.

Da es hier nur um die Entwicklung der Grundlagen zu thun ist, behandeln wir jede Aufgabe in ihrer einfachsten Gestalt und setzen für den vorliegenden Fall voraus, die Kasse habe sich am Anfange eines jeden Jahres auf Auszahlung der im Laufe desselben fällig werdenden Sterbegelder vorzubereiten. Unter dieser Voraussetzung enthält

Tabelle 51.

Geschäftsjahr.	Sterbekasse.			Geschäftsgang bei Beitragszahlung.		
	Sterbende.	Kapitalsaufwand am Anfange der Jahre.	Zinsverlust à 4 pCt. im Laufe der Jahre.	Jährlich eingehende Beiträge.	Ueberschüsse nach Zurückbehaltung der fällig werdenden Sterbegelder.	Jährliche Ueberschüsse der Zinsen à 4 pCt.
	a	b	c	d	e	f
1	7	700.00	28.00	853.7	153.7	6.1
2	6	1328.00	53.12	757.3	317.1	12.7
3	6	1981.12	79.24	674.7	404.5	16.2
4	6	2660.36	106.41	592.1	412.8	16.5
5	5	3266.77	130.67	509.5	438.8	17.6
6	4	3797.44	151.90	440.6	497.0	19.9
7	4	4349.34	173.97	385.6	502.5	20.1
8	4	4923.31	196.93	330.5	453.1	18.1
9	3	5420.24	216.81	275.4	446.6	17.9
10	3	5937.05	237.48	234.1	398.6	15.9
11	2	6374.53	254.98	192.8	407.3	16.3
12	2	6829.51	273.18	165.2	388.8	15.5
13	2	7302.69	292.11	137.8	342.1	13.7
14	2	7794.80	311.79	110.2	266.0	10.6
15	1	8206.59	328.26	82.6	259.2	10.4
16	1	8634.85	345.39	68.9	238.5	9.5
17	1	9080.24	363.21	55.1	203.1	8.1
18	1	9543.45	381.74	41.3	152.5	6.1
19	1	10025.19	401.01	27.5	86.1	3.4
20	1	10526.20	.	13.8	3.3	.
				5948.7		254.6

in Col. a die Zahl der jährlichen Sterbefälle nach Süßmilch, wenn von 62 sechsundsiebenzigjährigen Personen ausgegangen wird, Col. b fängt mit dem Kapitale 700 an, welches die Kasse aus ihren Beständen am Anfange des ersten Jahres in Bereitschaft zu halten hätte, während Col. c den Zinsverlust 28.00 angiebt, den die Disponibelhaltung der 700 im Laufe des ersten Jahres herbeiführt. Am Anfange des zweiten Jahres betrüge demnach der Ausfall 728.00; da inzwischen die Kasse für die zu erwartenden 6 Sterbefälle, Col. a, 600 zurückzuhalten hat, so beträgt der Ausfall zu dieser Zeit schon 1328.00, Col. b, mit den Zinsen 53.12, Col. c, und läßt sich die Rechnung auf die-

selbe Weise von Jahr zu Jahr fortsetzen, wodurch man am Ende des neunzehnten Geschäftsjahres den Aufwand von 10526.20 findet, der dem anfänglichen Betrage von 10526.20 × 0.474642 = 4996.18, oder durchschnittlich für jedes Mitglied $\frac{4996.18}{62}$ = 80.58 entspricht. Davon, daß diese 4996.18 am Anfange des Geschäfts dem obigen Ausfalle nach neunzehn Geschäftsjahren gleichkommen, so wie davon, daß die Kasse wirklich im Stande sei, mit dem Kapitale 1996.18 ihren übernommenen Verpflichtungen zu genügen, kann man sich eben so, wie vorher bei Tab. 50, f, g, h überzeugen und wird gut thun, solche Proben so lange auszuarbeiten, bis man sich von dem haarscharfen Anschmiegen der Rechnung an die zu Grunde gelegte Mortalitäts-Tabelle hinlänglich überzeugt hat.

Soll das Kapital der 4996.18 nicht auf einmal eingezahlt, sondern durch lebenslängliche jährliche Pränumerandobeiträge der Mitglieder gedeckt werden, so sind alle Elemente zur Berechnung des richtigen Beitrags vorhanden. Nach Tab. 50 nämlich entspricht die vorausgesetzte Beitragszahlung 1 dem künftigen Kapitale 764.65; sollen demnach 10526.20 gedeckt werden, so ist dazu der jährliche Beitrag $\frac{10526.20}{764.65}$, oder etwas mehr als 13.77 erforderlich, den jedes Mitglied, so lange es lebt, voraus zu entrichten hat. Daß dieser Beitrag ausreicht, alle Sterbegelder zu zahlen, ist in den Colonnen d, e, f durch die Probe nachgewiesen.

Endlich setze man voraus, daß eine Anzahl sechsundsiebenzigjähriger Männer ihren fünf Jahr jüngeren Frauen auf den Fall ihres Absterbens eine lebenslängliche jährliche Pension von 100 versichern wollen. Läßt man wiederum die Kasse sich am Anfange jedes Jahres auf die im Laufe desselben fällig werdenden Pensionen vorbereiten, so ist die Anzahl der am Anfange eines jeden Jahres zurückzulegenden 100, aus Tab. 25 Col. g in

Tabelle 52.

Geschäftsjahr:	Wittwenkasse.						Geschäftsgang bei Beitragszahlungen.			
	Zahlende Paare.	Kapitals-Bestände am Anfange der Jahre.	Zinsen der Bestände à 4 pCt. im Laufe der Jahre.	Lebende Wittwen.	Kapitals-Aufwand am Anfange der Jahre.	Zinsverlust à 4 pCt. im Laufe der Jahre.	Gesammt-Beiträge am Anfange der Jahre.	Ueberschüsse aus den früheren Jahren vor Zurückbehaltung der fällig werdenden Sterbegelder.	Ueberschüsse aus den früheren Jahren nach Zurückbehaltung der fällig werdenden Sterbegelder.	Zinsen der Ueberschüsse à 4 pCt.
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
1	6386	6386.0	255.4	658	65800	2632	438207	438207	372407	14896
2	5170	11811.4	472.5	1105	178932	7157	354765	742068	631568	25263
3	4165	16448.9	658.0	1463	332389	13296	285802	942638	796333	31853
4	3311	20417.9	816.7	1725	518185	20727	227201	1055387	882887	35316
5	2553	23787.6	951.5	1860	724912	28996	175187	1093390	907390	36296
6	1984	26723.1	1068.9	1870	940908	37636	136142	1079828	892828	35713
7	1540	29332.0	1173 3	1862	1164744	46590	105675	1034216	848016	33921
8	1176	31681.3	1267.3	1806	1391934	55677	80697	962634	782034	31281
9	860	33808.6	1352.3	1665	1614111	64564	59013	872328	705828	28233
10	629	35789.9	1431.6	1536	1832275	73291	43162	777223	623623	24945
11	448	37669.5	1506.8	1400	2045566	81823	30742	679310	539310	21572
12	336	39512.3	1580.5	1248	2252189	90087	23056	583938	459138	18366
13	240	41332.8	1653.3	1080	2450276	98011	16469	493973	385973	15439
14	160	43146.1	1725.9	952	2643487	105739	10979	412391	317191	12688
15	102	44974.0	1799.0	798	2829026	113161	6999	336878	257078	10283
16	70	46843.0	1873.7	690	3011787	120471	4803	272164	202560	8103
17	48	48764.7	1950.6	590	3191258	127650	3294	213961	154961	6198
18	30	50745.3	2029.8	480	3366908	134676	2059	163218	115218	4609
19	16	52791.1	2111.6	366	3538184	141527	1098	120825	84325	3373
20	6	54908.7	2196.3	310	3710711	148428	412	88110	57110	2284
21	0	57105.0	2284.2	248	3883939	155358	0	59394	34594	1384
22	0	59389.2	2375.6	186	4057897	162316	0	35978	17378	695
23	0	61764.8	2470.6	124	4232613	169305	0	18073	5673	227
24	0	64235.4	.	62	4408118	.	0	5900	— 300	.
				24090			2005762			402938

Col. d übertragen. Im ersten Jahre gehören dazu 65800, Col. e, welche im Laufe des Jahres 2632 Zinsen tragen, Col. f, und somit, da am Anfange des zweiten Jahres 110500 zurückzulegen sind, Col. d, zu dieser Zeit einen Ausfall von überhaupt 65800 + 2632 + 110500 d. h. 178932 verursachen, Col. e. Setzt man auf diese Weise ganz so, wie bei den Tabellen 50 und 51 die Rechnung fort, so findet man am Ende des dreiundzwanzigsten Geschäftsjahres den Ausfall 4408118, der am Anfange des Geschäfts ein Kapital von $4408118 \times 0.4057263 = 1348789$ repräsentirt. Da nun von $62 \times 103 = 6386$ Paaren ausgegangen ist, so hat jedes Paar zur Deckung der Ausgaben das Kapital von $\frac{1348789}{6386}$ d. h. 211.2 einzuzahlen.

Will man dieses Kapital durch die Beiträge der bestehenden Paare aufbringen, so findet man die Angabe der noch vorhandenen Paare am Anfange eines jeden Geschäftsjahres, aus Tab. 25 Col. e entnommen, in Col. a verzeichnet, die Bestände bei der jährlichen Zahlung 1 für das Paar Col. b und die Jahreszinsen Col. c, wodurch man am Ende des dreiundzwanzigsten Geschäftsjahres das Kapital 64235.4 erzielt. Da nun aber 4408118 aufzubringen sind, so hat jedes Paar $\frac{4408118}{64235.4}$, d. i. etwas mehr als 68.62 jährlich voraus zu entrichten. Die Ausführung des Geschäftsganges endlich findet man in den Colonnen g bis k, woraus man sieht, daß die Wittwenkasse am Ende des dreiundzwanzigsten Geschäftsjahres ein Kapital von 300 eingebüßt hätte, welches lediglich davon herrührt, daß bei dem Beitrage 68.62 nur zwei Decimalen in Anwendung gebracht sind.

Die drei vorhergehenden Beispiele zeigen nun deutlich, daß die mathematische Festsetzung des Gleichgewichts zwischen den Ausgaben und Einnahmen nicht mehr und nicht weniger fordert, als durchaus nothwendig ist, so daß von einer wohlfeilern Erreichung des Zwecks nicht die Rede sein kann. Solches wird auch von manchen Seiten zugegeben, indeß der Einwand gemacht, daß die Rechnung den Verein sofort aussterben läßt, während nach allen Erfahrungen der Bedarf ein viel geringerer ist, wenn neue Mitglieder hinzutreten. Es ist aber sehr einfach, den Fehlschluß aufzudecken, der hier gemacht wird. Allerdings nämlich haben wir gesehen, daß durch den Zutritt neuer Mitglieder der jeweilige Bedarf ein geringerer ist, als in der Periode des Aussterbens, daß derselbe aber bis zur Erreichung des Beharrungszustandes dennoch ein ziemlich beträchtlicher wird, und daß an dem während der endlichen Periode des Aussterbens immer größer werdenden Bedarf desto mehr Mitglieder theilnehmen, je mehr vorher nach und nach eingetreten sind, so daß der Gesammtbedarf verhältnißmäßig derselbe sein kann und nur die Vertheilung desselben eine andere ist. Es läßt sich dieses ganz genau a priori darthun. Denkt man sich nämlich einen Verein, zu welchem jährlich neue Mitglieder mit gleicher Anspruchsberechtigung hinzutreten, so steht dem nichts entgegen, jeden Jahrgang für einen besonderen Verein anzusehen, der mit den anderen nur ein gemeinschaftliches Kasseninteresse hat. Bei der vorausgesetzten Gleichheit der Anspruchsberechtigung hat man auch anzunehmen, daß der Gesammtbedarf für jede Jahresgesellschaft der Anzahl ihrer ursprünglichen Mitglieder proportional, der Durchschnittsbedarf für das einzelne Mitglied demnach derselbe sein werde, es mag einer Jahresgesellschaft angehören, welcher es wolle. Will man also den Mitgliedern die beantragte Versicherung wohlfeiler gewähren, so hätten dieselben weniger einzuzahlen, als sie bedürfen, welcher Ueberschuß aus dem für die übrigen Jahresgesellschaften angesammelten Fonds entnommen werden müßte. Da aber der Voraussetzung nach alle Mitglieder gleiche Beiträge zahlen sollen und

der durchschnittliche Bedarf für alle Mitglieder derselbe sein wird, so zahlt jede Jahresgesellschaft weniger ein, als sie bedarf und werden die Ueberschüsse aus dem für den künftigen Bedarf angesammelten Fonds so lange entnommen werden, bis derselbe erschöpft ist und ihrer Zeit die letzten Mitglieder keine Befriedigung erhalten können. Dieser Ausgang ist unvermeidlich, es mag der Minderbetrag, welchen man den Mitgliedern erläßt, noch so gering sein, und ist der einzige Unterschied hierbei der, daß die Erschöpfung des Fonds um so später eintreten wird, je näher die Beiträge der Mitglieder den ausreichenden Beiträgen kommen. Aus alledem geht hervor, daß der Hinzutritt neuer Mitglieder für die bereits vorhandenen die nothwendigen Beiträge nicht herabsetzen kann.

Die vorstehenden Tabellen 50 bis 52 geben noch zu nachfolgenden Schlußbemerkungen Veranlassung.

1) Der Ertrag von Zahlungen ist ganz derselbe, es mögen diese von Seiten der Kasse an die Mitglieder, oder von Seiten der Mitglieder an die Kasse gemacht werden. Er hängt bei gleichem Beitrage im einzelnen Falle einzig und allein von der Anzahl der Beträge ab, welche in den aufeinander folgenden Jahren zur Auszahlung kommen und ist unabhängig von den Ursachen, welche diesen Auszahlungen zu Grunde liegen.

2) Die Berechnung des Durchschnittsbedarfs, es mag derselbe ein für allemal, oder in bestimmten Terminen einzuzahlen sein, erfordert demnach weiter nichts, als Berechnung der Anzahl der Beitragenden einerseits und Ermittlung des jedesjährigen Gesammtbedarfs andrerseits. Jene liefern unter Berücksichtigung des Zinsgewinns die gesammte Einnahme für den Betrag 1, diese die gesammte Ausgabe bei Beendigung des Geschäfts, so daß aus Balancirung beider der erforderliche Beitrag hervorgeht.

3) Da bei jährlicher Zahlung die Beiträge Jahr für Jahr dieselben sind und zur Befriedigung aller Mitglieder ausreichen, so werden dieselben nothwendigerweise größer sein, als der jeweilige Bedarf in den ersten Geschäftsjahren, dagegen aber geringer, als der schließliche Bedarf, unter Umständen auch schon geringer, als der Bedarf im Beharrungszustande.

Aus den Ueberschüssen des durchschnittlichen Beitrags über den Bedarf in der ersten Zeit des Geschäfts bildet sich ein Fonds, der zwar nicht sofort zur Verwendung kommt, aber keinesweges als erworbenes Eigenthum der Kasse, sondern nur, wie die Darstellung des Geschäftsganges in den Tabellen 51 und 52 nachweist, als einstweiliges Depositum anzusehen ist, das hinterher, wenn der jeweilige Bedarf größer geworden als der Ertrag der Beiträge, zur Weiterführung des Geschäfts unentbehrlich ist. Dieser Fonds ist also keinesweges ein bloßer Reserve-, d. h. ein solcher Fonds, auf dessen Benutzung man nicht eigentlich rechnet, den man aber einstweilen bestehen läßt,

um bei unvermutheten Conjunkturen auszuhelfen; es wird vielmehr beim Betriebe des ganzen Geschäfts wesentlich auf ihn gerechnet, weswegen er in der Folge **Betriebsfonds** genannt werden wird.

4) Dadurch, daß dieser Betriebsfonds, so weit derselbe irgend entbehrlich ist, zinslich benutzt wird, übernimmt der Versicherungsverein, der seinen Mitgliedern jährliche Beiträge abfordert, zugleich die Verrichtung einer Spaarkasse, indem er die zur Zeit des Nichtbedarfs von allen Seiten eingehenden Beiträge zu einem Kapitale vereinigt und solches zum Vortheil seiner Interessenten zinslich vergrößert. Der Gewinn, der den Mitgliedern daraus erwächst, ist bald höher bald geringer, je nachdem der jedesjährige Bedarf schneller oder langsamer steigt; in Tab. 51 z. B. kommen auf 5948.7 Kapital nur 254.6 Zinsen, also nicht viel über den dreiundzwanzigsten Theil des erstern, dagegen schon in Tab. 52 auf 2005762 Kapital 402938 Zinsen, d. h. etwas über den fünften Theil desselben.

5) Der Unterschied zwischen einer gewöhnlichen Spaarkasse und einem Versicherungsverein liegt aber darin, daß der Betheiligte bei einer Spaarkasse sein Geld zu jeder Zeit, wann er es verlangt, jedoch nur so viel, als er hingegeben, nebst den inzwischen darauf gefallenen Zinsen zurückempfängt, wogegen der Versicherungsverein das Geld nur im Falle des vorher bezeichneten Unglücks herauszahlt, dann aber auch so viel, als der Betheiligte bedarf, d. h. so viel, als vorher ausbedungen worden.

6) Der Zinsgewinn bewirkt es, daß in vielen Fällen der jeweilige Bedarf bald den Durchschnittsbedarf überholt, so daß der Vortheil, welchen man den Mitgliedern durch bloße Abforderung jenes Bedarfs zuwenden zu können vermeint, verhältnißmäßig nur wenigen Mitgliedern zu Gute kommt (vergl. Seite 19), während alle übrigen Mitglieder den Nachtheil eines solchen Verfahrens erleiden.

7) Die Berechnungen zur Festsetzung des Gleichgewichts zwischen Einnahme und Ausgabe schließen sich, wie gezeigt, den Mortalitäts-Tabellen eng an, weswegen sie auch am geeignetsten sind, die verschiedenen Kategorien der Versicherungsuchenden nach den Grundsätzen der Billigkeit, d. h. so zu behandeln, daß jeder Kategorie gerade so viel abgefordert werde, als die von ihr verursachten Ausgaben betragen; ein Vorzug der Berechnung, den keine andere Art der Geschäftseinrichtung mit ihr theilt.

8) Da ein Versicherungsverein unter allen Umständen anfänglich mehr Gelder einnimmt, als er herauszuzahlen hat, so ist es auch keinesweges nothwendig, daß ein solcher Verein mit einem eigenen Geschäftskapitale anfange; unbedingt schädlich dagegen wirkt es, wenn das neue Institut damit beginnt, sich durch Anleihe ein derartiges Kapital zu verschaffen. Einmal lastet es sich die Bewirthschaftung von Geldern auf, die es füglich entbehren könnte und vertheuert dadurch die Verwaltung; zum andern wird es nie gelingen, damit

die Zinsen zu erzielen, die dafür zu zahlen sind. In der Regel werden auch dergleichen Geschäfte nur gemacht, um die Einrichtungskosten zu decken und von Hause aus eine etwas ausgedehntere Verwaltung eintreten zu lassen. — Die Berliner allgemeine Wittwen-Pensions- und Unterstützungs-Kasse läßt sich aber als Muster eines spaarsamen und sorgfältigen Beginnes anführen. Dieselbe zog statutenmäßig von den eingegangenen Beiträgen nur fünf Procent für die Verwaltung ab, richtete sich damit so ein, daß, wie die öffentlichen Rechenschaftsberichte nachweisen, nie mehr als dieser Abzug für die Geschäftsführung verwendet worden, und entschädigte erst in späterer Zeit, nach größer gewordner Frequenz, die Beamten für ihre Mitwirkung bei der Errichtung aus den Ueberschüssen des Verwaltungsfonds.

Zweiter Abschnitt.

Von den mathematischen Berechnungen bei Versicherungs-Anstalten.

Die Berechnungen bei Versicherungs-Anstalten haben den Zweck, das Gleichgewicht zwischen den wahrscheinlichen Ausgaben und den Einnahmen bei einer großen Menge Versicherungen gleicher Art durch die Rechnung festzustellen. Jene Ausgaben werden lediglich bedingt durch die Art des Unglücks, gegen welches man versichert, und die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens, d. h. die Anzahl der unglücklichen Fälle im Verhältniß zur Gesammtzahl aller überhaupt möglichen Fälle. Sterben z. B. von 332 sechsundvierzigjährigen Personen binnen Jahresfrist 8, so erhält man unter 332 überhaupt möglichen Fällen 8 unglückliche und bezeichnet dies kürzer dadurch, daß man sagt: Die Wahrscheinlichkeit einer sechsundvierzigjährigen Person, im Laufe eines Jahres zu sterben, sei $\frac{8}{332} = \frac{2}{83}$ (Seite 17). Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist also eine Durchschnittsangabe, unterscheidet sich aber von dem Begriffe des Durchschnitts dadurch, daß man mit diesem noch den Nebenbegriff der unbedingten Gewißheit zu verbinden pflegt, während das Wort „Wahrscheinlichkeit" auf künftige Ereignisse hindeuten soll, von welchen man voraussetzt, daß dieselben in dem angegebenen oder wenigstens einem ihm sehr nahe liegenden Verhältniß auftreten werden, ohne jedoch solches mit Gewißheit behaupten zu können.

Die Grundursachen künftiger unglücklicher Ereignisse, welche den Gegenstand von Versicherungen bilden, sind unbekannt, weswegen sich auch solche Wahrscheinlichkeiten nicht a priori berechnen lassen, sondern durch sorgfältig angestellte Beobachtungen zu ermitteln sind. Man denke sich nämlich einen richtig gearbeiteten Würfel, dessen sechs Oberflächen durch die Ziffern 1 bis 6 bezeichnet sind, so wird, bei der vorausgesetzten Richtigkeit der Arbeit, der Schwerpunkt desselben in die Mitte fallen und die schweren Körpertheilchen des Würfels werden sich nach je zwei entgegengesetzten Richtungen hin regelmäßig

um dieselbe lagern. Nimmt man sich demnach vor, diesen Würfel, ohne alle Nebenabsicht, sehr oft auf einer Tafel rollen zu lassen und den Erfolg nach dem Stillstande des Würfels abzuwarten, so hat man keinen Grund zu vermuthen, daß die eine Oberfläche oder Ziffer häufiger nach oben zu liegen kommen werde, als die andere. Man geht daher vor dem Werfen schon von der Annahme aus, alle sechs Ziffern werden gleich oft, oder wenigstens sehr nahebei gleich oft nach oben kommen und vertheilt also die Anzahl der gemachten Würfe auf alle 6 Ziffern gleichmäßig, indem man sagt, die Wahrscheinlichkeit, daß eine vorher bezeichnete Ziffer nach oben komme, sei $\frac{1}{6}$, die für die übrigen fünf Ziffern $\frac{5}{6}$; die Wahrscheinlichkeit, daß zwei vorher bezeichnete Ziffern nach oben kommen, sei $\frac{2}{6}$, die für die übrigen vier $\frac{4}{6}$ und endlich die Wahrscheinlichkeit, daß drei bezeichnete Ziffern nach oben kommen, sei $\frac{3}{6}$. Auf diese Weise hat man nach der genauen Kenntniß des Objekts, mit dem man es zu thun hat, also der Ursachen, welche das Fallen des Würfels regeln, auf die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse durch Rechnung geschlossen und nimmt nicht Anstand, diese Rechnungen in allen möglichen Combinationen fortzusetzen, dadurch, daß man dem einen Würfel nach und nach einen zweiten, dritten, vierten u. s. w. hinzufügt. Man ist von der Richtigkeit dieser Rechnung so sehr überzeugt, daß man die Würfel für fehlerhaft gearbeitet erklärt, wenn häufige Wiederholungen der Versuche bedeutend von den berechneten Resultaten abweichen.

Beim Menschen kennt man die Grundursachen, die auf Verlängerung oder Verkürzung des Lebens einwirken, in allen ihren Complicationen nicht und kann also auch durch Vorausberechnung nicht festsetzen, in welcher Reihenfolge eine gegebene Anzahl neu geborner Kinder nach und nach absterben werde, sondern hat die Angaben darüber der Erfahrung zu entlehnen; weswegen der Praktiker bei seinen Arbeiten die Sterblichkeits-Tabellen zu Grunde legt, welche dergleichen Erfahrungen in mehr oder minder großer Zahl und mehr oder minder wissenschaftlich bearbeitet, aufgezeichnet enthalten. Mit ihrer Hülfe berechnet man, wie solches im ersten Abschnitt vielseitig geschehen, zunächst die wahrscheinlichen Ausgaben eines jeden Jahres, welche der Verein bei einer sehr großen Menge Versicherungen gleicher Art zu erwarten hat, und hieraus die wahrscheinliche Größe der Gesammtausgaben für den ganzen Verlauf des Geschäfts.

Die Einnahmen sind nun ihrerseits so zu bestimmen, daß sie den Ausgaben das Gleichgewicht halten. Um hierzu zu gelangen, sind zunächst die Bedingungen festzusetzen, nach welchen die Einzahlung vor sich gehen solle und welche, außer den im ersten Abschnitte aufgeführten und als undurchführbar oder ungenügend zurückgewiesenen Einkassirungs-Methoden, noch vielerlei Art sein können. Welche Bedingungen man aber auch vorschreiben wollte, so theile ich die Einnahmen in solche ein, die dem Versicherungsverein mit absoluter,

und in solche, die ihm nur mit relativer Gewißheit zugehen, wobei es sich alsdann von selbst versteht, daß der Versicherungskontrakt so gestellt werden kann, daß er bald auf die eine, bald auf die andere Art der Einzahlung laute, bald aber auch beide Arten mit einander verbunden werden. Die Einzahlung mit absoluter Gewißheit nennt man die Kapitals-Einzahlung; sie geschieht dann, wenn der Versicherer für die Versicherung entweder den vollen Betrag mit einem Male einzahlt, oder doch dem Vereine die Sicherheit darbietet, daß der Betrag, unter Hinzurechnung der Verzugszinsen, in bestimmt festgesetzten Terminen unter allen Umständen werde eingezahlt werden, die Versicherung selbst mag noch ihren Fortgang haben oder bereits erloschen sein. Diese Art des Einkaufs ist die wohlfeilste und halte ich sie zugleich für die billigste von allen, weil so wenigstens alle Mitglieder einer und derselben Kategorie denselben Betrag einzahlen und es sich für sie also nur noch um den früheren oder späteren Empfang des bedungenen Kapitals handelt; das Risico ist, so zu sagen, nur ein einseitiges. Leider pflegen indeß Personen, denen eine Versicherung Bedürfniß ist, nicht im Stande zu sein, den Preis mit einem Male zu entrichten, oder auch nur dem Vereine Bürgschaft dafür zu stellen, daß derselbe in mehreren bestimmten Terminen mit Sicherheit eingehen werde. Die Versicherungsvereine sehen sich daher größtentheils genöthigt, sich mit relativ gewissen Einnahmen oder mit Beitragszahlungen zu begnügen, indem sie fordern, daß der Versicherer während der ganzen Dauer der Versicherung, oder auch nur während einer bestimmten Reihe von Jahren, falls die Versicherung bis dahin noch nicht zum Austrage gekommen ist, festgesetzte terminliche Beiträge zu zahlen habe. Hier ist das Risico ein zweifaches, da dem Vereine nicht allein die Möglichkeit bevorsteht, daß er das versicherte Kapital früher herauszuzahlen habe und die Zinsen desselben früher verliere, als er durchschnittlich erwartete, sondern auch, daß er für dasselbe während der kürzeren Dauer der Versicherung nur eine geringere Entschädigung erhalte. Diese Art des Vergleichs vertheuert natürlich die Versicherung für diejenigen Mitglieder, welchen der Zufall die längere Mitgliedschaft zuweist.

Der hier aufgestellte Unterschied zwischen Kapitals- und Beitragszahlung weicht von demjenigen, welcher gewöhnlich angegeben wird, etwas ab, weil mir der letztere logisch nicht stichhaltig erscheint. Man pflegt nämlich zu sagen, daß Kapitalszahlung stattfinde, wenn der Versicherungspreis mit einem Male, Beitragszahlung dagegen, wenn in bestimmten Terminen bestimmte Raten, so weit die Versicherung noch fortdauert, gezahlt werden. Allein wenn dem Vereine Sicherheit gewährt und der Zinsausfall entschädigt wird, warum soll er darauf nicht eingehen, daß ihm das Kapital in mehreren Raten, auch während des Verlaufs von fünf oder zehn Jahren gezahlt werde? erleichtert er sich dadurch doch die Verwaltung. Andrerseits, wenn es möglich ist, einen Verein ganz

solid so einzurichten, daß die Beiträge nicht während der ganzen Dauer der Versicherung, sondern nur für eine bestimmte Reihe von Jahren gezahlt werden, wenn in der That Vereine existiren, bei denen man nur in den ersten vierzig, dreißig oder zwanzig Jahren zu zahlen hat: warum sollte man nicht auf zehn oder fünf Jahre herunter gehen können, und welcher Unterschied findet nun statt zwischer dieser und jener Art der Zahlung? — Offenbar der, daß der Verein im ersteren Falle die Beiträge nur so lange empfängt, als die Versicherung selbst fortdauert, während im letzteren Falle dem Vereine der bedungene Preis unter allen Umständen gesichert ist. —

Die Beitragszahlung kann nun so festgestellt werden, daß die Beiträge während der ganzen Zahlungsperiode dieselben bleiben, oder daß diese Beiträge mit der Dauer der Mitgliedschaft wachsen, oder endlich, daß sie nach und nach abnehmen. Die erste Einrichtung ist die gewöhnlichste, ja man könnte fast sagen die einzige, welche in der Praxis vorkommt, während die zweite Art die unbilligste und für die später zur Hebung kommenden Mitglieder die theuerste sein würde. Giebt man aber zu, daß die Kapitalseinzahlung die billigste und wohlfeilste ist, so unterliegt es keinem Zweifel, daß ihr die Zahlungen in herabgehenden Beiträgen am nächsten kommen und halte ich es für wünschenswerth, daß solide Versicherungsanstalten diese Einrichtung neben der ersten einführten, so daß die Beiträge etwa von fünf zu fünf oder von zehn zu zehn Jahren fielen und nach einer gewissen Reihe von Jahren oder bei einem gewissen Alter des Versicherers ganz aufhörten.

Jeder solid eingerichtete Versicherungsverein nimmt, wie schon gesagt, in der ersten Zeit einer gemachten Versicherung mehr ein, als er dafür auszuzahlen hat, wodurch sich Ueberschüsse ansammeln, die einstweilen entbehrt werden können und deshalb zum Vortheil der Interessenten zinstragend angelegt werden. Dieser Spaarkassengewinn ist häufig in Verhältniß zu dem eingezahlten Gelde nicht unbedeutend und hängt der größere oder geringere Ertrag von dem höhern oder niedrigern Procentsatze ab, zu welchem man nach Zeit und Gelegenheit die disponiblen Kapitalien unterzubringen vermag. Jedenfalls hat aber der Rechner bei Feststellung des Gleichgewichts zwischen den absolut oder relativ sichern Einnahmen und Ausgaben die zu erwartenden Zinsen mit zu veranschlagen. Hiernach geschieht es, daß zu der ersten Grundlage der Berechnung — zur Mortalitäts-Tabelle, — noch eine zweite — der Zinsfuß — hinzutritt, so daß aus der Vereinigung beider alles Uebrige mit mathematischer Gewißheit hervorgeht.

Das Grundprincip des Spaarkassenwesens beruht darauf, kein Geld, oder doch so wenig wie irgend möglich, ungenutzt liegen zu lassen. Hieraus folgt alsdann auch, daß die Spaarkassen, und eben so die Versicherungsanstalten, darauf zu sehen haben, daß alle fällig gewordenen Gelder, namentlich auch die

Zinsen der ausgeliehenen Kapitalien, pünktlich eingehen und sofort wieder zinstragend angelegt werden, weswegen man bei solchen Instituten die eingegangenen Zinsen des einen Jahres schon für das nächste Jahr als Kapital anzusehen und dessen Zinsgewinn mit zu veranschlagen, d. h. das durch die Verzinsung hervorgebrachte Anwachsen der Kapitalien nicht nach einfachen Zinsen, sondern nach Zinseszinsen zu berechnen hat. Es ist wiederholentlich, namentlich auch bald nach Errichtung der Preußischen Renten-Versicherungs-Anstalt, zur Sprache gekommen, in wiefern man berechtigt sei, nach Zinseszinsen zu rechnen und pflegt dagegen eingewandt zu werden, daß die Landesgesetze verbieten, Zinsen von Zinsen zu fordern, so wie, daß es doch nicht möglich sei, die kleinsten Bestände zinsbar zu machen. Allein diese Einwendungen dürften nicht eben erheblich sein. Die Landesgesetze (z. B.: Allgem. Landrecht Th. I, Tit. 11, §§ 818 und 819) sprechen offenbar nur von rückständigen Zinsen, untersagen also keinesweges die prompte Einziehung und sofortige Benutzung fällig gewordener Zinsen, wie denn auch die Landesbanken selbst kein Bedenken haben, für herausgezahlte Zinsen auf der Stelle neue Bankbillets zu geben. Was aber das Unterbringen kleiner Zinsbestände betrifft, so ist es ja eben die Aufgabe solcher Kasse, dergleichen von allen Seiten zufließende kleine Beträge zu einem größern Kapitale zu vereinigen. Selbst wenn die Zinsen sofort zu den laufenden Ausgaben zu verwenden sind, hat man für sie die Zinsen mit zu veranschlagen, indem sie es möglich gemacht haben, das Stammkapital unangetastet zu lassen und zum vollen Zinsertrage ferner zu benutzen.

Da man dergleichen Rechnungen nicht nach ausgemünztem Gelde, sondern viel bequemer in Decimalbruchtheilen eines Thalers auszuführen und erst das Resultat wiederum in gemünztes Geld zu übertragen pflegt, so hat man zunächst darauf Bedacht zu nehmen, solche Uebertragungen mit Schnelligkeit und Sicherheit bewirken zu können, wozu die folgende

Reduktions-Tabelle

zwischen Silbergroschen, Pfennigen und Decimalbruchtheilen eines Thalers

Pfg.	— Sgr.	1 Sgr.	2 Sgr.
		3194	6528
0	0.00000	0.03333	0.06667
	0139	3472	6806
1	0278	3611	6944
	0417	3750	7083
2	0556	3889	7222
	0694	4028	7361
3	0833	4167	7500
	0972	4306	7639
4	1111	4444	7778
	1250	4583	7917
5	1389	4722	8056
	1528	4861	8194
6	1667	5000	8333
	1806	5139	8472
7	1944	5278	8611
	2083	5417	8750
8	2222	5556	8889
	2361	5694	9028
9	2500	5833	9167
	2639	5972	9306
10	2778	6111	9444
	2917	6250	9583
11	0.03056	0.06389	0.09722
			9861

dient. Da nämlich 3 Sgr. = 0.1 Thlr. sind, so ist es leicht, jede durch 3 theilbare Anzahl an Silbergroschen in Zehntel eines Thalers vermittelst der Division durch 3, so wie die Zehntel eines Thalers vermittelst der Multiplikation mit 3 in Silbergroschen zu verwandeln und hat man es nur noch mit weniger als 3 Sgr. oder weniger als einem Zehntel des Thalers zu thun, wofür man die entsprechenden Werthe in der Reduktions-Tabelle neben einander gestellt findet. Es sind dabei fünf Decimalstellen angesetzt worden, obgleich man in der Regel mit dreien vollkommen ausreicht; hat man indeß sehr viele Posten zu addiren oder mit einer großen Zahl zu multipliciren, so thut man wohl, eine oder zwei Decimalen mehr in Anwendung zu bringen. Die zwischen den ganzen Pfennigen stehenden kleinen Ziffern beziehen sich auf die halben Pfennige und sollte man bei jeder Reduktions-Tabelle eine derartige Einrichtung treffen, weil man daraus bei der Uebersetzung der Decimalbruchtheile eines Thalers in gemünztes Geld ohne alle Rechnung sehen kann, ob man es mit weniger oder mehr als einem halben Pfennige zu thun habe, um jenes für nichts, dieses aber für einen vollen Pfennig in Ansatz zu bringen. So sind nun z. B.:

362 Thlr. 28 Sgr. 4 Pfg. = 362.944 Thlr. und 764.64 Thlr. = 764 Thlr. 19 Sgr. 2 Pfg.

Tragen 100 im Laufe eines Jahres resp. 3, $3\frac{1}{2}$, 4 Zinsen und schlägt man dieselben am Ende des Jahres zum Kapital, so ist dieses dadurch resp. auf 103, 103.5, 104 angewachsen und da solches nach dem Grundsatze einer sorgfältigen Verwaltung für jeden noch so kleinen Theil von 100 gilt, so wird jede Einheit durch die Jahreszinsen nach dem Verhältniß von resp. $\frac{103}{100}$, $\frac{103.5}{100}$, $\frac{104}{100}$, oder was dasselbe ist, auf 1.03, 1.035, 1.04 vergrößert. So werden z. B.: aus 362 Thlr. 28 Sgr. 4 Pfg. binnen Jahresfrist resp.

362.944 Thlr. × 1.03	= 373.832 Thlr.,	d. i.	373 Thlr.	25 Sgr.	— Pfg.
362.944 „ × 1.035	= 375.647 „	„	375 „	19 „	5 „
361.944 „ × 1.04	= 377.462 „	„	377 „	13 „	10 „

so daß die Jahreszinsen resp. 10 Thlr. 26 Sgr. 8 Pfg. 12 Thlr 21 Sgr. 1 Pfg. und 14 Thlr. 15 Sgr. 6 Pfg. betragen, wie man solches auch nach der Zinsrechnung findet.

Die Faktoren, wie 1.03, 1.035, 1.04 sind für die Berechnung nach Zinseszinsen sehr wichtig, indem man vermittelst derselben das Resultat für jede beliebige Anzahl von Jahren fast mit derselben Leichtigkeit aufzufinden vermag, wenn man dieselben je nach den verschiedenen Modalitäten für den Lauf eines Jahres festgesetzt hat. Man nennt deshalb einen solchen Faktor den Zinsfuß und ist sogleich zu ersehen, daß der Zinsfuß aus dem Procentsatze gefunden wird, wenn man den letztern durch 100 dividirt und zum Quotienten 1 addirt; daß man dagegen den Procentsatz aus dem Zinsfuße findet, wenn man vom letztern 1 subtrahirt und die Differenz mit 100 multiplicirt. Eben so nennt man dasjenige Kapital, dessen Zinsertrag nach dem vorliegenden Zinsfuße 1 ist, das Grundkapital. So ist das Grundkapital bei 3%: $33\frac{1}{3}$ Thlr., bei $3\frac{1}{2}$%: $28\frac{4}{7}$ Thlr., bei 4%: 25 Thlr.

Soll man nun den Stand des Kapitals am Ende des zweiten Jahres finden, so hat man den Ertrag am Ende des ersten Jahres von neuem mit dem Zinsfuße, d. h. das ursprüngliche Kapital zweimal damit zu multipliciren. Ferner findet man das Anwachsen oder den künftigen Werth des Kapitals nach dreijähriger, vierjähriger, fünfjähriger Verzinsung u. s. w., wenn man den gegebenen gegenwärtigen oder baaren Werth dreimal, viermal, fünfmal hintereinander mit dem Zinsfuße multiplicirt. Hat man indessen eine solche Reihe Multiplicationen auszuführen, so ist es gleichgültig, mit welchem Faktor man die Rechnung beginnt, mit welchem man aufhört, weswegen die Multi-

plication mit dem Zinsfuße zuerst vorgenommen und ein für allemal ausgeführt werden kann. Man erhält auf diese Weise z. B.:

	bei 3%	bei 3½%	bei 4%
	1.03 309	1.035 3105 5175	1.04 416
für das 2te Jahr:	1.0609 31827	1.071225 3213675 535613	1.0816 43264
„ „ 3te „	1.092727 3278181	1.10871788 3326153 554359	1.124864 4499456
„ „ 4te „	1.12550881 3376526	1.14752300 3442569 573761	1.16985856 4679434
„ „ 5te „	1.15927407 3477822	1.18768630 3563059 593843	1.21665290 4866612
„ „ 6te „	1.19405229 3582157	1.22925532 3687766 614628	1.26531902 5061276
„ „ 7te „	1.22987386 3689622	1.27227926 3816838 636140	1.31593178 5263727
„ „ 8te „	1.26677008 u. s. w.	1.31680904 u. s. w.	1.36856905 u. s. w.

wobei man sich, da die Rechnung bis acht Decimalen geführt ist, auf die Richtigkeit der sechs ersten verlassen kann. Man nennt diese Faktoren **Aufzinsungsfaktoren** und findet dieselben für 100 Jahr Tab. IV verzeichnet. Vermittelst dieser Faktoren berechnet man z. B., daß 362.94 Thlr. in neunzehn Jahren durch die Verzinsung anwachsen

bei 3% auf 362.94 Thlr. × 1.753506 = 636.417 Thlr.
„ 3½% „ 362.94 „ × 1.922501 = 697.752 „
„ 4% „ 362.94 „ × 2.106849 = 764.660 „

Um das langsamere oder schnellere Wachsen des Geldes vermittelst der Verzinsung zu beurtheilen, nimmt man am besten solche Zahl der Jahre, in

welcher sich das Kapital nach einer ganzen Zahl vervielfältigt hat, und findet alsdann nach Tab. IV, daß

	bei 3%	bei 3½%	bei 4%
	zwischen Jahren		
Verdoppelung	23—24	20—21	17—18
Verdreifachung	37—38	31—32	28—29
Vervierfachung	46—47	40—41	35—36
Verfünffachung	54—55	46—47	41—42
Versechsfachung	60—61	52—53	45—46
Versiebenfachung	65—66	56—57	49—50
Verachtfachung	70—71	60—61	53—54
Verneunfachung	74—75	63—64	56—57
Verzehnfachung	77—78	66—67	58—59

eintritt, woraus man sieht, daß der Zinsgewinn anfangs zwar wenig erheblich ist, daß er sich aber von Jahr zu Jahr vergrößert und für den Verlauf mehrerer Jahre schon ein halbes Procent Bedeutung erhält.

Betrachtet man die Aufzinsungsfaktoren hinsichtlich ihrer Entstehung, so ist z. B. bei 3%

der erste $(1.03)^1 = 1.03$
" zweite $(1.03)^2 = 1.03 \times 1.03$
" dritte $(1.03)^3 = 1.03 \times 1.03 \times 1.03$
" vierte $(1.03)^4 = 1.03 \times 1.03 \times 1.03 \times 1.03$
" fünfte $(1.03)^5 = 1.03 \times 1.03 \times 1.03 \times 1.03 \times 1.03$
u. s. w. u. s. w.

so daß **nicht nur jeder folgende Aufzinsungsfaktor aus dem vorhergehenden durch nochmalige Multiplication mit dem Zinsfuße entsteht, sondern auch, wenn man die Aufzinsungsfaktoren zweier Zeiträume multiplicirt, ein neuer Aufzinsungsfaktor für denjenigen Zeitraum, der die beiden früheren umfaßt, hervortritt**, was sich durch die gewählte kürzere Bezeichnung treffend darstellen läßt. So ist z. B.

$(1.03)^7 \times (1.03)^{12} = (1.03)^{19}$ d. h. $1.229874 \times 1.425761 = 1.753506$
$(1.035)^{10} \times (1.035)^{15} = (1.035)^{25}$ d. h. $1.401599 \times 1.675349 = 2.363245$
$(1.04)^{16} \times (1.04)^{19} = (1.04)^{35}$ d. h. $1.872981 \times 2.106849 = 3.946089$

wie solches die Tab. IV bestättigt.

Durch die Verzinsung nach zusammengesetzten Zinsen wächst demnach ein Kapital in geometrischer Progression, während es bei einfacher Verzinsung nur

in arithmetischer Progression der Fall ist, weil der zinstragende Grundstock immer derselbe bleibt.

Es ist hier zugleich der Ort, die Seite 60 abgebrochene Betrachtung zu vervollständigen. Sterben nämlich während längerer Zeit von ursprünglich funfzigjährigen Personen jährlich 3% und treten am Anfange jedes Jahres für die Verstorbenen des nächst vorhergehenden eine gleiche Anzahl Personen desselben Anfangsalters bei, so ist der Procentsatz der Sterbenden für diese Neubeigetretenen, also der Procentsatz des Procentsatzes der ursprünglichen Mitglieder derselbe, wie der für die letztern selbst, so daß die Anzahl der jährlichen Todesfälle auf dieselbe Weise zunehmen wird, wie ein Kapital bei zusammengesetzter Verzinsung. Da dieses nun a. a. O. für die ersten zwölf Geschäftsjahre der Fall war, so mußte auch eben so lange die Anzahl der jährlichen Todesfälle in geometrischer Progression wachsen. Verändert sich dagegen der Procentsatz der jährlich Sterbenden zunächst für die ursprünglichen, dann für die neu beigetretenen Mitglieder, so wird sich die Progression der Sterbenden in gleichem Sinne ändern. Will man die dortige Aufgabe, die Zahl der jährlich Sterbenden bei unveränderlicher Mitgliederzahl zu finden, in die gegenwärtige Sprache übertragen, so lautet sie: Es verlangt Jemand ein Kapital, unter der Bedingung, daß der jährliche Zinsfuß während der Dauer des Darlehns sich nach einer gewissen Regel ändere; daß am Ende eines jeden Jahres eben so viel an entliehenem Kapital zurückgezahlt werde, als die laufenden Jahreszinsen betragen; daß dagegen die Jahreszinsen selbst als neues Darlehn übernommen werden, bei dessen Verzinsung dieselbe Regel befolgt wird, wie beim ursprünglichen Kapitale: wieviel wird der Darlehnsnehmer in jedem gegebenen Jahre zurückzuzahlen haben? Wie man sieht, bleibt hier die Größe des entnommenen Kapitals Jahr aus Jahr ein dieselbe und nur die Art und Weise des Verzinsens erfolgt nach der Regel einer wiederkehrenden Reihe. Die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe ist aber, wie gesagt, noch nicht gefunden.

Bisher ist vorausgesetzt worden, daß die Zinszahlung, so wie das Kapitalisiren der Zinsen, erst am Ende eines jeden Jahres geschehe; dieses ist aber gegen den wirklichen Geschäftsgang, nach welchem z. B. bei öffentlichen Schuldverschreibungen die Zinszahlung halbjährlich, bei vielen Hypotheken-Darlehnen vierteljährlich zu geschehen pflegt, so daß also die Kassen mit einem größern oder geringern Theile der Jahreszinsen schon im Laufe des Jahres selbst wiederum Geschäfte machen können, und bleibt nun die Einwirkung zu untersuchen, die solches auf die Vermehrung des Kapitals ausübt.

Man könnte 1) die Zinsen, so oft dieselben im Laufe eines Jahres eingehen, zum Kapitale schlagen und so schon von einem Eingangstermine bis zum andern eine Verzinsung eintreten lassen, so daß

bei halbjährlicher Zinszahlung
der terminliche Zinsfuß 1.015, 2.0175, 1.02,
der jährliche also resp.

$$(1.015)^2 = 1.030225,$$
$$(1.0175)^2 = 1.035306,$$
$$(1.02)^2 = 1.040400$$

und bei vierteljährlicher Zinszahlung
der terminliche Zinsfuß 1.0075, 1.00875, 1.01,
der jährliche also resp.

$$(1.0075)^4 = 1.030339,$$
$$(1.00875)^4 = 1.035463,$$
$$(1.01)^4 = 1.040604$$

wäre. Nach dieser Art zu rechnen würden die Gelder, wie aus der nachfolgenden

Vergleichung über das zinseszinsliche Anwachsen der Kapitalien

	3 Procent			3½ Procent			4 Procent		
	jährliche	halbjährliche	vierteljährliche	jährliche	halbjährliche	vierteljährliche	jährliche	halbjährliche	vierteljährliche
	Verzinsung.			Verzinsung.			Verzinsung.		
5	1.159	1.161	1.161	1.188	1.189	1.190	1.217	1.219	1.220
10	1.344	1.347	1.348	1.411	1.415	1.417	1.480	1.486	1.489
15	1.558	1.563	1.566	1.675	1.683	1.687	1.801	1.811	1.817
20	1.806	1.814	1.818	1.990	2.002	2.008	2.191	2.208	2.217
25	2.094	2.105	2.111	2.363	2.381	2.390	2.666	2.692	2.705
30	2.427	2.443	2.451	2.807	2.832	2.845	3.243	3.281	3.300
35	2.814	2.836	2.846	3.334	3.368	3.386	3.946	4.000	4.027
40	3.262	3.291	3.305	3.959	4.000	4.031	4.801	4.875	4.914
45	3.782	3.819	3.838	4.702	4.765	4.797	5.841	5.943	5.996
50	4.384	4.432	4.457	5.585	5.668	5.711	7.107	7.245	7.316

zu ersehen, besonders für längere Zeiträume allerdings mehr rentiren, als bei dem jährlichen Zuschlage der Zinsen zum Kapitale; indeß pflegt man keine Anwendung davon zu machen, weil die dabei vorzunehmenden Rechnungen sehr verwickelt werden.

Aus dem letztern Grunde bedient man sich 2) eines gemischten Verfahrens, das darin besteht, alle im Laufe eines Jahres eingehenden Gelder während der Dauer desselben einfach zu verzinsen und die Kapitalisirung erst am Ende des Jahres eintreten zu lassen.

Diese Voraussetzung bewirkt keine Veränderung in der vorhergehenden halbjährlichen Kapitalisirung; denn da die am Schlusse des ersten halben Jahres eingehenden Zinsen während der zweiten Hälfte des Jahres Zinsen tragen sollen, so ist es ganz dasselbe, ob diese Verzinsung getrennt oder mit dem Stammkapitale verbunden vor sich geht. Anders stellt sich jedoch die Sache bei der vierteljährlichen Zinszahlung, weil nun von den eingegangenen Zinsen vor Ende des Jahres die Zinsen nicht wieder kapitalisirt werden sollen. Hat man z. B. 100 zu 3 % verzinslich ausgeliehen, so erhält man am Ende des ersten Vierteljahres $\frac{3}{4}$ Zinsen, welche ihrerseits bis zum Schlusse des Jahres $\frac{3}{4} \times \frac{3}{100} \times \frac{3}{4}$, d. h. $\frac{3 \times 3 \times 3}{1600}$ Zinsen liefern; nämlich $\frac{3}{4}$ würden im Laufe eines vollen Jahres $\frac{3}{4} \times \frac{3}{100}$ geben, also während der noch bevorstehenden $\frac{3}{4}$ Jahre nur $\frac{3}{4}$ mal diesen Betrag. Eben so liefern die am Ende des zweiten Vierteljahres eingehenden Zinsen bis Ende des Jahres $\frac{3 \times 3 \times 2}{1600}$ Zinsen, während die am Ende des dritten Vierteljahres eingehenden Zinsen nur $\frac{3 \times 3 \times 1}{1600}$ bringen und endlich die am Ende des vierten Vierteljahres eingehenden gar nicht mehr zur Verzinsung gelangen und der Zinsgewinn für das ganze Jahr $3 + \frac{3 \times 3 \times 3}{1600} + \frac{3 \times 3 \times 2}{1600} + \frac{3 \times 3 \times 1}{1600}$ ist.

Wären die Zinsen 3½ oder 4 von 100, so hätte dieses nur Einfluß auf die beiden vordern Faktoren der Zähler, weil die dritten Faktoren 3, 2, 1 sich auf die noch bevorstehende Anzahl von Vierteljahren beziehen und für jeden Zinssatz dieselben sind, so daß man Zinsen erhält

$$\text{bei } 3\,\% \text{ p. a. } 3 + \frac{3 \times 3}{1600} \times 6 = 3.03375$$
$$\text{„ } 3\tfrac{1}{2}\,\% \text{ „ „ } 3.5 + \frac{3.5 \times 3.5}{1600} \times 6 = 3.54594$$
$$\text{„ } 4\,\% \text{ „ „ } 4 + \frac{4 \times 4}{1600} \times 6 = 4.06000.$$

Dividirt man diese Zinsen durch 100 und addirt zum Quotienten 1, so ergeben sich die jährlichen Zinsfüße

bei 3 % p. a. 1.0303375
„ $3\frac{1}{2}$ % „ „ 1.0354594
„ 4 % „ „ 1.0406000

welche von den vorhergehenden so wenig verschieden sind, daß sie nur bei längerer Zeitdauer einen merklichen Einfluß auszuüben vermögen. Unter Zugrundelegung dieser Zinsfüße kann man nun entweder durch successive Multiplicationen oder vermittelst der Logarithmen die betreffenden Aufzinsungsfaktoren berechnen, was aber aus dem Grunde unterblieben ist, weil sich finden wird, daß die bei Versicherungsanstalten vorkommenden Rechnungen ohne diese Faktoren ausgeführt werden können.

Außer den beiden genannten Verzinsungsarten sind noch mehrere andere in Vorschlag gebracht, die z. B. darin bestehen, von den Zinsen nur einfache

Zinsen zu berechnen; die Zinsen der Zinsen nach einem geringern Zinsfuß zu bemessen als die Zinsen des Kapitals selbst; die Zinsen einige Zeit nach ihrem Eingange zinslos zu lassen u. s. w.; indessen haben alle diese Festsetzungen etwas Willkührliches und sind von keinem praktischen Interesse, weswegen dieselben übergangen werden können.

Eben so gut, wie man aus dem gegenwärtigen oder baaren Werthe eines Kapitals den künftigen Werth desselben berechnet, kann man für ein nach Jahren fällig werdendes Kapital den gegenwärtigen Werth, d. h. ermitteln wollen, wie hoch sich ein solches Kapital gegenwärtig zu belaufen habe, damit es während der gegebenen Zeit durch das Hinzuschlagen der Zinsen und Zinseszinsen zu dem fällig werdenden Betrage anwachse. Wie diese Aufgabe die entgegengesetzte der frühern ist, so wird man auch zu ihrer Auflösung den entgegengesetzten Weg einzuschlagen, also den gegebenen künftigen Werth durch den betreffenden Aufzinsungsfaktor zu dividiren haben, wobei es für die Rechnung keinen weitern Unterschied macht, in welcher Art mit den Zinsen verfahren werden solle, nur daß man den Aufzinsungsfaktor den Umständen entsprechend zu wählen hat. Da man indeß schneller zu multipliciren als zu dividiren pflegt, so wandelt man für das Abzinsen oder Discontiren die Aufzinsungsfaktoren in solche um, mit denen man gleichfalls multipliciren kann, was sehr einfach ist. Man hat nämlich

$$\frac{1}{(1.03)^1} = \frac{1}{1.03}$$

$$\frac{1}{(1.03)^2} = \frac{1}{1.03 \times 1.03} = \frac{1}{1.03} \times \frac{1}{1.03}$$

$$\frac{1}{(1.03)^3} = \frac{1}{1.03 \times 1.03 \times 1.03} = \frac{1}{1.03} \times \frac{1}{1.03} \times \frac{1}{1.03}$$

$$\frac{1}{(1.03)^4} = \frac{1}{1.03 \times 1.03 \times 1.03 \times 1.03} = \frac{1}{1.03} \times \frac{1}{1.03} \times \frac{1}{1.03} \times \frac{1}{1.03}$$

u. s. w. u. s. w.

und ähnlich für $3\frac{1}{2}\%$ und 4%, so daß sich die in Anwendung zu bringenden Abzinsungs- oder Discontirungs-Faktoren auf eine zweifache Art berechnen lassen, nämlich entweder dadurch, daß 1 durch jeden einzelnen Aufzinsungsfaktor dividirt, oder dadurch, daß zuerst 1 durch den Zinsfuß, der Quotienten wiederum, und sofort jeder neue Quotient abermals durch den Zinsfuß dividirt wird. Gewöhnlich pflegt man bei der Berechnung diesen letztern Weg einzuschlagen und von Zeit zu Zeit die Richtigkeit der Rechnung durch direkte Division mit dem Aufzinsungsfaktor in 1 zu prüfen. Tab. V enthält die Werthe für 3%, $3\frac{1}{2}\%$, 4%, 5%, so daß z. B. der gegenwärtige oder baare Werth von 842 Thlr. nach zwölf Jahren zahlbar

bei 3 % . . . 842 Thlr. × 0.701380 = 590.562 Thlr.
„ 3½ % . . 842 „ × 0.661783 = 557.221 „
„ 4 % . . . 842 „ × 0.624597 = 525.911 „

ist. Tab. 50, Col. d und e enthalten eine direkte Probe solcher Rechnungen.

Aus der obigen Liste über die Zeit der Vervielfachung eines Kapitals, so wie aus diesem Beispiele ersieht man zugleich, daß bei gleichem nominellen Kapitale und gleicher Zeitdauer der künftige Werth eines Kapitals um so größer, der gegenwärtige Werth um so kleiner ist, desto größer der Zinsfuß angenommen wird. Diese Regel gilt allgemein für jede Art von Zahlungen und hat darin ihren Grund, daß ein höherer Zinsfuß mehr Zinsen abwirft, als ein geringerer.

Zugleich folgt aus der Bildung der Abzinsungsfaktoren, daß jeder folgende aus dem vorhergehenden vermittelst nochmaliger Division durch den Zinsfuß entsteht, und daß man durch die Multiplication zweier Abzinsungsfaktoren einen neuen für einen Zeitraum erhält, der die Zeit für beide Abzinsungsfaktoren zusammengenommen umfaßt, ganz so, wie es vorher für die Aufzinsungsfaktoren der Fall war.

Vermittelst der Auf- oder der Abzinsung ist man nun im Stande, den gegenseitigen Werth zweier Kapitalien, die zu verschiedenen Zeiten fällig werden, zu schätzen, indem man beide Zahlungen auf einen und denselben Fälligkeitstermin überträgt, wobei es ganz gleichgültig ist, ob man die frühere Zahlung auf den spätern, oder die spätere Zahlung auf den frühern, oder endlich beide Zahlungen auf einen und denselben dritten Termin überzinst. Zwar ist diese Abschätzung in so fern relativ, als es darauf ankommt, welchen Zinsfuß man dabei zu Grunde legen will, indeß liegt dieses gerade in der Natur der Sache; denn abgesehen von der Dringlichkeit des augenblicklichen Bedarfs wird ein sofort zahlbares Kapital für denjenigen mehr Werth haben, welcher dasselbe mit großem Gewinne zu verwenden versteht, als für einen andern, der diesen Nutzen nicht daraus zu ziehen vermag. Dessenungeachtet ist aber der allgemeine Grundsatz nicht zu läugnen, daß ein Kapital um so höher zu veranschlagen sei, desto früher es zur Auszahlung kommt, und zwar der Zinsen wegen, welche man in der Zwischenzeit dabei gewinnt oder entbehrt. Wenn dieses für größere Kapitalien richtig ist, so wird es auch nach dem, was Seite 147 gesagt ist, im Allgemeinen und besonders von Seiten der Versicherungsanstalten in Bezug auf die kleinsten Beträge nicht zu leugnen sein. Dies scheint man meistentheils bei Begründung der Rentenanstalten übersehen und Geld für Geld gerechnet zu haben, mag dasselbe früher oder später zur Zahlung kommen, und gleichwohl können die meisten dieser Anstalten nicht leugnen, daß sie dem Principe nach die fortlaufenden Zinsen eines Kapitals höher veranschlagen als das

Kapital selbst. Die Außerachtlassung des durch den Fälligkeitstermin bedingten Werths der Gelder hat es dahin gebracht, daß bei vielen Rentenanstalten die höheren Altersklassen auf Unkosten der jüngeren bevorzugt worden sind.

Die Versicherungsanstalten im Allgemeinen befinden sich stets in der Lage, bei einem und demselben Versicherungsgeschäft zu den verschiedensten Zeiten Gelder zu empfangen oder auszuzahlen. Um eine richtige Bilanz zwischen den Einnahmen und Ausgaben schneller und sicherer zu finden, als es Tab. 50, 51, 52 geschehen, namentlich auch, um alle Nebenumstände, die bei Entwerfung jener Tabellen unberücksichtigt gelassen wurden, in Rechnung stellen zu können, ist es erforderlich, alle jene in verschiedenen Terminen eingezahlten und ausgegebenen Gelder auf einen und denselben Zahlungstermin zu überzinsen. Welches dieser Termin sein soll, bleibt im Allgemeinen gleichgültig; denn sind zwei Geldbeträge zu irgend einer Zeit einander gleich, so ist dieses auch bei derselben zinslichen Behandlung zu jeder beliebigen andern Zeit der Fall. Indeß dürften sich doch der Anfang oder das Ende des Geschäfts als die natürlichen Anknüpfungspunkte darbieten, wie denn auch Tab. 51 und 52 das Ende des Geschäfts zur Festsetzung des Gleichgewichts benutzt worden ist, wiewohl dem nichts entgegen gestanden hätte, zuvor Ausgaben und Einnahmen auf den Geschäftsbeginn zurückzuzinsen und nach den gegenwärtigen Werthen die Bilanz festzustellen. Bei Tab. 50 dagegen, so wie überall da, wo sofort beim Eintritt Zahlung geleistet werden soll, ist man gezwungen, auf den Anfang des Geschäfts zurückzukommen, weswegen man ein für allemal alle Zahlungen auf den Anfang des Geschäfts zurückzinst und dieselben deshalb mit dem Namen „baare Werthe" bezeichnet. Aus diesem Grunde spielen bei den nachfolgenden Berechnungen die Abzinsungsfaktoren eine wichtigere Rolle als die Aufzinsungsfaktoren, von denen man nur selten Gebrauch zu machen pflegt.

Zeitrenten nennt man diejenigen Zahlungen, die unter allen Umständen, der ursprüngliche Berechtigte mag noch leben oder inzwischen gestorben sein, für eine bestimmte Zeit und in bestimmt festgesetzten Terminen gezahlt werden. Dabei heißt eine solche Zeitrente eine unveränderliche, steigende oder fallende, je nachdem der terminlich zu zahlende Betrag fortwährend derselbe bleiben oder nach einer festgesetzten Regel größer oder kleiner werden soll. Unter dem baaren Werthe einer Zeitrente versteht man aber dasjenige Kapital, aus welchem und den Zinsen seiner Bestände die ganze Zeitrente dergestalt gezahlt werden kann, daß mit der letzten Zahlung das Kapital verausgabt ist.

Soll die Zeitrente eine unveränderliche und, wie hier immer vorausgesetzt wird, am Anfange eines jeden Termins zahlbar sein, so kann man zuvörderst den Betrag durch 1 bezeichnen und jährliche Zahlungstermine annehmen. Legt man nun den Zinsfuß 1.03 zu Grunde, so sind die baaren Werthe der Zahlun-

lungen am Anfange des ersten, zweiten, dritten, vierten Jahres u. s. w. resp. 1, $\frac{1}{(1.03)^1}$, $\frac{1}{(1.03)^2}$, $\frac{1}{(1.03)^3}$, $\frac{1}{(1.03)^4}$ u. s. w., so daß der baare Werth der ganzen Zeitrente

$$(7)\quad 1 + \frac{1}{1.03} + \frac{1}{(1.03)^2} + \frac{1}{(1.03)^3} + \frac{1}{(1.03)^4} + \cdots$$

ist, von welcher Reihe so viele Glieder zu nehmen, als Zahlungstermine festgesetzt sind. Da nun dasselbe für jeden andern Zinsfuß eben so der Fall ist, so sieht man, daß die baaren Werthe der Zeitrenten für einen gewissen Zinsfuß und jede beliebige Anzahl von Jahren gefunden werden, wenn man die dem Zinsfuße entsprechenden Abzinsungsfaktoren von oben herunter successive addirt. In Tab. VI sind die baaren Werthe der Zeitrenten für den Zinssatz von 3%, $3\frac{1}{2}$%, 4% und 5% enthalten.

Soll die Rente mit jährlich 1 nachbezahlt werden, so sind die baaren Werthe der jährlichen Zahlungen bei 3% resp. $\frac{1}{1.03}$, $\frac{1}{(1.03)^2}$, $\frac{1}{(1.03)^3}$, $\frac{1}{(1.03)^4}$ u. s. w., folglich der baare Werth der gesammten Zahlungen

$$\frac{1}{1.03} + \frac{1}{(1.03)^2} + \frac{1}{(1.03)^3} + \frac{1}{(1.03)^4} + \cdots$$

wo wiederum so viele Glieder zu nehmen, als Zahlungen ausgemacht worden sind. Den Werth der Reihe findet man aus Tab. VI, wenn man die hier verzeichneten Ganzen um eine Einheit erniedrigt, weil nur diese gegen die Reihe (7) fehlt.

Soll zwar wiederum der jährliche Betrag 1, aber nicht in einer, sondern in mehreren gleichen Zahlungen geleistet werden, so können auch diese Zahlungen entweder postnumerando oder pränumerando erfolgen. Geschieht die Nachbezahlung halbjährlich, so ist der jedesmalige Betrag $\frac{1}{2}$, und sind die baaren Werthe der Zahlungen im Laufe eines jeden Jahres in Beziehung auf den Anfang desselben resp. $\frac{1}{2\,(1.015)}$ und $\frac{1}{2\,(1.03)}$, da sie in der Mitte und am Ende des Jahres erfolgen; der Gesammtbetrag ist demnach

bei halbjährlicher Nachbezahlung

bei 3% . . . . $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1.015} + \frac{1}{1.03}\right) = 0.978048$

„ $3\frac{1}{2}$% . . . . $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1.0175} + \frac{1}{1.035}\right) = 0.974492$

„ 4% . . . . $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1.02} + \frac{1}{1.04}\right) = 0.970965.$

Da dieses nun für die Zahlungen eines jeden Jahres im Verhältniß zu den einzelnen Gliedern der Reihe (7) der Fall ist, so hat man den ganzen Werth dieser Reihe mit dem betreffenden Faktor zu multipliciren. So ist z. B.: der Werth einer Zeitrente, die zehn Jahr hintereinander mit halbjährlich $\frac{1}{2}$ nachbezahlt wird

bei 3% . . . . 8.786109 × 0.978048 = 8.5932
„ $3\frac{1}{2}$% . . . . 8.607687 × 0.974492 = 8.3881
„ 4% . . . . 8.435332 × 0.970965 = 8.1904.

Soll die Zahlung vierteljährlich postnumerando geschehen, so ist der jedesmalige Betrag $\frac{1}{4}$ und der baare Werth der ersten Vierteljahreszahlung bei 3% $\frac{1}{4\,(1.0075)}$, der zweiten Zahlung: $\frac{1}{4\,(1.015)}$, der dritten Zahlung: $\frac{1}{4\,(1.0225)}$ und endlich der vierten Zahlung: $\frac{1}{4\,(1.03)}$, so daß die Reihe (7) zu multipliciren ist

bei vierteljährlicher Nachbezahlung

bei 3% mit $\frac{1}{4} \times (\frac{1}{1.0075} + \frac{1}{1.015} + \frac{1}{1.0225} + \frac{1}{1.03}) = 0.981662$
„ $3\frac{1}{2}$% „ $\frac{1}{4} \times (\frac{1}{1.00875} + \frac{1}{1.0175} + \frac{1}{1.02625} + \frac{1}{1.035}) = 0.978683$
„ 4% „ $\frac{1}{4} \times (\frac{1}{1.01} + \frac{1}{1.02} + \frac{1}{1.03} + \frac{1}{1.04}) = 0.975726$

und z. B.: die vorhergehende zehnjährige Rente bei vierteljährlicher Nachbezahlung wäre:

bei 3% . . . . 8.786109 × 0.981662 = 8.6250
„ $3\frac{1}{2}$% . . . . 8.607687 × 0.978683 = 8.4242
„ 4% . . . . 8.435332 × 0.975726 = 8.2306.

Wird Vorausbezahlung angenommen, so ist der Werth der ersten halbjährlichen Zahlung, da sie sofort fällig wird, $\frac{1}{2}$, der der zweiten bei 3% aber $\frac{1}{2\,(1.015)}$, so daß die Reihe (7) den Faktor bekommt

bei halbjährlicher Vorausbezahlung

bei 3% . . . . $\frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{1.015}) = 0.992611$
„ $3\frac{1}{2}$% . . . . $\frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{1.0175}) = 0.991400$
„ 4% . . . . $\frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{1.02}) = 0.990196$

und der baare Werth der zehnjährigen Rente unter dieser Bedingung wäre:

bei 3% . . . . 8.786109 × 0.992661 = 8.7216
„ $3\frac{1}{2}$% . . . . 8.607687 × 0.991400 = 8.5337
„ 4% . . . . 8.435332 × 0.990196 = 8.3526.

Für die vierteljährliche Vorausbezahlung und 3% ist der Werth der ersten Zahlung $\frac{1}{4}$, der zweiten $\frac{1}{4\,(1.0075)}$, der dritten $\frac{1}{4\,(1.015)}$ und endlich der vierten Zahlung $\frac{1}{4\,(1.0225)}$, so daß die Faktoren der Reihe (7)

bei vierteljährlicher Vorausbezahlung

bei 3% . . . . $\frac{1}{4} \times (1 + (\frac{1}{1.0075} + \frac{1}{1.015} + \frac{1}{1.0225}) = 0.988943$
„ $3\frac{1}{2}$% . . . . $\frac{1}{4} \times (1 + (\frac{1}{1.00875} + \frac{1}{1.0175} + \frac{1}{1.02625}) = 0.987137$
„ 4% . . . . $\frac{1}{4} \times (1 + (\frac{1}{1.01} + \frac{1}{1.02} + \frac{1}{1.03}) = 0.985341$

sind und hierfür die baaren Werthe der zehnjährigen Rente

bei 3% . . . . 8.786109 × 0.988943 = 8.6890
= $3\frac{1}{2}$% . . . . 8.607687 × 0.987137 = 8.4970
= 4% . . . . 8.435332 × 0.985341 = 8.3117

betragen.

Es werden mitunter die baaren Werthe dieser terminlichen Renten dadurch gefunden, daß man sie zuvörderst bis an das Ende des betreffenden Jahres aufzinst und von da ab wiederum auf den Anfang des Jahres abzinst. Allein obgleich die hierbei vorzunehmende Rechnung etwas kürzer als die gegenwärtige ist, so verstößt sie doch gegen die gemachte Voraussetzung, daß im Laufe eines und desselben Jahres nach einfacher Verzinsung gerechnet werden soll.

Ist die Zeitrente eine steigende oder fallende, so wird hierdurch der Charakter der Berechnung ihres baaren Werthes wenig geändert, indem es überall darauf ankommt, jede einzelne Zahlung auf ihren gegenwärtigen Werth zurückzuzinsen und die Summe der einzelnen baaren Werthe zu nehmen. Ob sich alsdann hierbei noch Verkürzungen anbringen lassen, hängt von dem Gesetze ab, welchem das Steigen oder Fallen der Rente folgt.

Kommt es darauf an, den Werth einer solchen Zeitrente zur Zeit des letzten Fälligkeitstermins zu bestimmen, so hat man nur den baaren Werth der Rente bis dahin aufzuzinsen, d. h. mit dem betreffenden Aufzinsungsfaktor zu multipliciren. Soll endlich der jedesmal zur Auszahlung kommende Betrag ein ganz bestimmter sein, so nimmt man den baaren Werth der Zeitrente und multiplicirt denselben mit dem gegebenen Betrage. —

Die Mortalitäts-Tabellen geben an, wie viele von einer bestimmten Anzahl neugeborner Kinder die höheren Lebensalter erreichen und wie viele davon während dessen gestorben sind, wobei die Voraussetzung zu Grunde gelegt wird, daß für jede beliebige Zahl von Personen in jedem Lebensalter die Zahlen der Lebenden und der Verstorbenen ein unveränderliches Verhältniß bilden.

Die Wahrscheinlichkeit dieser Voraussetzung ist Seite 125 nachgewiesen worden und lehrt ein tieferes Eingehen in die Sache, daß obige Voraussetzung, obwohl an und für sich sehr unwahrscheinlich, doch die wahrscheinlichste ist, die sich machen läßt und daß die Abweichung im Mehr oder Weniger immer unwahrscheinlicher wird, desto größer man dieselbe annehmen wollte. Haben z. B. vielfältige Beobachtungen gelehrt, daß von 300 funfzigjährigen Personen im Laufe eines Jahres 9 gestorben sind, so ist die wahrscheinlichste Annahme, die man machen kann, die, daß von 1200 solcher Personen 36 sterben werden, und obschon diese Annahme an und für sich sehr unwahrscheinlich ist, so ist doch die Annahme, daß 35 bis 37 sterben werden, viel wahrscheinlicher, noch bei weitem mehr, daß die Zahl der Todesfälle zwischen 34 und 38, und sehr wenig wahrscheinlich, daß jene Zahl außerhalb der Grenzen 33 bis 39 liegen werde.

Süßmilch war der erste, der den Satz aufstellte, daß das menschliche Absterben einer göttlichen Ordnung, d. h. bestimmten Naturgesetzen unterworfen sei und haben nach ihm alle Beobachtungen diesen Satz mehr und mehr bestättigt. Seitdem hat die Wissenschaft gelehrt, daß, wenn eine Erscheinung, deren Grundursachen unbekannt sind, durch eine große Zahl von Beobachtungen bestättigt wird, die Erscheinung im Ganzen noch dieselbe bleibt, während sich die Grundursachen ändern, wenn nur diese Aenderung nicht sprungweise und nicht immer in demselben Sinne, z. B. immer wachsend oder immer abnehmend erfolgt. Diese beiden Sätze berechtigen den Praktiker, sich mit gehöriger Vorsicht der Mortalitäts-Tabellen als Grundlagen seiner Berechnungen zu bedienen, und in der That sind bei den verschiendensten Mortalitäts-Tabellen die Abweichungen nicht so groß, daß sie einen erheblichen Einfluß auf die Preise der gewöhnlichen Versicherungen ausüben sollten.

Zur Vergleichung verschiedener Mortalitäts-Tabellen ist die mittlere Lebensdauer der geeignetste Ausdruck, weil es weniger darauf ankommt, zu wissen, wie sich nach verschiedenen Tabellen die Zahl der Todesfälle zu dieser oder jener Zeit herausstellt, sondern wie lange Personen gegebenen Alters nach dieser oder jener Tabelle durchschnittlich noch zu leben haben werden. Seite 27 ist die Berechnung der mittlern Lebensdauer gelehrt worden, dabei aber von der Voraussetzung ausgegangen, daß der Tod für alle im Laufe eines Jahres Sterbenden am Ende desselben erfolge. Legt man die Voraussetzung zu Grunde, daß der Tod am Anfange des Sterbejahres eintreffe, so fällt Seite 28 im Zähler des Bruches das erste Glied weg, weil nun nicht 507 Personen das erste Jahr durchleben, sondern von 507 eben nur 503; eben so durchleben von 503 nur 499 das zweite, von diesen nur 495 das dritte Jahr u. s. w.; die mittlere Lebensdauer würde sich gegenwärtig um ein volles Jahr verringert haben. Allein beide Voraussetzungen sind mangelhaft, da die Todesfälle im Laufe des ganzen Jahres eintreten; die mittlere Lebensdauer der sechzehnjährigen Personen z. B. wird also (a. a. O.) kleiner als 38.36 und größer als 37.36 sein. Läßt sich voraussetzen, wie solches nach Süßmilch innerhalb eines Jahres fast überall der Fall ist, daß der Tod im Laufe des Jahres gleichmäßig eintrete, so ist dies in Bezug auf die mittlere Lebensdauer dasselbe, als ob er für alle Sterbende in die Mitte des Sterbejahres fiele. Man kann sich nämlich das ganze Jahr in eine Anzahl so kleiner Zeitabschnitte, z. B. den Tag, zwölf Stunden, sechs Stunden u. s. w., theilen, daß sich voraussetzen läßt, die während eines solchen Zeittheils auftretenden Todesfälle erfolgen in der Mitte desselben. Nun werde der Deutlichkeit wegen der Monat als ein solcher kleiner Zeittheil angenommen und es sterben in jedem Monat, nach der vorausgesetzten Gleichmäßigkeit und wenn man jeden Monat zu gleichvielen, also $\frac{365}{12}$ Tagen annimmt, der zwölfte Theil der jährlich Sterbenden. Die im Januar Ster-

benden leben also $\frac{1}{2}$, die im December Sterbenden $11\frac{1}{2}$ Monat, zusammen 12 Monat, die im Februar Sterbenden $1\frac{1}{2}$, die im November Sterbenden $10\frac{1}{2}$, zusammen 12 Monat u. s. w., so daß sich die Zahl der jährlich Sterbenden in sechs gleiche Theile zerlegt, die je 12 Monat, zusammen 72 Monat leben, und auf jeden Theil mithin auch auf jeden einzelnen Sterbenden nur noch das halbe Sterbejahr kommt und zur Erzielung genauerer Resultate die Zahlen der Tab. I um $\frac{1}{2} = 0.50$ zu verkleinern sind. Ein Gleiches ist der Fall mit den Verbindungsdauern Tab. II. Man nennt die so verbesserten Dauern die corrigirten mittleren Lebens- oder Verbindungsdauern und da in den Büchern bald die eine, bald die andere Art von Dauern verzeichnet steht, so hat man sich vor dem Gebrauch derselben zunächst davon zu unterrichten, welche Art und Weise der Angabe gewählt worden ist.

Die Correktion, welche bei den früher gefundenen mittleren Lebensdauern anzubringen war, beruht so wesentlich auf dem Umstande, daß das Absterben von einer Periode der addirten Zahlen der Lebenden zu andern gleichmäßig erfolge, daß die ganze Berechnung ihre Gültigkeit verliert, sobald diese Voraussetzung wegfällt. Man nehme einmal an, die Lebenden seien bei Süßmilch nur von fünf zu fünf Jahren verzeichnet, dergestalt:

Lebensalter.	Lebende.	Summe der Lebenden.	Corrigirte mittlere Lebensdauer fehlerhafte.	Corrigirte mittlere Lebensdauer richtige.
	a	b	c	d
95	1	1	2.50	1.50
90	6	7	3.33	3.00
85	17	24	4.56	4.32
80	37	61	5.74	5.53
75	69	130	6.92	6.76
70	112	242	8.30	8.18
65	162	404	9.97	9.88
60	210	614	12.12	12.07
55	255	869	14.54	14.50
50	300	1169	16.98	16.95,

so daß unter der Voraussetzung des gleichmäßigen Absterbens am Ende jeder Periode die unter a angeführten Mitglieder zusammengenommen die fünffache Zahl der unter b angegebenen Jahre gelebt haben würden. Es würden so die Quotienten der letzteren Zahlen durch die ersteren, nach Abzug der Correktur 2.50, die unter c verzeichneten mittleren Lebensdauern geben, welche, wie man sieht, von den unter d mitgetheilten richtigen Werthen theilweise wesentlich abweichen,

um so mehr, je weniger ein gleichmäßiges Absterben stattfindet, und gewähren demnach dergleichen periodische Angaben dem praktischen Rechner nur einen unsichern Anhalt.

So lange dagegen die Voraussetzung des gleichmäßigen Absterbens richtig ist, schließen sich die mittleren Lebensdauern der Mortalitäts-Tabelle, nach der sie berechnet worden, so genau an, daß von diesen letztern wiederum auf die Mortalitäts-Tabellen zurückgegangen werden kann. Ist nämlich die uncorrigirte mittlere Lebensdauer der fünfundneunzigjährigen Personen 1, so heißt dieses, daß keine von ihnen das fünfundneunzigste Lebensjahr überlebt, oder daß von 1 auch 1 sterbe. Ist ferner die uncorrigirte mittlere Lebensdauer der vierundneunzigjährigen Personen $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, so heißt dieses, die dreifache Zahl der Lebenden des vorletzten Alters ist gleich der doppelten Zahl der Lebenden der beiden höchsten Alter, d. h. die Zahl der Lebenden des vorletzten Alters ist gleich der zweifachen Zahl der Lebenden des letzten Alters, gleich 2. Ist endlich die uncorrigirte mittlere Lebensdauer der dreiundneunzigjährigen Personen gleich 2, so bedeutet dieses, daß die doppelte Zahl der Lebenden des drittletzten Alters gleich sei der Zahl der Lebenden der drei höchsten Alter, oder was dasselbe ist, daß die Zahl der Lebenden des drittletzten Alters gleich sie der Zahl der Lebenden der beiden höchsten Alter, $2 + 1 = 3$. Auf dieselbe Weise kann man von Lebensalter zu Lebensalter zurückgehen.

Dieselbe Correktur, welche man bei der mittlern Lebensdauer anzubringen hat, wendet man nun auch, wie bereits gesagt, bei der mittlern Verbindungsdauer (Seite 87) an, obwohl man weiß, daß die Trennung verbundener Leben nicht streng gleichmäßig geschehen kann, wenn das Ableben einzeln stehender Personen gleichmäßig erfolgt (Seite 69). Zwar könnte man unter der letztern Annahme eine richtigere Correktur für die mittleren Verbindungsdauern auffinden, indeß unterläßt man dies, weil die Abweichung von der Gleichmäßigkeit bei der Trennung der Verbindungen nur gering ist (a. a. O.) und man überdies da, wo es sich um die Ermittelung ganz genauer Beträge handelt, sicherere Methoden anzuwenden weiß.

Da hiernach die mittleren Lebensdauern und die mittleren Verbindungsdauern dieselbe unveränderliche Correktur erhalten und die mittlere Ueberlebensdauer die Differenz zweier jener Dauern ist (Seite 92), so folgt daraus, daß diese Ueberlebensdauern weiter keiner Correktur bedürfen, indem sich die Correkturen im Minuendus und Subtrahendus gegenseitig aufheben.

Die nachfolgende

Vergleichung der corrigirten mittleren Lebensdauern nach verschiedenen Mortalitäts-Tabellen.

	Northamptoner.	Süßmilch.	Wargentin.	Kerseboom.	Brune Männer.	Brune Frauen.	Deparcieux.
	a	b	c	d	e	e	f
0	25.18	28.49	34.42	35.47	.	.	34.79
10	39.78	41.94	45.07	42.74	.	.	46.74
20	33.43	35.03	38.02	36.30	.	39.06	40.08
30	28.27	28.57	31.21	30.99	32.69	33.56	33.96
40	23.08	22.64	24.66	25.52	25.35	27.22	27.30
50	17.99	16.95	18.46	19.44	18.57	20.19	20.24
60	13.21	12.07	12.63	14.12	12.43	13.55	13.86
70	8.60	8.18	7.72	9.19	7.58	8.24	8.34
80	4.75	5.53	4.28	5.08	4.29	4.92	4.78
90	2.41	3.00	2.65	2.50	1.37	2.85	1.79

weist nach, daß der Unterschied derselben, besonders für die mittleren Alter, nicht allzu groß ist, zugleich aber auch, daß die Süßmilch'sche Tabelle mit zu denen von größerer Sterblichkeit gehört, so daß ihr hierin nur noch die Northamptoner gleichkommt, daß sich dagegen die Mortalitäts-Tabelle für Frauen von Brune der von Deparcieux nach den Erfahrungen über das Absterben der französischen Rentenirer berechneten am meisten nähert. Da die Tabellen von Brune, sowohl was die Richtigkeit der zu Grunde liegenden Beobachtungen als das angewandte Princip der Berechnung betrifft, für Deutschland als die vorzüglichsten und brauchbarsten anerkannt worden sind, so werde ich diese immer mit zur Vergleichung heranziehen und fange damit an, die mittleren Lebensdauern nach beiden Tabellen vom sechzehnten bis zum sechzigsten Lebensjahre zusammenzustellen.

Vergleichung der mittleren Lebensdauern nach den Mortalitäts-Tabellen von Süßmilch und von Brune für Frauen.

Lebensalter.	Mittlere Lebensdauer nach		Altersdifferenz bei gleicher Lebensdauer.	Lebensalter.	Mittlere Lebensdauer nach		Altersdifferenz bei gleicher Lebensdauer.	Lebensalter.	Mittlere Lebensdauer nach		Altersdifferenz bei gleicher Lebensdauer.
	Süßmilch.	Brune für Frauen.			Süßmilch.	Brune für Frauen.			Süßmilch.	Brune für Frauen.	
	a	b	c		a	b	c		a	b	c
16	37.86	40.56	7	32	27.35	32.34	8	48	18.04	21.61	5
17	37.16	40.22	7	33	26.73	31.72	8	49	17.49	20.90	5
18	36.46	39.86	7	34	26.11	31.10	8	50	16.95	20.19	5
19	35.75	39.47	7	35	25.49	30.47	8	51	16.46	19.48	4
20	35.03	39.06	7	36	24.92	29.83	7	52	15.96	18.78	4
21	34.39	38.61	8	37	24.35	29.19	7	53	15.48	18.08	4
22	33.74	38.12	8	38	23.78	28.54	7	54	14.98	17.39	4
23	33.09	37.61	8	39	23.21	27.89	7	55	14.50	16.71	4
24	32.44	37.08	8	40	22.64	27.22	7	56	14.01	16.05	4
25	31.78	36.52	8	41	22.06	26.55	6	57	13.52	15.41	4
26	31.12	35.94	8	42	21.48	25.86	6	58	13.04	14.78	4
27	30.45	35.35	8	43	20.89	25.16	6	59	12.55	14.16	3
28	29.79	34.76	8	44	20.31	24.46	6	60	12.07	13.55	.
29	29.18	34.16	8	45	19.72	23.75	6	61	.	12.95	.
30	28.57	33.56	8	46	19.12	23.03	5	62	.	12.35	.
31	27.96	32.95	8	47	18.58	22.32	5	63	.	11.76	.

Aus Col. c dieser Vergleichung ersieht man, daß der Unterschied in den mittleren Lebensdauern so groß ist, daß er

vom 6ten bis 20sten Lebensjahre einer Alterserhöhung von 7
= 21sten = 35sten = = = = 8
= 36sten = 40sten = = = = 7
= 41sten = 45sten = = = = 6
= 46sten = 50sten = = = = 5
= 51sten = 59sten = = = = 4

Jahren gleich kommt. Allerdings ist dieser Unterschied, namentlich für die jüngeren Alter, nicht unbedeutend, allein gerade hieraus wird sich ergeben, wie gering der Einfluß ist, den die Unterschiede in den Mortalitäts-Tabellen in Bezug auf das Versicherungswesen ausüben.

Eine Leib- oder **Lebensrente** ist diejenige Rente, welche eine Person, so lange dieselbe lebt, in bestimmten Terminen empfängt, eine **Verbindungsrente** dagegen diejenige Rente, welche während der Dauer der Verbindung zweier oder mehrerer Personen, und endlich eine **Ueberlebensrente**, auch **Wittwenrente**, diejenige Leibrente, welche an eine bestimmte von zwei Personen nach dem Tode der andern in bestimmten Terminen gezahlt werden soll. Alle diese Renten unterscheiden sich von den Zeitrenten darin, daß diese unbedingt während des Verlaufs der festgesetzten Zeit gezahlt werden, jene aber nur so lange zur Zahlung kommen, als die berechtigte oder verpflichtete Person lebt, oder die Verbindung fortdauert. Unter dem Ausdruck **Sterbethaler** und **Wittwenthaler** versteht man dagegen den einmaligen Betrag, der an die Hinterbliebenen eines Verstorbenen resp. an die Wittwe, falls selbige noch lebt, als ein für allemalige Abfindung ausgezahlt werden soll.

Der **baare Werth** einer Leibrente, Verbindungsrente, Ueberlebensrente ist der Betrag, der für jedes einzelne Leben oder für jede einzelne Verbindung durchschnittlich **sofort** erforderlich ist, um aus dem durch den Zusammenfluß sämmtlicher Beträge hervorgehenden Kapitale und den Zinsen seiner Bestände die betreffenden Renten dergestalt zahlen zu können, daß das Kapital bis zum Tode der letzten Person oder bis zur Trennung der letzten Verbindung ausreicht, dann aber auch gänzlich erschöpft worden ist, — während die Benennung **baarer Werth** eines Sterbethalers oder eines Wittwenthalers denselben Begriff in Bezug auf die Auszahlung der Sterbegelder bezeichnet.

Die mittleren Dauern bieten das einfachste Mittel dar, die baaren Werthe der vom Leben oder Sterben der Menschen abhängenden Zahlungen aufzufinden, indem sie ausdrücken, wie lange durchschnittlich eine Zahlung zu leisten oder auf dieselbe zu warten sei und diese deshalb entweder als Zeitrente betrachtet und aus Tab. VI entnommen, oder als später fällig werdender Betrag nach Tab. V abgezinst werden kann. Legt man die jährliche Vorausbezahlung 1 zu Grunde, so ist die mittlere Lebensdauer:

einer fünfunddreißigjährigen Person 26.49, also der baare Werth der Lebensrente
bei 3% Zinsen 18.413 und bei 4% Zinsen 16.622;

einer sechzigjährigen Person 13.07, also der baare Werth der Leibrente
bei 3% Zinsen 10.954 und bei 4% Zinsen 10.385.

Gleicherweise ist mittlere Verbindungsdauer einer fünfunddreißigjährigen und einer dreißigjährigen Person 19.44, also die Verbindungsrente
bei 3% Zinsen 14.754 und bei 4% Zinsen 13.659;

einer fünfunddreißigjährigen und einer sechzigjährigen Person 11.16, also die Verbindungsrente
bei 3% Zinsen 9.530 und bei 4% Zinsen 9.111.

Der baare Werth des Sterbethalers, am Anfange des Sterbejahres zahlbar, ist (Seite 129) offenbar nichts andres, als der baare Werth eines für die Zeit der mittleren Lebensdauer weniger ein Jahr abgezinsten Thalers; also

für eine fünfunddreißigiährige Person

bei 3% Zinsen 0.478 und bei 4% Zinsen 0.375,

für eine sechzigjährige Person

bei 3% Zinsen 0.701 und bei 4% Zinsen 0.625.

Soll demnach das Sterbegeld durch einen jährlichen vorauszubezahlenden Beitrag aufgebracht werden, so beträgt dasselbe

für eine fünfunddreißigjährige Person

bei 3% Zinsen $\frac{0.478}{18.413} = 0.0260$ und bei 4% Zinsen $\frac{0.375}{16.622} = 0.0226$,

für eine sechzigzährige Person

bei 3% Zinsen $\frac{0.701}{10.954} = 0.0640$ und bei 4% Zinsen $\frac{0.625}{10.385} = 0.0602$.

Die mittlere Ueberlebensdauer

einer dreißigjährigen in Verbindung mit einer fünfunddreißigjährigen Person ist 10.13, also der baare Werth der Ueberlebensrente in Bezug auf den Fälligkeitstermin

bei 3% Zinsen 8.786 und bei 4% Zinsen 8.435;

einer fünfunddreißigjährigen in Verbindung mit einer dreißigjährigen Person: 7.05, also der baare Werth der Ueberlebensrente

bei 3% Zinsen 6.417 und bei 4% Zinsen 6.242,

einer fünfunddreißigjährigen in Verbindung mit einer sechzigjährigen Person: 15.33, also die Ueberlebensrente in Bezug auf den Fälligkeitstermin

bei 3% Zinsen 12.296 und bei 4% Zinsen 11.563;

einer sechzigjährigen in Verbindung mit einer fünfunddreißigjährigen Person: 1.91, also die Ueberlebensrente

bei 3% Zinsen 1.971 und bei 4% Zinsen 1.962.

Indeß kommt es bei solcher Ueberlebensrente nicht allein auf den baaren Werth in Bezug auf den mittleren Fälligkeitstermin, sondern in der Regel auf den baaren Werth in Bezug auf das gegenwärtige Ehepaar an, so daß die gefundenen baaren Werthe noch für die Dauer der Verbindung weniger 1 abzuzinsen sind. Unter dieser Bedingung ist der baare Werth der Ueberlebensrente

einer dreißigjährigen in Verbindung mit einer fünfunddreißigjährigen Person

bei 3% Zinsen 8.786 × 0.5874 = 5.161
und bei 4% „ 8.435 × 0.4936 = 4.164,

einer fünfunddreißigjährigen in Verbindung mit einer dreißigjährigen Person

bei 3% Zinsen 6.417 × 0.5874 = 3.769
und bei 4% „ 6.242 × 0.4936 = 3.081,

einer fünfunddreißigjährigen in Verbindung mit einer sechzigjährigen Person

bei 3% Zinsen 12.296 × 0.7741 = 8.518
und bei 4% „ 11.563 × 0.6756 = 6.812

und endlich einer sechzigjährigen in Verbindung mit einer fünfunddreißigjährigen Person

bei 3% Zinsen 1.971 × 0.7741 = 1.526
und bei 4% „ 1.962 × 0.6756 = 1.326.

Sollen diese baaren Werth durch gleichmäßige jährliche Beiträge während der ganzen Dauer der Verbindung aufgebracht werden, so findet man solche offenbar, wenn man die Ueberlebensrenten durch die Verbindungsrenten dividirt. Demnach ist der jährlich zu zahlende Beitrag für ein Paar,

bei welchem der Mann fünfunddreißig, die Frau dreißig Jahr alt ist
bei 3% Zinsen $\frac{5.161}{14.754} = 0.350$, bei 4% Zinsen $\frac{4.164}{13.659} = 0.305$;

bei welchem der Mann dreißig, die Frau fünfunddreißig Jahr alt ist
bei 3% Zinsen $\frac{3.769}{14.754} = 0.255$, bei 4% Zinsen $\frac{3.081}{13.059} = 0.236$;

bei welchem der Mann sechzig, die Frau fünfunddreißig Jahr alt ist
bei 3% Zinsen $\frac{8.518}{9.530} = 0.894$, bei 4% Zinsen $\frac{7.812}{9.111} = 0.857$;

bei welchem der Mann fünfunddreißig, die Frau sechzig Jahr alt ist
bei 3% Zinsen $\frac{1.526}{9.530} = 0.160$, bei 4% Zinsen $\frac{1.326}{9.111} = 0.145$.

Die vorstehende Art und Weise der Berechnung eignet sich jedoch mehr zu einem vorläufigen Ueberschlage, als daß sie sich den Mortalitäts-Tabellen ganz so anschlösse, wie es am Ende des ersten Abschnittes, Tab. 50, 51 und 52, der Fall war. Der Grund liegt darin, daß die mittleren Dauern zwar geeignet sind, die Anzahl der zu machenden Zahlungen mit ziemlicher Annäherung, nicht aber die Verzinsung mit dem gehörigen Grade der Genauigkeit wiederzugeben. Ist z. B. die mittlere Lebensdauer einer fünfunddreißigjährigen Person 26.49, so ist die Angabe, daß jede Person durchschnittlich 26 Zahlungen zu erwarten habe, im Allgemeinen richtig; behandelt man dieselben aber als Zeitrente, so ist man gleichzeitig genöthigt, alle diese Zahlungen als innerhalb der ersten sechsundzwanzig Jahre erfolgend anzunehmen, während in der

Wirklichkeit von 10628 Zahlungen (vgl. Tab. I, Col. c) 2429, also $\frac{8}{35}$ nach jener Zeit erfolgen. Dieser Umstand bewirkt es natürlich, daß die gefundenen Leibrentenwerthe größer ausgefallen sind, als es die Natur der Sache mit sich bringt. Es ist aber nichts einfacher, als sich bei der Berechnung aller baaren Werthe der zu Grunde gelegten Mortalitäts-Tabelle ganz genau anzuschließen und die Art und Weise, wie man dieses in jedem einzelnen Falle am leichtesten erreichen kann, ist der Hauptgegenstand dieses Abschnitts.

Hat Jemand nach zehn Jahren den Betrag 1 zu empfangen, so ist der baare Werth dieser Zahlung, beim Zinsfuße von 4%, $\frac{1}{(1.04)^{10}}$; soll aber an 409 Personen nur 339mal oder nur 7mal dieser Betrag gezahlt werden, so ist der baare Werth für jede einzelne Person nur

$$\frac{339}{409 \times (1.04)^{10}} = 0.5599, \text{ oder } \frac{7}{409 \times (1.04)^{10}} = 0.0115.$$

In diesem Falle befinden sich aber 409 fünfunddreißigjährige Personen, wenn auf jede derselben, die nach vollen zehn Jahren noch lebt, oder die im Laufe des eilften Jahres verstirbt, der Betrag 1 gezahlt werden soll, weil von 409 solcher Personen noch 339 den Anfang des eilften Jahres erleben und 7 davon im Laufe desselben sterben. Nun ist aber $\frac{339}{409}$ die Wahrscheinlichkeit einer fünfunddreißigjährigen Person, den Anfang des sechsundvierzigsten Jahres zu erleben, und $\frac{7}{409}$ die Wahrscheinlichkeit, im Laufe dieses letztern Jahres zu sterben, so daß man sagen kann: **der baare Werth einer Zahlung, die auf eine Person, im Falle sie ein bestimmtes Alter erreicht, oder im Falle sie während einer bestimmten Zeit stirbt, mit dem Betrage 1 gezahlt wird, ist gleich der auf die gegebene Zeitdauer abgezinsten Wahrscheinlichkeit des Lebens oder des Sterbens.**

Diese baaren Werthe sind aber für jede einzelne Person von keinerlei Bedeutung, indem dieselbe nach Ablauf der bestimmten Zeit entweder den Betrag 1 oder Nichts empfängt. Hat man es aber, wie bei Versicherungsanstalten vorauszusetzen, mit einer sehr großen Menge fünfunddreißigjähriger Personen zu thun, so kann man mit einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit voraussetzen, daß von je 409 derselben nach zehn Jahren noch 339 leben und im Laufe des eilften Jahres 7 sterben und also jene angegebenen Beträge zur Zahlung kommen werden, und steht dem alsdann nichts entgegen, sich so auszudrücken, daß auf jede von den 409 fünfunddreißigjährigen Personen durchschnittlich $\frac{339}{409}$ oder $\frac{7}{409}$ kommen werden, wonach jede einzelne als gleichberechtigte Theilnehmerin an sämmtlichen Zahlungen angesehen wird, ohne daß dadurch das Wesen der Sache geändert würde. Dadurch aber, daß diese Durchschnittsangaben für eine große Menge von Personen eine bestimmte Bedeutung haben, erhalten sie solche auch für eine einzelne Person in so weit, als sie den Preis ausdrücken, für

welchen man ein solches Geschäft abschließen könnte, wenn nicht noch die Verwaltungskosten und das Risico mit zu veranschlagen wären.

Den oben gefundenen baaren Werthen läßt sich auch die Form

$$\frac{339}{(1.04)^{10}} : 409 \text{ und } \frac{7}{(1.04)^{10}} : 409$$

geben und multiplicirt man hier noch Dividend und Divisor mit $\frac{1}{(1.04)^{35}}$, so bleiben die Zahlenwerthe der Quotienten unverändert, während die Form in

$$\frac{339}{(1.04)^{45}} : \frac{409}{(1.04)^{35}} \text{ und } \frac{7}{(1.04)^{45}} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

übergeht. Da nun 409 fünfunddreißigjährige und 339 fünfundvierzigjährige Lebende, so wie 7 fünfundvierzigjährige Sterbende sind, so ist jede Zahl der Lebenden oder Sterbenden auf den Augenblick der Geburt abgezinst. Man nennt diese Werthe vorzugsweise die abgezinsten Werthe der Lebenden oder Sterbenden, so daß man die Regel erhält: Um den baaren Werth einer Zahlung zu finden, welche einer Person bestimmten Alters zukommt, falls dieselbe eine gegebene Zeit durchlebt, oder nach Ablauf derselben stirbt, multiplicire man den fällig werdenden Betrag mit der abgezinsten Zahl der Lebenden oder Sterbenden des spätern Alters, dividire das Produkt durch die abgezinste Zahl der Lebenden des ursprünglichen Alters, so erhält man für das vorhergehende Beispiel

$$\frac{339 \times 0.171198}{409 \times 0.253415} = 0.5599 \text{ und } \frac{7 \times 0.117198}{409 \times 0.253415} = 0.0115.$$

Diese Art und Weise der Berechnung ist allerdings für eine einzelne Zahlung weitläuftiger, als die vorhergehende; sollen aber mehrere solche Zahlungen an eine und dieselbe Person zu verschiedenen Zeiten gemacht werden, so verdient jene bei weitem den Vorzug, weil sich alle diese Abzinsungen ein für allemal zum beliebigen Gebrauch berechnen lassen. In Betreff jener Zahlungen kommen besonders folgende Fälle vor:

1) Auf eine Person bestimmten Alters soll von jetzt ab und so lange dieselbe lebt, jährlich oder sobald sie im Laufe eines Jahres verstirbt, ein für allemal zum voraus der Betrag 1 gezahlt werden: welches ist der Werth einer solchen Lebensrente oder eines solchen Sterbethalers?

Bezeichnet man den baaren Werth der Rente oder des Sterbethalers resp. durch R oder T mit dahinter gesetztem Alter, so ist z. B. für fünfunddreißigjährige Personen bei 4% Zinsen

$$9)\ R(35) = \left\{ \frac{409}{(1.04)^{35}} + \frac{402}{(1.04)^{36}} + \frac{395}{(1.04)^{37}} + \frac{388}{(1.04)^{38}} + \cdots \right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

$$T(35) = \left\{ \frac{7}{(1.04)^{35}} + \frac{7}{(1.04)^{36}} + \frac{7}{(1.04)^{37}} + \frac{7}{(1.04)^{38}} + \cdots \right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}},$$

d. h.: Man findet den baaren Werth der Leibrente oder des Sterbethalers für eine Person gegebenen Alters, wenn man die abgezinsten Zahlen der Lebenden oder der Sterbenden für das gegebene und alle höheren Alter addirt und die Summe durch die abgezinste Zahl der Lebenden des gegebenen Alters dividirt.

Wie sich zeigt, ist die Methode zur Berechnung des baaren Werthes der Lebensrente und des Sterbethalers dieselbe, welche Seite 28 zur Berechnung der mittlern Lebensdauer angewandt worden, nur daß man statt der Zahlen der Lebenden die abgezinsten Zahlen resp. der Lebenden oder der Sterbenden zu nehmen hat; auch würde der Werth der Leibrente der mittlern Lebensdauer gleich sein, wenn keine Zinsen zu berechnen wären.

Soll man daher die baaren Werthe der Lebensrenten oder der Sterbethaler für alle Lebensalter finden, so addirt man, ähnlich wie a. a. O., die abgezinsten Zahlen der Lebenden oder der Sterbenden successive von unten auf und dividirt die Summen durch die abgezinsten Zahlen des jüngsten in ihnen vorkommenden Alters. In der Tab. VII, A, B und C ist solches für die Zinsfüße von 3%, $3\frac{1}{2}$% und 4% geschehen; die Colonnen a enthalten die abgezinsten Zahlen der Lebenden, die Col. b die der Sterbenden, die Colonnen c und d die successiven Summen jener Zahlen von unten auf und die Col. e und f die Quotienten der Summen der beiden vorhergehenden Colonnen durch die daneben stehenden Zahlen in Col. a.

2) Sollen die baaren Werthe der Lebensrenten oder der Sterbethaler unter der Bedingung gesucht werden, daß die Zahlungen nicht sofort, sondern erst nach Verlauf einer gegebenen Zahl von Jahren beginnen. In diesem Falle läßt man offenbar in den Reihen (9) so viele erste Glieder weg, als Jahre des Ausfalls bestimmt sind. Stellt man diese über die Zeichen R oder T, so ist z. B. für eine fünfunddreißigjährige Person der baare Werth der zehn Jahr aufgeschobenen Leibrente

$$\overset{10}{R}(35) = \left\{ \frac{339}{(1.04)^{45}} + \frac{332}{(1.04)^{46}} + \frac{324}{(1.04)^{47}} + \frac{316}{(1.04)^{48}} + \cdots \right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

und der baare Werth eines zehn Jahr aufgeschobenen Sterbethalers:

$$\overset{10}{T}(35) = \left\{ \frac{7}{(1.04)^{45}} + \frac{8}{(1.04)^{46}} + \frac{8}{(1.04)^{47}} + \frac{8}{(1.04)^{48}} + \cdots \right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

Man hat daher in diesem Falle aus den Colonnen c und d, Tab. VII nicht die neben den ursprünglichen Altern stehenden, sondern diejenigen Summen als Dividenden zu nehmen, welche neben dem Alter stehen, von welchem ab die Zahlung beginnen soll, während der Divisor dem gegenwärtigen Alter entspricht. Im vorliegenden Falle ist also

$$\overset{10}{R}(35) = \frac{755.097}{103.647} = 7.2853$$

$$\overset{10}{T}(35) = \frac{30.1540}{103.647} = 0.2909.$$

Sollen die baaren Werthe für eine Mortalitäts-Tabelle oder für einen Zinsfuß gefunden werden, für welche man die Colonnen a und b nicht kennt, wohl aber die baaren Werthe der vollen Leibrenten oder der vollen Sterbethaler, so kann man den beiden früheren Reihen die Form

$$\overset{10}{R}(35) = \frac{339}{409 \times (1.04)^{10}} \left\{ \frac{339}{(1.04)^{45}} + \frac{332}{(1.04)^{46}} + \frac{324}{(1.04)^{47}} + \frac{316}{(1.04)^{48}} + \cdots \right\} : \frac{339}{(1.04)^{35}}$$

und $\overset{10}{T}(35) = \frac{339}{409 \times (1.04)^{10}} \left\{ \frac{7}{(1.04)^{45}} + \frac{8}{(1.04)^{46}} + \frac{8}{(1.04)^{47}} + \frac{8}{(1.04)^{48}} + \cdots \right\} : \frac{339}{(1.04)^{35}}$

geben, und also

$$\overset{10}{R}(35) = \frac{339}{409 \times (1.04)^{10}} R(45)$$

$$\overset{10}{T}(35) = \frac{339}{409 \times (1.04)^{10}} T(45)$$

setzen, z. B.:

$$\overset{10}{R}(35) = \tfrac{339}{409} \times 0.675564 \times 13.0108 = 7.2853$$

$$\overset{10}{T}(35) = \tfrac{339}{409} \times 0.675564 \times \ \ 0.5196 = 0.2909,$$

wie vorher.

Die Bedeutung dieser Formel ist sehr leicht zu erklären. Da für die fünfunddreißigjährigen Personen die Leibrente oder der Sterbethaler erst nach zehn Jahren beginnen soll, so hat man es mit den Werthen für fünfundvierzigjährige zu thun, welche im Augenblick des Fälligkeitstermins R(45) oder T(45) sind; demnach ist ihr baarer Werth zur Zeit des Geschäftsantritts $\frac{1}{(1.04)^{10}}$ R(45) oder $\frac{1}{(1.04)^{10}}$ T(45), und da von 409 Personen nur 339 dazu gelangen, so sind die gegenwärtigen Durchschnittswerthe die oben angegebenen.

3) Kann man voraussetzen, daß die Zahlung der Rente oder des Sterbethalers zwar sofort beginne, aber nach Verlauf einer bestimmten Zeit wieder aufhöre, also eine **aufhörende** Rente oder ein **aufhörender** Sterbethaler sei. Hierbei kommt offenbar von der vollen Leibrente oder dem vollen Sterbethaler das aufgeschobene Stück in Abzug, so daß nur dieses zu suchen und von den vollen betreffenden Werthen zu subtrahiren ist. Sind die Colonnen c und d Tab. VII vorhanden, so ist das Verfahren sehr einfach, indem man von der Summe, die neben dem gegenwärtigen Alter steht, diejenige, die dem Alter der letzten Zahlung folgt, subtrahirt und die Differenz durch die abgezinste Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters dividirt. So ist z. B. nach

den Colonnen c und d, wenn man das Aufhören durch die untergeschriebene Zahl der Jahre bezeichnet:

$$\underset{10}{R}(35) = \frac{1566.88 - 755.105}{103.647} = 7.8322$$

$$\underset{10}{T}(35) = \frac{45.1175 - 30.1540}{103.647} = 0.1444,$$

während man ohne jene Colonnen zuerst $\overset{10}{R}(35)$ und $\overset{10}{T}(35)$ auf die vorher angegebene Art zu berechnen hat. Die aufgeschobenen Werthe und die entsprechenden aufhörenden Werthe werden daher zusammengenommen wieder die vollen Werthe geben, und in der That ist

$$R(35) = 7.2853 + 7.8322 = 15.1175$$

$$T(35) = 0.2909 + 0.1444 = 0.4353,$$

wie es die Tab. VII C nachweist.

4) Kommen Fälle vor, wo die Zahlung erst nach einer festgesetzten Reihe von Jahren beginnen und nur bestimmte Jahre hindurch geleistet werden soll, man also den baaren Werth einer aufgeschobenen und aufhörenden Lebensrente oder eines solchen Sterbethalers zu finden hat. In diesem Falle gelangt man zu seinem Zweck, wenn man die aufgeschobenen Leibrenten oder Sterbethaler für das Alter beim Beginne und das Alter nach dem Aufhören der Zahlungen berechnet und die letzteren von den ersteren subtrahirt. Unter Hinzuziehung der Col. c und d Tab. VII geschieht dies sehr einfach dadurch, daß man von der Summe, die neben dem Alter der ersten Zahlung steht, die Summe neben dem auf das Alter der letzten Zahlung folgenden subtrahirt und die Differenz durch die discontirte Zahl der Lebenden des gegenwärtigen Alters dividirt. So ist z. B.

$$\overset{10}{\underset{35}{R}}(35) = \frac{755.105 - 50.2766}{103.647} = 6.8003$$

$$\overset{10}{\underset{35}{T}}(35) = \frac{30.1540 - 5.46922}{103.647} = 0.2382.$$

5) Sollen alle diese Zahlungen am Schlusse jedes Jahres erfolgen, so wird von der vollen Leibrente der Betrag 1 subtrahirt, weil nur die erste Zahlung wegfällt; der volle Sterbethaler dagegen auf ein Jahr abgezinst, weil keine Zahlung ausfällt, dagegen sämmtliche Zahlungen je um ein Jahr später erfolgen. Für die aufgeschobenen und aufhörenden Nachzahlungen werden die vollen Postnumerandowerthe in Rechnung gebracht.

Die angegebene Art der Berechnung der baaren Leibrentenwerthe ist die einfachste und übersichtlichste von allen, wenn es darauf ankommt, dieselbe für eine große Anzahl hintereinander folgender Lebensalter zu finden, allerdings aber zu weitläufig, sobald es nur darum zu thun ist, den baaren Werth der

Leibrente eines einzelnen Lebensalters, z. B. für einen ungewöhnlichen Zinsfuß zu suchen. — Man hat zu diesem Endzweck mehrere sehr kurze Berechnungsweisen aufgestellt, die indessen nur annähernd richtige Werthe liefern und hier übergangen werden, weil mit dergleichen Näherungswerthen nur derjenige mit Sicherheit arbeiten kann, der zugleich den Grad der Annäherung zu bestimmen versteht. Folgende beide Methoden führen dagegen mit ziemlicher Schnelligkeit zu ganz genauen Resultaten.

Der baare Werth des unter (9) angegebenen Sterbethalers läßt sich auch schreiben:

$$T(35) = \left\{\frac{409-402}{(1.04)^{35}} + \frac{402-395}{(1.04)^{36}} + \frac{395-388}{(1.04)^{37}} + \frac{388-381}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

oder was dasselbe ist:

$$\left\{\frac{409}{(1.04)^{35}} + \frac{402}{(1.04)^{36}} + \frac{395}{(1.04)^{37}} + \frac{388}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

$$-\left\{\frac{402}{(1.04)^{35}} + \frac{395}{(1.04)^{36}} + \frac{388}{(1.04)^{37}} + \frac{381}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

und wenn man vom Minuendus das erste Glied absondert und den Subtrahendus mit 1.04 multiplicirt und dividirt:

$$T(35) = 1 + \left\{\frac{402}{(1.04)^{36}} + \frac{395}{(1.04)^{37}} + \frac{388}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

$$1.04 \times \left\{\frac{402}{(1.04)^{36}} + \frac{395}{(1.04)^{37}} + \frac{388}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

oder kürzer, wenn man $1 + 0.04$ statt 1.04 setzt:

$$T(35) = 1 - 0.04 \times \left\{\frac{402}{(1.04)^{36}} + \frac{395}{(1.04)^{37}} + \frac{388}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

Die letzte Reihe ist der baare Werth der postnumerando zahlbaren Leibrente der fünfunddreißigjährigen Person $R(35) - 1$, also

$$T(35) = 1 - 0.04 \times \{R(35) - 1\}$$

d. h. man findet den baaren Werth des vorauszubezahlenden Sterbethalers, wenn man die Jahreszinsen des baaren Werthes der nachzuzahlenden Leibrente von 1 subtrahirt. So ist z. B.

$$T(35) = 1 - 0.03 \times 15.9870 = 0.5214$$
$$T(35) = 1 - 0.035 \times 15.0032 = 0.4749$$
$$T(35) = 1 - 0.04 \times 14.1175 = 0.4353$$

wie die Tabellen VII nachweisen.

Der Grund dieser Uebereinstimmung ist sehr leicht einzusehen. Der baare Werth des Sterbethalers wäre 1, wenn nicht (bei 4%) die Zinsen 0.04 während der Lebenszeit der berechtigten Person davon abgingen. Diese Zinsen

werden postnumerando bezahlt und ist daher der baare Werth derselben $0.04 \times \{R(35) - 1\}$, welcher in Abzug zu bringen ist.

Der letzten Formel für T(35) kann man aber auch die Gestalt

$$T(35) = 1.04 - 0.04 \times R(35)$$

geben, so daß der baare Werth des Sterbethalers gleich ist, der auf ein Jahr aufgezinsten Einheit weniger den Jahreszinsen des baaren Werths der pränumerando zahlbaren Leibrente.

Aus dem Vorstehenden folgt zugleich, daß der baare Werth eines pränumerando zu zahlenden Sterbethalers mit den Jahreszinsen der baaren Werthe der postnumerando zahlbaren Leibrente zusammengenommen 1 betragen, jene Zinsen also gleich 1 weniger dem baaren Werthe des pränumerando zu zahlenden Sterbethalers sind. Nun findet man aber das Kapital aus seinen Zinsen, wenn man diese letztern mit dem Grundkapitale (Seite 155) multiplicirt; also ist

$$\text{bei } 4^0/_0 \text{ Zinsen}: R(35) - 1 = 25\ \{1 - T(35)\},$$

so daß man den baaren Werth der Leibrente aus dem des Sterbethalers berechnen kann. Die Berechnung der letzteren Werthe ist indeß sehr einfach, besonders bei dreistelligen Mortalitäts-Tabellen, weil immer nur einziffrige Zahlen abzuzinsen sind. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß bei dergleichen vereinzelten Berechnungen nicht die Abzinsungen auf den Augenblick der Geburt, sondern auf den Anfang des Geschäfts bezogen werden; so wie ferner, daß mehrere solcher Abzinsungen durch vorhergängige Addition der Abzinsungsfaktoren bewirkt werden können, wenn die Zahl der Sterbenden für mehrere auf einander folgende Jahre unverändert bleibt. Will man z. B. die baaren Werthe für eine sechsundsiebenzigjährige Person bei $5^0/_0$ Zinsen haben, so ist die Rechnung folgende:

Lebensalter.	Sterbende.	Abzinsungs-Faktoren à 5%.	Abgezinste Zahl der Sterbenden.
76	7	1.000000	7.000000
77	6	0.952381	
78	6	0.907029	
79	6	0.863838	
		2.723248	16.339488
80	5	0.822702	4.113510
81	4	0.783526	
82	4	0.746215	
83	4	0.710681	
		2.240422	8.961688
84	3	0.676839	
85	3	0.644609.	
		1.321448	3.964344
86	2	0.613913	
87	2	0.584679	
88	2	0.556837	
89	2	0.530321	
		2.285750	4.571500
90	1	0.505068	
91	1	0.481017	
92	1	0.458112	
93	1	0.436297	
94	1	0.415521	
95	1	0.395734	
		2.691749	2.691749
			47.642279
			62) 0.768424.

Hiernach erhält man also 1 — T(35) = 1 — 0.768424 = 0.231576, und dieser Werth mit dem Grundkapitale 20 multiplicirt und um 1 erhöht, liefert R(35) = 5.6315.

Soll der baare Werth der Leibrente allein gesucht werden und hat man eine Tabelle der Zeitrenten für den verlangten Zinsfuß, so kann man seinen

Zweck noch etwas kürzer erreichen, wenn man sagt: die 7 Sterbenden im ersten Jahre haben am Anfange desselben je den Betrag 1 erhalten, sind 7; die 6 im zweiten Jahre haben im Laufe der beiden Jahre jedesmal den Betrag 1 erhalten, sind 6 × 1.952381; eben so kommen auf die 6 Sterbenden des dritten Jahres 6 × 2.859410 u. s. w., so daß die Rechnung sich folgendermaßen stellt:

Lebensalter.	Sterbende.	Baare Werthe der Zeitrenten à 5 %.	Produkte der Sterbenden und der Zeitrenten.
76	7	1.000000	7.000000
77	6	1.952381	
78	6	2.859410	
79	6	3.723248	
		8.535039	51.210234
80	5	4.545951	22.729755
81	4	5.329477	
82	4	6.075692	
83	4	6.786373	
		18.191542	72.766168
84	3	7.463213	
85	3	8.107822	
		15.571035	46.713105
86	2	8.721735	
87	2	9.306414	
88	2	9.863252	
89	2	10.393573	
		38.284974	76.569948
90	1	10.898641	
91	1	11.379658	
92	1	11.837770	
93	1	12.274066	
94	1	12.689587	
95	1	13.085321	
		72.165043	72.165043
			349.154253
wie vorher.			62) 5.6315

Bei beiden vorhergehenden Berechnungen sind also die Zeitrenten angewandt, in der Art, daß man beim Sterbethaler bestimmt, wie viel die unveränderte Zahl der Sterbenden beim Tode erhalten hat, bei der Lebensrente aber, wie viel dieselben während ihrer Lebenszeit aufgezehrt hatten.

Die Leibrenten und der Sterbethaler können auch veränderliche sein und mit den Jahren fallen oder steigen. Diese werden im Allgemeinen eben so berechnet werden, wie die unveränderlichen, nur daß vor der Addition jede abgezinste Zahl der Lebenden mit dem betreffenden Jahresbetrage multiplicirt wird.

Die unveränderlichen Leibrenten und Sterbethaler, von welchen in der Folge noch Gebrauch zu machen, sind diejenigen, welche nach den natürlichen Zahlen wachsen, so daß im ersten Jahre der Betrag 1, im zweiten der Betrag 2, im dritten der Betrag 3 u. s. w. gezahlt werden soll. Die baaren Werthe für fünfunddreißigjährige Personen und 4% Zinsen sind in diesem Falle resp.

$$\mathbf{R}(35) = \left\{\frac{409}{(1.04)^{35}} + 2 \times \frac{402}{(1.04)^{36}} + 3 \times \frac{395}{(1.04)^{37}} + 4 \times \frac{388}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

$$\text{u. } \mathbf{T}(35) = \left\{\frac{7}{(1.04)^{35}} + 2 \times \frac{7}{(1.04)^{36}} + 3 \times \frac{7}{(1.04)^{37}} + 4 \times \frac{7}{(1.04)^{38}} + \cdots\right\} : \frac{409}{(1.04)^{35}}$$

Die Dividenden sind hier wieder ähnlich wie S. 32 und 33 Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden und Sterbenden, und lassen sich alle diese Summen durch nochmaliges successives Addiren der Summen von unten auf berechnen, wie solches in den Colonnen g und h der Tab. VII geschehen, welche demnach nur noch durch die Zahlen der Col. a zu dividiren sind, um die betreffenden baaren Werthe zu liefern.

Werden diese Art Renten oder Sterbethaler aufgeschoben, so findet man die baaren Werthe eben so wie vorher, nur daß man statt der Colonnen a, b und c die Colonnen e und f in Anwendung bringt; bei den aufhörenden Renten und Sterbethalern hat man aber von den neben dem ursprünglichen Alter stehenden Zahlen der Col. e und f nicht allein die neben dem Alter, das der letzten Zahlung folgt, stehende Zahl, sondern auch noch die entsprechenden Zahlen der Colonnen c und d, so oft vervielfältigt, als Jahre der Auszahlung gegeben sind, zu subtrahiren. Der Grund dafür ist Seite 33 entwickelt, indem es bei solchen Summen und Summen von Summen ganz gleichgültig ist, welchen Ursprung die einzelnen Summanden haben.

Das Grundprincip, worauf die Berechnung der baaren Werthe beruht, liegt also darin, daß man für eine gegebene anfängliche Menge von Personen die Beträge der in jedem Jahre zum Anspruch kommenden Summen aufsucht, diese auf den Anfang des Geschäfts abzinst und die Summe der abgezinsten

Werthe unter die anfängliche Menge gleichmäßig vertheilt. Da es nun hierbei gar nicht darauf ankommt, von woher dieser Anspruch rührt, so wird man (nach Seite 66) den baaren Werth der Verbindungsrente zweier Personen gegebenen Alters finden, wenn man die Tabellenzahlen der Lebenden dieser und aller höheren Alter mit einander multiplicirt, die Produkte auf die ursprünglichen Alter abzinst und die Summe der abgezinsten Produkte durch das erste Produkt dividirt.

Hiernach ist der baare Werth der Verbindungsrente für ein Paar, von welchem die eine Person fünfunddreißig, die andere dreißig Jahr alt ist:

$$R(35,30) = \left\{409 \times 439 + \frac{402 \times 433}{1.04} + \frac{395 \times 427}{(1.04)^2} + \frac{388 \times 421}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (409 \times 439)$$

Man kommt indeß auch hier leichter zum Ziele, wenn man Dividendus und Divisor noch mit demjenigen Abzinsungsfaktor multiplicirt, der die Zahlen der Lebenden des einen oder des andern Alters auf ihre abgezinsten Werthe bringt, wodurch man im vorliegenden Falle

$$R(35,30) = \left\{\frac{409}{(1.04)^{35}} \times 439 + \frac{402}{(1.04)^{36}} \times 433 + \frac{395}{(1.04)^{37}} \times 427 + \cdots\right\} : \left(\frac{409}{(1.04)^{35}} \times 439\right)$$

oder $R(35,30)$

$$= \left\{409 \times \frac{439}{(1.04)^{30}} + 402 \times \frac{433}{(1.04)^{31}} + 395 \times \frac{427}{(1.04)^{32}} + \cdots\right\} : \left(409 \times \frac{439}{(1.04)^{30}}\right)$$

erhält und nicht allein von den Lebensrenten her die abgezinsten Zahlen der Lebenden benutzen und sofort mit den betreffenden anderen Zahlen der Lebenden multipliciren, sondern auch die successive Addition dieser Produkte von unten auf vornehmen kann, um alsdann die baaren Werthe sämmtlicher Verbindungsrenten für alle verbundenen Paare mit gleichem Altersunterschiede zugleich zu erhalten.

Sollen diese Renten auf eine Anzahl von Jahren aufgeschoben werden, so fallen in den vorhergehenden Reihen wiederum so viele erste Glieder aus, als Jahre des Aufschubs bestimmt sind. Nimmt man zehn Jahre an, so bleibt demnach

$$\overset{10}{R}(35,30) = \left\{\frac{339 \times 374}{(1.04)^{10}} + \frac{332 \times 367}{(1.04)^{11}} + \frac{324 \times 360}{(1.04)^{12}} + \cdots\right\} : (409 \times 439)$$

oder $$\overset{10}{R}(35,30) = \left\{\frac{339 \times 374}{(1.04)^{45}} + \frac{332 \times 367}{(1.04)^{46}} + \frac{324 \times 360}{(1.04)^{47}} + \cdots\right\} : \frac{409 \times 439}{(1.04)^{35}}$$

Kennt man nun diese successiven Summen der abgezinsten Produkte, so ist die in den Klammern befindliche Reihe die neben den Altern (45,40) stehende, welche man nur noch durch das neben den Altern (35,30) stehende

abgezinste Produkt zu dividiren hat. Diese successiven Summen pflegen aber ihrer großen Menge wegen eben so wenig abgedruckt zu werden, wie solches bei den Summen der Produkte der Lebenden geschieht (Seite 95), weswegen man der vorhergehenden Reihe die Gestalt

$$\overset{10}{\mathrm{R}}(35{,}30) = \frac{\frac{339}{409} \times \frac{374}{439}}{(1{,}04)^{10}} \left\{ 339 \times 374 + \frac{332 \times 367}{1{,}04} + \frac{324 \times 360}{(1{,}04)^{2}} + \cdots \right\} : \frac{339 \times 374}{(1{,}04)^{45}}$$

$$\text{d. h. } \overset{10}{\mathrm{R}}(35{,}30) = \frac{339 \times 379}{409 \times 439} \times \frac{\mathrm{R}(45{,}40)}{(1.04)^{10}}$$

giebt. Nun bestehen von 409 × 439 ursprünglichen Paaren nach zehn Jahren noch 339 × 374 (S. 66), folglich ist $\frac{339 \times 374}{409 \times 439}$ die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Verbindung nach zehn Jahren (S. 150). *Soll man also den baaren Werth einer aufgeschobenen Verbindungsrente finden, so nehme man die Verbindungsrente für die Alter, bei welchen die Zahlung beginnt, zinse dieselben auf die Jahre des Aufschubs ab und multiplicire das Resultat mit der Wahrscheinlichkeit, daß die Verbindung zur Zeit noch fortbestehe.*

Verlangt man den baaren Werth einer *aufhörenden* Verbindungsrente, so berechnet man zunächst den baaren Werth der aufgeschobenen vom Jahre des Aufhörens bis zu Ende und subtrahirt diesen von dem baaren Werthe der vollen Verbindungsrente. Handelt es sich um den baaren Werth einer *aufgeschobenen und aufhörenden* Verbindungsrente, so berechnet man die baaren Werthe für die aufgeschobene Verbindungsrente bis zum Anfange und Schlusse der Zahlungen und subtrahirt die letzteren von den ersteren.

Alle diese Regeln stimmen genau mit denen für die Berechnung der baaren Werthe der Lebensrenten überein, nur daß die Berechnung jener Renten noch etwas weitläuftiger wird, desto mehr, weil sie für jeden andern Altersunterschied der beiden verbundenen Paare von neuem anzufangen ist. In den Tabellen VIII, A, B und C sind diese Renten für dieselben Alter wie bei den mittlern Verbindungsdauern, Tab. II, aufgeführt; auch ist die Anordnung dieser Tabellen die nämliche, aus denselben Gründen, wie solche S. 90 für die mittleren Verbindungsdauern angegeben worden sind.

Die so eben auseinandergesetzte Berechnung der baaren Werthe der Verbindungsrenten ist wiederum da, wo es auf das Auffinden solcher Werthe für alle Alter desselben Altersunterschiedes ankommt, die übersichtlichste und kürzeste, obgleich zu weitläuftig für die Berechnung eines einzelnen Werthes. Für diesen Fall kann man indeß folgenden Weg einschlagen, den wir der größern Deutlichkeit wegen für ein Paar nachweisen, bei welchem man die Sterbenden der einzelnen Jahre gehörig unterscheiden kann. Es ist nämlich

$$R(30{,}5) =$$

$$\left\{439 \times 579 + \frac{433 \times 567}{(1.04)^1} + \frac{427 \times 556}{(1.04)^2} + \frac{421 \times 547}{(1.04)^3} + \frac{415 \times 539}{(1.04)^4}\right\} : (439 \times 579)$$

oder auch, da

$$567 = 579 - 12$$
$$556 = 579 - 12 - 11$$
$$547 = 579 - 12 - 11 - 9$$
$$539 = 579 - 12 - 11 - 9 - 8$$

u. s. w. u. s. w.

ist, wo die Subtrahenden die Sterbenden der aufeinander folgenden Jahre für 579 fünfjährige Kinder bedeuten:

$$\begin{aligned} R(30{,}5) = \Big\{ & 439 \times 579 \\ & + \frac{433}{(1.04)^1} \times (579 - 12) \\ & + \frac{427}{(1.04)^2} \times (579 - 12 - 11) \\ & + \frac{421}{(1.04)^3} \times (579 - 12 - 11 - 9) \\ & + \frac{415}{(1.04)^4} \times (579 - 12 - 11 - 9 - 8) \\ & + \cdots\cdots\cdots \Big\} : (439 \times 579) \end{aligned}$$

Führt man die Multiplicationen aus und ordnet alles nach den entsprechenden Zahlen der Sterbenden, so hebt sich in der ersten Reihe der Faktor 579 im Zähler und Nenner weg und man behält:

$$\begin{aligned} R(30{,}5) = & \left\{439 + \frac{433}{(1.04)^1} + \frac{427}{(1.04)^2} + \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\} : 439 \\ & - \frac{12}{439 \times 579} \times \left\{\frac{433}{(1.04)^1} + \frac{427}{(1.04)^2} + \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\} \\ & - \frac{11}{439 \times 579} \times \left\{\cdots\cdots \frac{427}{(1.04)^2} + \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\} \\ & - \frac{9}{439 \times 579} \times \left\{\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\} \\ & - \frac{8}{439 \times 578} \times \left\{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

Die erste Reihe ist der baare Werth für die Leibrente der dreißigjährigen Person; die übrigen Reihen ließen sich gleichfalls auf solche baare Werthe überführen, indeß gelangt man zu einer noch kürzern Rechnung. Setzt man in der dritten Reihe statt 11 den gleichen Werth 12 — (12 — 11), so bedeutet der Minuendus 12 die Sterbenden des vorhergehenden Jahres, während der Subtrahendus 12 — 11 die Differenz der Sterbenden beider aufeinander folgender Jahre ausdrückt. Dadurch geht aber die dritte Reihe in

$$-\frac{12}{439 \times 579} \times \left\{\frac{427}{(1.04)^2} + \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$
$$+\frac{12-11}{439 \times 575} \times \left\{\frac{427}{(1.04)^2} + \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$

über, wo die obere Reihe mit der vorher gefundenen zweiten vom zweiten Gliede ab übereinstimmt, und da beide Reihen subtrahirt werden sollen, so kann man diese obere Reihe weglassen und jener zweiten vom zweiten Gliede ab den Faktor 2 geben. Man erhält sonach für die ersten drei Glieder von R(30,5)

$$R(30) - \frac{12}{439 \times 579} \times \left\{\frac{433}{(1.04)^1} + 2 \times \frac{427}{(1.04)^2} + 2 \times \frac{421}{(1.04)^3} + 2 \times \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$
$$+\frac{12-11}{439 \times 479} \times \left\{\cdots\cdots\cdots \frac{427}{(1.04)^2} + \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$

Setzt man im vierten Gliede statt der 9 zunächst 11 — (11 — 9) und statt der 11 den frühern Werth 12 — (12 — 11), so ist 9 soviel wie 12 — (12 — 11) — (11 — 9) und die vierte Reihe wird

$$-\frac{12}{399 \times 579} \times \left\{\frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$
$$+\frac{(12-11) \times (1.04)^{30}}{339 \times 579} \times \left\{\frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$
$$+\frac{11-9}{339 \times 579} \times \left\{\frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$

Die erste dieser Reihen stimmt mit der ersten Reihe des vorhergehenden Resultats vom dritten Gliede ab überein, und da sie gleichfalls subtrahirt werden soll, kann man sie weglassen und dafür jener Reihe vom genannten Gliede ab den Faktor 3 geben. Die zweite stimmt vom zweiten Gliede ab mit der zweiten Reihe des vorhergehenden Resultats überein und beide sollen addirt werden, weswegen man diese zweite Reihe weglassen und statt dessen jener Reihe vom zweiten Gliede ab den Faktor 2 geben kann. Sonach liefern jene vier ersten Reihen von R(30,5)

$$-\frac{12}{439 \times 579} \times \left\{\frac{433}{(1.04)^1} + 2 \times \frac{427}{(1.04)^2} + 3 \times \frac{421}{(1.04)^3} + 3 \times \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$
$$+\frac{12-11}{439 \times 579} \times \left\{\cdots\cdots\cdots \frac{427}{(1.04)^2} + 2 \times \frac{421}{(1.04)^3} + 2 \times \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$
$$+\frac{11-9}{439 \times 579} \times \left\{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{421}{(1.04)^3} + \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots\right\}$$

Statt der 8 im fünften Gliede von R(30,5) läßt sich zuerst 9 — (9 — 8) schreiben, und bedient man sich hier des früheren Werthes von 9, so erhält man 8 = 12 — (12 — 11) — (11 — 9) — (9 — 8), so daß jene fünfte Reihe in die vier Reihen

$$-\frac{12}{579 \times 439} \times \left\{ \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots \right\}$$
$$+\frac{12-11}{579 \times 439} \times \left\{ \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots \right\}$$
$$+\frac{11-9}{579 \times 439} \times \left\{ \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots \right\}$$
$$+\frac{9-8}{579 \times 439} \times \left\{ \frac{415}{(1.04)^4} + \cdots \right\}$$

übergeht, von denen die erste mit der ersten Reihe des vorhergehenden Resultats vom vierten Gliede ab, die zweite mit der zweiten Reihe vom dritten Gliede ab, die dritte mit der dritten Reihe vom zweiten Gliede ab übereinstimmt, und da alle diese Reihen gleichzeitig entweder subtrahirt oder addirt werden sollen, so kann man wiederum diese drei Reihen weglassen und dafür die Faktoren jener Reihen von den betreffenden Gliedern ab um 1 erhöhen. Man erkennt nun, daß sich auf dieselbe Weise nach und nach alle Glieder der Reihe R(30,5) heranziehen lassen; jedes Glied wird eine Reihe mehr als das vorhergehende ergeben, alle aber, mit Ausnahme der gesondert bleibenden letzten, durch Erhöhung der Faktoren in die früheren Reihen aufgehen. Man erhält also, wenn man noch Glied für Glied durch $(1.04)^{30}$ dividirt:

$$R(30,5) =$$
$$R(30) - 12 \times \left\{ \frac{433}{(1.04)^{31}} + 2 \times \frac{427}{(1.04)^{32}} + 3 \times \frac{421}{(1.04)^{33}} + 4 \times \frac{415}{(1.04)^{34}} + \cdots \right\} : \frac{579 \times 439}{(1.04)^{30}}$$
$$+ (12-11) \times \left\{ \cdots\cdots \frac{427}{(1.04)^{32}} + 2 \times \frac{421}{(1.04)^{33}} + 3 \times \frac{415}{(1.04)^{34}} + \cdots \right\} : \frac{579 \times 439}{(1.04)^{30}}$$
$$+ (11-9) \times \left\{ \cdots\cdots\cdots \frac{421}{(1.04)^{33}} + 2 \times \frac{415}{(1.04)^{34}} + \cdots \right\} : \frac{579 \times 439}{(1.04)^{30}}$$
$$+ (9-8) \times \left\{ \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{415}{(1.04)^{34}} + \cdots \right\} : \frac{579 \times 439}{(1.04)^{30}}$$

Geschähe das Absterben während des ganzen Verlaufs des menschlichen Lebens gleichmäßig, so würden die vor den letzten Reihen als Faktoren stehenden Differenzen der Sterbenden Null sein und somit alle Reihen bis auf die erste wegfallen und es wäre der baare Werth der Verbindungsrente zweier Personen gleich dem baaren Werthe der Leibrente einer der beiden Personen weniger dem baaren Werthe der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsenden, postnumerando zahlbaren Rente dieser Person, multiplicirt mit der Anzahl der binnen Jahresfrist Sterbenden und dividirt durch die Zahl der Lebenden der andern Person.

Nun sind aber die Differenzen der Sterbenden zweier unmittelbar auf einander folgender Jahre zwar in den meisten Fällen, aber nicht überall Null, weswegen an diesen Stellen noch die übrigen Glieder hinzutreten. Man kann

sich jedoch, da alle Reihen, auch die erste, den Faktor $\frac{579 \times 439}{(1.04)^{30}}$ haben, es auch gleichgültig ist, ob man die Reihen zu der genannten Differenz addirt oder von deren Subtrahendus subtrahirt, die Sache so vorstellen, als ob dessenungeachtet der vorhergehende Satz richtig und an dem baaren Werthe der wachsenden Leibrente da, wo die Differenzen nicht Null sind, Correkturen durch die übrigen Reihen anzubringen wären. Alle diese Reihen sind aber Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden und in Col. g der Tab. VII verzeichnet, wodurch die Rechnung sehr einfach wird, um so mehr, da diejenigen Differenzen der Sterbenden zweier unmittelbar auf einander folgenden Jahre, welche nicht Null, in den meisten Fällen + 1 oder — 1 sind und also weiter keine Multiplicationen herbeiführen. In der folgenden

Nachweisung der Differenzen der Sterbenden je zweier auf einander folgender Jahre

0	— 161	9	— 2	72	— 1	Die übrigen hier nicht aufgeführten Differenzen sind Null.
1	— 46	10	— 1	74	— 1	
2	— 18	19	+ 1	76	— 1	
3	— 11	27	+ 1	79	— 1	
4	— 2	34	+ 1	80	— 1	
5	— 1	45	+ 1	83	— 1	
6	+ 2	49	+ 1	85	— 1	
7	+ 1	61	+ 1	89	— 1	
8	+ 1	70	— 1	95	— 1	

sind die Vorzeichen + und —, wie solche auf die erste Reihe der wachsenden Leibrente einwirken, mit aufgeführt. Man suche sich demnach in dieser Tabelle das dem Alter einer der beiden Personen entsprechende Jahr auf und schreibe von da ab alle Differenzen, so weit dieselben nicht Null sind, jedoch nicht mit dem daneben stehenden, sondern mit demjenigen Alter auf, welches man erhält, wenn man dazu die um 2 vergrößerte Altersdifferenz beider Personen hinzufügt, und stelle daneben die diesen Altersangaben entsprechenden Summen der Summen der aufgezinsten Zahlen der Lebenden so, daß die zu addirenden und zu subtrahirenden Zahlen unter einander zu stehen kommen. Nur in den wenigsten Fällen sind diese Zahlen noch mit Differenzen der Sterbenden zu multipliciren, in allen Fällen ergiebt sich zuletzt eine Zahl, die addirend oder subtrahirend zum ersten Gliede hinzutritt. In den nachfolgenden drei Berechnungen der

Correkturen für

		R(33,28) bis R(39,34)				R(32,28) bis R(36,34)				R(36,30) bis R(40,34)	
		+	—			+	—			+	—
(34) 41	+ 1	11741.3	.	40	+ 1	12844.1	.	42	+ 1	10716.3	.
(45) 52	+ 1	3883.7	.	51	+ 1	4339.4	.	53	+ 1	3462.3	.
(49) 56	+ 1	2428.3	.	55	+ 1	2742.1	.	57	+ 1	2144.0	.
(61) 68	+ 1	429.9	.	67	+ 1	507.8	.	69	+ 1	362.4	.
(70) 77	— 1	.	75.9	76	— 1	.	94.3	78	— 1	.	60.7
(72) 79	— 1	.	48.1	78	— 1	.	60.7	80	— 1	.	37.8
(74) 81	— 1	.	29.4	80	— 1	.	37.8	82	— 1	.	22.7
(76) 83	— 1	.	17.3	82	— 1	.	22.7	84	— 1	.	13.0
(79) 86	— 1	.	7.0	85	— 1	.	9.6	87	— 1	.	5.0
(80) 87	— 1	.	5.0	86	— 1	.	7.0	88	— 1	.	3.4
(83) 90	— 1	.	1.5	89	— 1	.	2.3	91	— 1	.	0.9
(85) 92	— 1	.	0.5	91	— 1	.	0.9	93	— 1	.	0.3
(89) 96	— 1	.	0.0	95	— 1	.	0.0	97	— 1	.	0.0
		+ 18483.2	— 184.7			+ 20433.4	— 235.3			+ 16685.0	— 143.8
		+ 18299				+ 20198				+ 16541	

bezieht sich das erste Beispiel auf Verbindungen von Personen im Altersunterschiede von fünf Jahren. Wäre die jüngere Person achtundzwanzig Jahr, so würden nach der vorhergehenden Tabelle alle Differenzen vom 28. bis 33. Jahre einschließlich wegfallen und demnach 34 die e r s t e Werth habende Differenz sein und als solche für die Alter zwischen 28 bis 34 Jahr einschließlich gelten. Bei dem Altersunterschiede von fünf Jahren hat man, da die ältere Person als Hauptperson zu Grunde liegt, die Altersangaben der Tabelle um + 5 + 2, d. i. um 7 zu erhöhen, wie solches aus der Berechnung selbst deutlich zu sehen. Wollte man dagegen die jüngere Person zu Grunde legen, so wäre das Tabellenalter um — 5 + 2 zu erhöhen, d. i. um 3 zu erniedrigen und würde jene Grenze 28 Jahr bis 34 Jahr auf das höhere Alter zu beziehen sein. Vermittelst der schließlichen Correktur + 18299 lassen sich nun folgende Verbindungsrenten berechnen:

$$R(33,28) = (33)\ 15.5263 - \frac{6 \times (34)\ 21373.8 + 18299}{(33)\ 115.394 \times (28)\ 451} = 12.7105$$

$$R(34,29) = (34)\ 15.3259 - \frac{6 \times (35)\ 19697.5 + 18299}{(34)\ 109.374 \times (29)\ 445} = 12.5217$$

$$R(35,30) = (35)\ 15.1175 - \frac{6 \times (36)\ 18130.6 + 18299}{(35)\ 103.647 \times (30)\ 439} = 12.3245$$

$$R(36,31) = (36)\ 14.9378 - \frac{6 \times (37)\ 16667.4 + 18299}{(36)\ 97.9549 \times (31)\ 433} = 12.1486$$

$$R(37,32) = (37)\ 14.7523 - \frac{6 \times (38)\ 15302.1 + 18299}{(37)\ 92.5473 \times (32)\ 427} = 11.9659$$

$$R(38,33) = (38)\ 14.5604 - \frac{6 \times (39)\ 14029.4 + 18299}{(38)\ 87.4106 \times (33)\ 421} = 11.7754$$

$$R(39,34) = (39)\ 14.3619 - \frac{6 \times (40)\ 12844.1 + 18299}{(39)\ 82.5326 \times (34)\ 415} = 11.5777,$$

welche Werthe mit den direkt berechneten nahebei übereinstimmen. Für andere als die vorstehenden Alter ist die berechnete Correktion 18299 nicht mehr brauchbar, indem für geringere Alter noch die Differenzen der Jahre 27, 19, 10 u. s. w. eintreten, für höhere Alter aber die Differenzen der Jahre 34, 45, 49 u. s. w. ausscheiden würden. Der folgenden Beispiele wegen enthält die vorstehende Berechnung noch die Correktionen für Verbindungen mit der Altersdifferenz 4 und 6. Man findet demnach z. B.:

$$R(35,31) = 15.1175 - \frac{6 \times 18130.6 + 20198}{103.647 \times 433} = 12.2435$$

$$R(36,30) = 14.9378 - \frac{6 \times 16667.4 + 16541}{97.9549 \times 439} = 12.2276.$$

Soll der baare Werth des Wittwenthalers gefunden werden, so hat man die Produkte der übrig gebliebenen Frauen und der sterbenden Männer (S. 66) abzuzinsen, die Resultate zu addiren und die Summe durch das Produkt der Zahlen der ursprünglichen Männer und Frauen zu dividiren, wobei man die Abzinsungen wiederum nach dem Alter der lebenden Frauen einrichten kann. In der einfachsten Form ist demnach der baare Werth des Wittwenthalers bei zu Grunde gelegter Vorausbezahlung

$$T\left(^{30}_{35}\right) = \left\{433 \times 7 + \frac{427 \times 7}{1.04} + \frac{421 \times 7}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409)$$

Kennt man demnach die abgezinsten Zahlen der Lebenden, so ist die direkte Berechnung dieser Werthe nicht allzu weitläuftig, besonders dann, wenn dieselben für alle Verbindungen gleichen Altersunterschiedes gefunden werden sollen; für vereinzelte Verbindungen indeß kommt man schneller zum Ziele, wenn man statt der Zahlen der Sterbenden die Differenzen der Lebenden je zweier unmittelbar auf einander folgenden Jahre einsetzt, z. B. 7 = 409 — 402, 7 = 402 — 395, 7 = 395 — 388 u. s. w. Multiplicirt man nämlich diese Differenzen mit den betreffenden Zahlen der lebenden Frauen und trennt die zu addirenden und zu subtrahirenden Glieder, so ist

$$T\left(^{30}_{35}\right) = \left\{433 \times 409 + \frac{427 \times 402}{1.04} + \frac{421 \times 395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409)$$
$$- \left\{402 \times 433 + \frac{427 \times 395}{1.04} + \frac{421 \times 388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409)$$

Für das erste Glied dieses Ausdrucks läßt sich aber

$$\frac{433}{439} \times \left\{433 \times 409 + \frac{427 \times 402}{1.04} + \frac{421 \times 395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (433 \times 409) =$$
$$\frac{433}{439} \times R(35,31)$$

schreiben; denn führt man in beiden Ausdrücken die außerhalb der Klammern

stehenden Multiplicationen und Divisionen aus, so ergeben sich dieselben Zahlenverbindungen. Eben so und aus demselben Grunde darf man das zweite Glied durch

$$\frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times \left\{433 \times 402 + \frac{427 \times 395}{1.04} + \frac{421 \times 388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (433 \times 402)$$
$$= \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times R(36,31)$$

ausdrücken, so daß also

$$T\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times R(35,31) - \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times R(36,31)$$

und ebenso

$$T\binom{35}{30} = \frac{402}{409} \times R(36,30) - \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times R(36,31)$$

d. h. um den baaren Werth des Wittwenthalers zweier verbundener Personen zu erhalten, nehme man die baaren Werthe der Verbindungsrente für das Paar, wobei die überlebende Person ein Jahr älter geworden, die zu überlebende aber das ursprüngliche Alter hat, desgleichen für das Paar, wo beide Personen um ein Jahr älter geworden, multiplicire diese Werthe resp. mit den Wahrscheinlichkeiten, daß die betreffende Person, so wie das betreffende Paar nach Verlauf des Jahres noch vorhanden sei und subtrahire die Produkte.

Dieser Satz ist ganz analog der Seite 102 aufgestellten Regel. Setzt man die vorher gefundenen Zahlenwerthe ein, so ist also

$$T\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times 12.2435 - \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times 12.1486 = 0.2988$$

$$\text{und } T\binom{35}{30} = \frac{402}{409} \times 12.2276 - \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times 12.1486 = 0.2409.$$

Es kann auch nach den baaren Werthen desjenigen Sterbethalers oder der Abfindung gefragt werden, welche gezahlt wird, wenn zwei verbundene Personen im Laufe eines und desselben Jahres sterben, und wird sich dieser baare Werth ergeben (Seite 66), wenn man die Produkte der sterbenden Männer und der sterbenden Frauen abzinst und die Summe dieser abgezinsten Werthe durch das Produkt aus der ursprünglichen Anzahl der Männer und Frauen dividirt, so daß bei zu Grunde gelegter Vorausbezahlung

$$TT(35,30) = \left\{6 \times 7 + \frac{6 \times 7}{1.04} + \frac{6 \times 7}{(1.04)^2} + \frac{6 \times 7}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (439 \times 409)$$

ist. Bringt man nun noch eine der beiden Zahlen der Lebenden auf den abgezinsten Werth, so gehen die entsprechenden Zahlen der Sterbenden gleichfalls in ihre abgezinsten Werthe über, welche sich sehr leicht mit der Zahl der Sterbenden der andern Person multipliciren lassen, so daß die direkte Berechnung wiederum kurz genug ist, sich aber auch durch die nachfolgende Umformung

ganz umgehen läßt. Setzt man nämlich auch hier statt der Zahlen der Sterbenden die Unterschiede der Lebenden je zweier auf einander folgenden Jahre, also in TT(35,30)

$$6 = 439 - 433,\ 6 = 433 - 427,\ 6 = 427 - 421, \ldots$$
$$7 = 409 - 402,\ 7 = 402 - 395,\ 7 = 395 - 388, \ldots$$

führt, wie Seite 105, die Multiplicationen aus und trennt die zu addirenden und zu subtrahirenden Glieder, so ist

$$\begin{aligned} TT(35,30) = & \left\{439 \times 409 + \tfrac{433 \times 402}{1.04} + \tfrac{427 \times 395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409) \\ & + \left\{433 \times 402 + \tfrac{427 \times 395}{1.04} + \tfrac{421 \times 388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409) \\ & - \left\{439 \times 402 + \tfrac{433 \times 395}{1.04} + \tfrac{421 \times 388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409) \\ & - \left\{433 \times 409 + \tfrac{427 \times 402}{1.04} + \tfrac{421 \times 395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409) \end{aligned}$$

Die erste Reihe ist unmittelbar R(35,30) und statt der übrigen kann man setzen

$$\tfrac{433 \times 402}{439 \times 409} \times \left\{433 \times 402 + \tfrac{427 \times 395}{1.04} + \tfrac{421 \times 388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (433 \times 402) = \tfrac{433 \times 402}{439 \times 409} \times R(36,31)$$

$$\tfrac{402}{409} \times \left\{439 \times 402 + \tfrac{433 \times 395}{1.04} + \tfrac{427 \times 388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 402) = \tfrac{402}{409} \times R(36,30)$$

$$\tfrac{433}{439} \times \left\{433 \times 409 + \tfrac{427 \times 402}{1.04} + \tfrac{421 \times 395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (433 \times 409) = \tfrac{433}{409} \times R(35,31),$$

so daß

$$TT(35,30) = R(35,30) + \tfrac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31) - \tfrac{402}{409} \times R(36,30) - \tfrac{433}{439} \times R(35,31)$$

ist und der baare Werth des beim gleichzeitigen Tode zweier verbundener Personen vorauszuzahlenden Sterbethalers gefunden wird, wenn man zum baaren Werthe der Verbindungsrente beider Personen den mit der Wahrscheinlichkeit, daß die Verbindung im nächsten Jahre noch fortdaure, multiplicirten baaren Werth der Verbindungsrente zweier um ein Jahr älterer Personen addirt und von der Summe die Summe derjenigen baaren Werthe subtrahirt, welche man erhält, wenn man die baaren Werthe für Verbindungsrenten zweier Personen, von denen je eine um ein Jahr älter geworden und die andere im ursprünglichen Alter ver-

blieben, mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit, das höhere Alter zu erreichen, multiplicirt und die Produkte addirt. Ein Satz, der dem a. a. O. ausgesprochenen analog ist.

Hiernach ist also

$$TT(35,30) =$$
$$12.3248 + \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times 12.1486 - \frac{402}{409} \times 12.2276 - \frac{433}{439} \times 12.1486 = 0.0077.$$

Um den Zusammenhang kennen zu lernen, welcher zwischen diesen verschiedenen Quantitäten stattfindet, bemerke man, daß sich aus

$$T\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times R(35,31) - \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times R(36,31)$$
$$T\binom{35}{30} = \frac{402}{409} \times R(36,30) - \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times R(36,31)$$
$$TT(35,30) =$$
$$R(35,30) + \frac{433 \times 402}{439 \times 409} \times R(36,31) - \frac{433}{439} \times R(35,31) - \frac{402}{409} \times R(36,30)$$

durch Addition

$$T\binom{30}{35} + T\binom{35}{30} + TT(35,30) = R(35,30) - \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31),$$

für das gewählte Beispiel also

$$0.2988 + 0.2409 + 0.0077 = 12.3248 - 11.7774$$

ergiebt, d. h. die Summe der baaren Werthe der Abfindungen jeder der beiden überlebenden Personen einer Verbindung beim Tode der andern und des baaren Werthes der Abfindung für die im Laufe eines und desselben Jahres aussterbenden Verbindungen ist gleich dem Unterschiede des baaren Werthes der Verbindungsrente für das gegebene und der mit der Wahrscheinlichkeit des Fortbestehens multiplicirten Verbindungsrente für ein Paar, wobei beide Personen je um ein Jahr älter geworden sind.

Dieses Resultat findet aber seine natürliche Erklärung; denn geht man von 409 × 439 Personen aus und setzt alle Zahlungsbeträge als gleich voraus, so werden in jedem Jahre die noch vorhandenen Verbindungen gegen die vorhergehenden Jahre gerade um so viel weniger einzahlen, als die Kasse an neu entstandene Wittwer, Wittwen und für ganz ausgestorbene Paare auszuzahlen gehabt (Seite 77).

Endlich bleibt noch der baare Werth der Ueberlebensrente für eine bestimmte Person einer gegebenen Verbindung zu ermitteln. Man wird denselben erhalten durch Abzinsung der Produkte der Lebenden der empfangsberechtigten Personen und der Gestorbenen der damit verbundenen Personen und Division der Summen aller dieser baaren Werthe durch das Produkt der ursprünglichen

beiderseitigen Lebenden (Seite 66). Bei zu Grunde gelegter jährlicher Zahlung wäre demnach der baare Werth der Ueberlebensrente

$$R\binom{30}{35} = \left\{\frac{433 \times 7}{1.04} + \frac{427 \times 14}{(1.04)^2} + \frac{421 \times 21}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (409 \times 439).$$

Wollte man indeß diese Formel zur Berechnung verwenden, so würde die Arbeit aus den bereits Seite 92 angegebenen Gründen noch weitläuftiger sein, als die Berechnung der baaren Werthe der Verbindungsrenten. Aus dem a. a. O. angegebenen Satz läßt sich aber schon schließen, daß der baare Werth der Ueberlebensrente einer bestimmten von zwei verbundenen Personen gleich sein werde dem Unterschiede zwischen dem baaren Werthe ihrer Lebensrente und dem der Verbindungsrente beider Personen.

Dieser Satz wird auch durch die obige Formel bestättigt; denn setzt man wiederum, wie Seite 93, statt der Gestorbenen die Differenz der ursprünglich Lebenden und der Lebenden der auf einander folgenden Jahre, also

$$7 = 409 - 402,\ 14 = 409 - 395,\ 21 = 409 - 388,\ \ldots$$

multiplicirt dieselben mit den Lebenden der andern Person und trennt die zu addirenden und zu subtrahirenden Glieder, so hebt sich bei jenen wiederum der Faktor 409 im Zähler und Nenner weg und man erhält

$$R\binom{30}{35} = R(30) - R(35,30),$$

wie man gleichfalls

$$R\binom{35}{30} = R(35) - R(35,30)$$

erhalten wird. Die baaren Werthe der Ueberlebensrenten sind in den Tabellen IX, A, B und C aufgeführt und liegt ihrer Anordnung dasselbe Princip zu Grunde, welches Seite 93 bei den mittlern Ueberlebensdauern erörtert worden ist.

Bisher ist vorausgesetzt worden, daß alle Zahlungen im Laufe eines Jahres nur einmal entweder am Anfange oder am Ende desselben geschehen, während dieselben in der Wirklichkeit zu jeder andern Zeit und in der Regel binnen Jahresfrist öfter als einmal erfolgen. Es bleibt sonach noch der Einfluß zu untersuchen, welchen dieser Gebrauch auf die baaren Werthe solcher Zahlungen ausüben wird. Der größern Deutlichkeit wegen unterscheide man hierbei solche Zahlungen, welche erst von dem eingetretenen Todesfalle einer Person abhängen sollen und solche, welche unmittelbar erfolgen. Bei den ersteren findet im strengen Sinne des Wortes immer nur Nachbezahlung statt, weil die Zahlung nicht eher geleistet werden kann, bis der bedingende Todesfall wirklich eingetreten, und wenn auch einige Wittwenkassen bestimmen, die Zahlung der Wittwen-Pension geschähe pränumerando, so ist es doch selbstver-

ständlich, daß der Augenblick, in welchem der Mann gestorben, als Anfangstermin gemeint sei.

Soll die Zahlung nur einmal im Jahre geleistet werden, so kann dieses für das einfache Sterbegeld nur am Ende der Sterbejahre geschehen, weil jeder andere Termin Vorausbezahlungen einschließen würde. Der baare Werth des Sterbethalers unter dieser Bedingung wäre demnach nicht T, sondern, je nachdem 3%, 3½% oder 4% zu Grunde gelegt werden, $\frac{T}{1.03}$, $\frac{T}{1.035}$ oder $\frac{T}{1.04}$ und giebt es verschiedene Tabellen, worin nur diese Werthe angegeben sind, wovon man sich vor dem Gebrauch dadurch Kenntniß zu verschaffen hat, daß man den baaren Werth des Sterbethalers für das höchste aufgeführte Alter nach der zu Grunde liegenden Mortalitäts-Tabelle und dem angenommenen Zinsfuß berechnet. Ist jenes höchste Alter zugleich das höchste der Tabelle, so erkennt man den Zahlungstermin daran, daß bei Vorausbezahlung die baaren Werthe für die Leibrente und für den Sterbethaler 1, bei Nachbezahlung dagegen der baare Werth der Leibrente 0 und der des Sterbethalers dem ersten Abzinsungsfaktor gleich sind.

Ist bedungen worden, daß die Zahlung des Sterbegeldes im Laufe eines Jahres mehrere Male, z. B. halbjährlich, vierteljährlich, auf alle bis dahin verstorbene Mitglieder erfolgen solle, so läßt sich nach dem Gesetze des gleichmäßigen Absterbens im Laufe eines und desselben Jahres voraussetzen, daß in jedem Termine ein gleicher Betrag zur Auszahlung kommen werde, wie solches früher bei den terminlichen Zeitrenten angenommen wurde. Es werden demnach auch dieselben Abzinsungen vorgenommen werden müssen, die Seite 164 und 165 für halbjährliche und vierteljährliche Nachzahlungen angegeben sind.

Soll die Zahlung des Sterbegeldes unabhängig von jeder bestimmten Zeit, vielmehr unmittelbar nach eingetretenem Todesfalle geleistet werden, so läßt sich annehmen, daß sämmtliche Todesfälle in der Mitte der Sterbejahre eintreten (Seite 167) und sind also die Abzinsungsfaktoren der Sterbegelder

für Zahlung nach eingetretenem Todesfalle

bei 3% . . . . $\frac{1}{1.015} = 0.985222$,

bei 3½% . . . $\frac{1}{1.0175} = 0.982801$,

bei 4% . . . . $\frac{1}{1.02} = 0.980392$.

Soll endlich die Auszahlung des Sterbegeldes, wie es bei Lebensversicherungen zu geschehen pflegt, zwar vom Sterbetage abhängig sein, aber nicht unmittelbar, sondern eine namhafte Zeit nachher erfolgen, so ist auch diese mit zu veranschlagen; bei vierteljährlicher Respektzeit z. B. die Abzinsung der Tabellenzahlen auf dreiviertel Jahr anzuwenden.

Bei den Lebens- und Verbindungsrenten ließe sich gleichfalls voraussetzen, daß auch bei anderen Zahlungsterminen, als dem Anfange des Jahres, alle

diejenigen Personen, welche diesen Zeitpunkt erlebt haben, noch für die ganze Dauer des Jahres zahlungsverpflichtet oder anspruchsberechtigt bleiben sollen, und würden in diesem Falle dieselben Abzinsungen, wie bei den Sterbegeldern anzubringen sein. In der Praxis würde aber jene Voraussetzung in beiden Fällen Unbequemlichkeiten herbeiführen, weswegen man von dem Principe auszugehen hat, daß nur noch die vorhandenen Personen oder Verbindungen Zahlungen zu leisten oder zu empfangen haben. Es ist leicht einzusehen, daß sich unter dieser Annahme bei Vorausbezahlungen die baaren Werthe der Renten verringern, indem einmal auf diejenigen Personen oder Verbindungen, welche von einem Termine zum andern ausscheiden, keine Zahlungen mehr fallen, zum andern der Zinsgenuß vom Anfange des Jahres bis zum Zahlungstermine in Abzug zu bringen ist. Hat man es z. B. mit 332 sechsundvierzigjährigen Personen zu thun, so würden dieselben bei vierteljährlicher Vorausbezahlung 332 Zahlungen sofort leisten oder beanspruchen; bei vierteljährlicher Vorausbezahlung mit jedesmal dem vierten Theil der Jahreszahlung stellt sich die Sache dagegen so, daß am Anfange des ersten Quartals 332 Viertelzahlungen, am Anfange des zweiten 330, am Anfange des dritten 328 und am Ende des vierten 326 Viertelzahlungen fällig werden. Zinst man daher die drei letzten Raten resp. auf ein, zwei und drei Vierteljahre ab, so ist der baare Werth derselben:

bei 3%	bei 3½%	bei 4%
83.00	83.00	83.00
81.89	81.79	81.68
80.79	80.59	80.39
79.71	79.42	79.13
325.39	324.80	324.20
	gegen 332.	

Sind Nachzahlungen ausgemacht worden, so verhält sich die Sache zufolge der angegebenen Gründe gerade umgekehrt und wird der baare Werth der terminlichen Zahlungen größer sein als der der jährlichen. So würden im gewählten Beispiele bei jährlicher Nachzahlung 324 Beiträge am Ende des Jahres gezahlt werden, während bei vierteljährlichen Zahlungen am Ende des ersten, zweiten, dritten und vierten Quartals resp. 330, 328, 326 und 324 Viertelbeiträge gezahlt werden. Zinst man alle diese Zahlungen auf den Anfang des Jahres zurück, so erhält man

bei 3%	bei 3½%	bei 4%
81.89	81.79	81.68
80.79	80.59	80.39
79.71	79.42	79.13
78.64	78.25	77.88
321.03	320.05	319.08
	gegen	
314.56	313.00	311.51.

Für die Verbindungsrenten findet ein ähnliches Verhältniß statt. Gleichzeitig sieht man, daß die Unterschiede der baaren Werthe bei jährlicher Zahlung und bei terminlicher Zahlung nur wenig durch den Zinsfuß bedingt werden.

Das Vorstehende gilt zwar vorläufig nur für die Zahlungen eines einzigen Jahres, indeß sieht man daraus doch sogleich, daß der Einfluß auf den baaren Werth der Leibrente eben so zu ermitteln ist, indem man die einzelnen Terminalzahlungen zunächst auf den Anfang des Jahres der Zahlung und von da auf den Anfang des ganzen Geschäfts abzinst.

Wird demnach die Leibrente halbjährlich vorausbezahlt, so erfolgt dieselbe am Anfange und in der Mitte eines jeden Jahres mit dem jedesmaligen Beitrage $\frac{1}{2}$. Der baare Werth der ersteren Zahlungen ist also z. B. bei fünfunddreißigjährigen Person $\frac{1}{2} \times R(35)$. Um den Werth der übrigen Zahlungen zu bestimmen, ist zuvörderst zu bemerken, daß nach dem Gesetze des gleichmäßigen Absterbens in der Mitte eines Jahres noch so viele Lebende vorhanden sein werden, als die Zahl der Lebenden am Anfange des Jahres, vermindert um die halbe Anzahl der Sterbenden im Laufe des Jahres, oder auch so viel, als die Zahl der Lebenden am Ende des Jahres, vermehrt um die halbe Anzahl der Sterbenden im Laufe des Jahres, beträgt. Hieraus folgt aber, daß die doppelte Zahl der Lebenden in der Mitte des Jahres gleich ist der Summe der Zahlen der Lebenden am Anfange und am Ende des Jahres; also wird die Zahl der Lebenden in der Mitte des Jahres der Hälfte dieser Summe gleich sein; — kürzer, die Zahl der Lebenden in der Mitte des Jahres ist für fünfunddreißigjährige Personen z. B. $409 - \frac{1}{2} \times 7 = 409 - \frac{1}{2}(409 - 402) = 409 - \frac{1}{2} \times 409 + \frac{1}{2} \times 402$, d. i. $\frac{1}{2} \times (409 + 402)$, wie vorher. Da nun alle Zahlungen in der Mitte der Jahre zunächst auf den Anfang der betreffenden Jahre, und von da auf den Anfang des Geschäfts abzuzinsen sind, so ist ihr baarer Werth

$$\frac{1}{4 \times 1.02} \times \left\{409 + 402 + \frac{402 + 395}{1.04} + \frac{395 + 388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

$$\text{d. i. } \frac{1}{4 \times 1.02} \times \left\{409 + \frac{402}{1.04} + \frac{395}{(1.04)^2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right\} : 409$$

$$+ \frac{1}{4 \times 1.02} \times \left\{402 + \frac{395}{1.04} + \frac{388}{(1.04)^2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right\} : 409.$$

Die erstere Reihe ist unmittelbar $\frac{1}{4 \times 1.02} \times R(35)$, und die andere läßt sich schreiben:

$$\frac{1.04}{4 \times 1.02} \times \left\{ \frac{402}{1.04} + \frac{395}{(1.04)^2} + \frac{388}{(1.04)^3} + \cdots \right\} : 409$$

oder auch, wenn man zuerst $\frac{1.04}{4 \times 1.02}$ addirt und hinterher subtrahirt:

$$\frac{1.04}{4 \times 1.02} \times \left\{ 409 + \frac{402}{1.04} + \frac{395}{(1.04)^2} + \frac{388}{(1.04)^3} + \cdots \right\} : 409 - \frac{1.04}{4 \times 1.02}$$

d. i.

$$\frac{1.04}{4 \times 1.02} \times R(35) - \frac{1.04}{4 \times 1.02}$$

folglich

$$R^{\frac{2}{2}}(35) = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{4 \times 1.02} + \frac{1.04}{4 \times 1.02}\right) \times R(35) - \frac{1.04}{4 \times 1.02},$$

oder ganz kurz, da $\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \times 1.02} + \frac{1.04}{4 \times 1.02} = \frac{1}{2} + \frac{2.04}{4 \times 1.02} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ist:

$$R^{\frac{2}{2}}(35) = R(30) - \frac{1.04}{4 \times 1.02},$$

so daß das letztere Glied unabhängig von dem Alter der betreffenden Person ist und nur als Correktur hinzutritt. Gleichfalls ist ersichtlich, daß die Zusammenziehung nicht bloß für den Zinsfuß 1.04, sondern für jeden beliebigen andern eben so gültig ist, daß dieselbe aber wesentlich von dem Umstande abhängt, daß alle terminlich fällig gewordene Gelder im Laufe des Fälligkeitsjahres nur einfache Zinsen tragen, weswegen auch diese Voraussetzung bequemer als alle übrigen ist (Seite 159).

Es ist ferner

$$\frac{1.03}{4 \times 1.015} = 0.2537$$
$$\frac{1.035}{4 \times 1.0175} = 0.2543$$
$$\frac{1.03}{4 \times 1.02} = 0.2549,$$

so daß alle diese Werthe unter sich und von 0.25 wenig verschieden sind. Man pflegt daher zu sagen, daß man bei Vorausbezahlung den baaren Werth der halbjährlichen aus dem der jährlichen Zahlungen erhalte, wenn man letztern um den vierten Theil einer Jahresrente vermindert, so daß bei dieser Annäherung dem Zinsfuße kein Einfluß auf das Resultat eingeräumt ist.

Der baare Werth bei vierteljährlichen Zahlungen wird gegen den bei halbjährlichen eine ähnliche Verkürzung erleiden, wie diese gegen die baaren Werthe der jährlichen Zahlung, weswegen

$$R^{\frac{4}{4}}(35) = R(35) + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = R(35) + \tfrac{3}{8}$$

sein wird.

Eben so erhält man

$$\mathrm{R}^{\frac{8}{8}}(35) = \mathrm{R}(35) + \tfrac{7}{16} \text{ und } \mathrm{R}^{\frac{16}{16}}(35) = \mathrm{R}(35) + \tfrac{15}{32},$$

und kann letztere in der Praxis unbedenklich als für monatliche Zahlungen gültig angesehen werden.

Denkt man sich das Jahr durch fortwährendes Halbiren in eine immer größere und größere Anzahl kleinerer und kleinerer Theile zerlegt, so liegen diese zuletzt ununterbrochen an einander; ist demnach der jährliche Betrag eines ununterbrochenen Genusses, wie solcher in den Pensionsanstalten gewährt zu werden pflegt, 1, so ist der baare Werth desselben

$$\mathrm{R}(35) + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \cdots = \mathrm{R}(35) + \tfrac{1}{2}.$$

Davon nämlich, daß diese letztere Reihe $\frac{1}{2}$ ist, kann man sich sehr leicht überzeugen; denn bleibt man beim Gliede $\frac{1}{4}$ stehen, so fehlt noch $\frac{1}{4}$ an $\frac{1}{2}$; legt man aber nach und nach das zweite, dritte, vierte Glied u. s. w. hinzu, so fehlen bezüglich nur noch $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ u. s. w., so daß der Unterschied immer geringer wird und zuletzt ganz verschwindet.

Sollen die Zahlungen vierteljährlich zum voraus erfolgen, so ist zunächst, nach dem Vorhergehenden, z. B. für fünfunddreißigjährige Personen, die Zahl der Lebenden

am Anfange des ersten Vierteljahres: 409

„ „ „ zweiten „ $\frac{1}{2} \times \left(409 + \frac{409 + 402}{2}\right) = \frac{3 \times 409 + 402}{4}$

„ „ „ dritten „ $\frac{409 + 402}{2} = \frac{2 \times 409 + 2 \times 402}{4}$

„ „ „ vierten „ $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2 \times 409 + 2 \times 402}{4} + 402\right) = \frac{409 + 3 \times 402}{4}$

Faßt man daher die gleichlautenden Vierteljahrszahlungen mit je $\frac{1}{4}$ zusammen, so ist ihr baarer Werth

$$\tfrac{1}{4} \times \left\{409 + \tfrac{402}{1.04} + \tfrac{395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

$$+ \tfrac{3}{4 \times 1.02} \times \left\{409 + \tfrac{402}{1.04} + \tfrac{395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

$$+ \tfrac{1}{16 \times 1.01} \times \left\{402 + \tfrac{395}{1.04} + \tfrac{388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

$$+ \tfrac{2}{16 \times 1.02} \times \left\{409 + \tfrac{402}{1.04} + \tfrac{395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

$$+ \tfrac{2}{16 \times 1.02} \times \left\{402 + \tfrac{395}{1.04} + \tfrac{388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

$$+ \tfrac{1}{16 \times 1.03} \times \left\{409 + \tfrac{402}{1.04} + \tfrac{395}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

$$+ \tfrac{3}{16 \times 1.03} \times \left\{402 + \tfrac{395}{1.04} \times \tfrac{388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

Die erste, zweite, vierte und sechste Reihe sind zusammen genommen unmittelbar

$$\frac{1}{4} \times (1 + \frac{3}{4 \times 1.01} + \frac{2}{4 \times 1.02} + \frac{1}{4 \times 1.03}) \times R(35),$$

die übrigen lassen sich dagegen in

$$\frac{1}{16} \times (\frac{1}{1.01} + \frac{2}{1.02} + \frac{3}{1.03}) \times \left\{402 + \frac{395}{1.01} + \frac{388}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : 409$$

zusammenfassen und gehen auf dieselbe Weise wie vorher bei den halbjährlichen Zahlungen in

$$\frac{1.04}{16} \times (\frac{1}{1.01} + \frac{2}{1.02} + \frac{3}{1.03}) \times R(35) - \frac{1.04}{16} \times (\frac{1}{1.01} + \frac{2}{1.02} + \frac{3}{1.03})$$

über. Da nun

$$\frac{1}{4} \times (1 + \frac{3}{4 \times 1.01} + \frac{2}{4 \times 1.02} + \frac{1}{4 \times 1.03}) + \frac{1.04}{16} \times (\frac{1}{1.04} + \frac{2}{1.02} + \frac{3}{1.03})$$

$$= \frac{1}{4} \times \left\{1 + (\frac{3}{4 \times 1.01} + \frac{1.04}{4 \times 1.01}) + (\frac{2}{4 \times 1.02} + \frac{2 \times 1.04}{4 \times 1.04}) + (\frac{1}{4 \times 1.03} + \frac{3 \times 1.01}{4 \times 1.03})\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1,$$

so ist ganz kurz

$$R^{\frac{4}{4}}(35) = R(35) - \frac{1.04}{16} \times (\frac{1}{1.01} + \frac{2}{1.02} + \frac{3}{1.03})$$

und ähnlich bei Unterlegung von 3% und 3½% Zinsen, weil man leicht sieht, daß die vorgenommenen Reduktionen vom Zinsfuße unabhängig sind.

Es ist aber

$$\frac{1.03}{16} \times (\frac{1}{1.0075} + \frac{2}{1.015} + \frac{3}{1.0225}) = 0.3798$$

$$\frac{1.035}{16} \times (\frac{1}{1.00875} + \frac{2}{1.0175} + \frac{3}{1.02625}) = 0.3804$$

$$\frac{1.04}{16} \times (\frac{1}{1.01} + \frac{2}{1.02} + \frac{3}{1.03}) = 0.3811$$

und da die nachzuzahlenden Lebens- und Verbindungsrenten sich von den vorauszuzahlenden nur um den Betrag der ersten Zahlung unterscheiden, also resp. noch um 1, 0.5 und 0.25 kleiner sind, so ergeben sich:

Genaue Correktionen, welche bei den baaren Werthen der jährlich voraus zahlbaren Renten in Abzug zu bringen sind.

	3%	3½%	4%
bei jährlicher Vorauszahlung:	0.0000	0.0000	0.0000
" " Nachzahlung:	0.5000	0.5000	0.5000
" halbjährlicher Vorauszahlung:	0.2537	0.2543	0.2549
" " Nachzahlung:	0.7537	0.7543	0.7549
" vierteljährlicher Vorauszahlung:	0.3798	0.3804	0.3811
" " Nachzahlung:	0.6298	0.6304	0.6311.

Wird die Verbindungsrente halbjährlich vorausbezahlt, so ist wiederum der baare Werth sämmtlicher Zahlungen am Anfange des Jahres $\frac{1}{2} \times R(35,30)$, wenn es sich um ein Paar von resp. fünfunddreißig und dreißig Jahren handelt. Nun sind in der Mitte der Jahre bezüglich noch

$$\frac{409+402}{2} \times \frac{439+433}{2},\ \frac{402+395}{2} \times \frac{433+427}{2},\ \frac{395+388}{2} \times \frac{427+421}{2},\ \ldots$$

Verbindungen vorhanden und da auf jede der Betrag $\frac{1}{2}$ kommt, so ist der baare Werth sämmtlicher Zahlungen

$$\frac{1}{8 \times 1.02} \times \Big\{(409+402) \times (439+433) + \frac{(402+395) \times (433+427)}{1.04} + \frac{(395+388) \times (427+421)}{(1.04)^2} + \cdots\Big\} : (409 \times 433).$$

Führt man die Multiplicationen aus, so ergiebt sich

$$\frac{1}{8 \times 1.02} \times \Big\{409 \times 439 + \frac{402 \times 433}{1.04} + \frac{395 \times 427}{(1.04)^2} + \cdots\Big\} : (409 \times 433)$$
$$+ \frac{1}{8 \times 1.02} \times \Big\{402 \times 433 + \frac{395 \times 427}{1.04} + \frac{388 \times 421}{(1.04)^2} + \cdots\Big\} : (409 \times 433)$$
$$+ \frac{1}{8 \times 1.02} \times \Big\{402 \times 439 + \frac{395 \times 433}{1.04} + \frac{388 \times 427}{(1.04)^2} + \cdots\Big\} : (409 \times 433)$$
$$+ \frac{1}{8 \times 1.02} \times \Big\{409 \times 433 + \frac{402 \times 427}{1.04} + \frac{395 \times 421}{(1.04)^2} + \cdots\Big\} : (409 \times 433)$$

Da nun dieses dieselben Reihen sind, die Seite 194 bei der Berechnung von TT(35,30) auftraten, so erhält man, wenn dazu noch der baare Werth sämmtlicher Zahlungen am Anfange der Jahre mit $\frac{1}{2} \times R(35,30)$ addirt wird:

$$\overset{2}{R^2}(35,30) = \frac{1}{2} \times R(35,30) + \frac{1}{8 \times 1.02}$$
$$\times \Big\{R(35,30) + \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31) + \frac{402}{409} \times R(36,30) + \frac{433}{439} R(35,31)\Big\}$$

Um diese Formel abzukürzen, bemerke man zuvörderst, daß nach Seite 193

$$\frac{402}{409} \times R(36,30) = T\binom{35}{30} + \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,30)$$
$$\frac{433}{439} \times R(35,30) = T\binom{30}{35} + \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31)$$

ist, wodurch sich

$$\overset{2}{R^2}(35,30) = \frac{1}{2} \times R(35,30)$$
$$+ \frac{1}{8 \times 1.02} \times \Big\{R(35,30) + 3 \times \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31) + T\binom{35}{30} + T\binom{30}{35}\Big\}$$

ergiebt. Es ist ferner nach Seite 195

$$T\binom{35}{30} + T\binom{30}{35} = R(35,30) - \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31) - TT(35,30)$$

also

$$\overset{2}{R^2}(35,30) = \frac{1}{2} \times R(35,30)$$
$$+ \frac{1}{8 \times 1.02} \times \Big\{2 \times R(35,30) + 2 \times \frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31) - TT(35,30)\Big\}$$

Eben so ist nach Seite 185

$$\frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31)$$

$$= \left\{402 \times 433 + \frac{395 \times 427}{1.04} + \frac{388 \times 421}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (409 \times 439)$$

$$= 1.04 \times \left\{\frac{402 \times 433}{1.04} + \frac{395 \times 427}{(1.04)^2} + \frac{388 \times 421}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (409 \times 439)$$

demnach, wenn man 1.04 addirt und subtrahirt

$$\frac{402 \times 433}{409 \times 439} \times R(36,31) =$$

$$1.04 \times \left\{409 \times 439 + \frac{402 \times 433}{1.04} + \frac{395 \times 427}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (409 \times 439) - 1.04.$$

$$= 1.04 \times R(35,30) - 1.04$$

folglich

$$\overset{2}{R}{}^{2}(35,30) = \tfrac{1}{2} \times R(35,30)$$

$$+ \frac{1}{8 \times 1.02} \times \left\{2 \times R(35,30) + 2 \times 1.04 \times R(35,30) - 2 \times 1.04 - 2 \times TT(35,30)\right\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{4 \times 1.02}\right) \times R(35,30) - \frac{TT(35,30)}{4 \times 1.02} - \frac{1.04}{4 \times 1.02}$$

und endlich, da $\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \times 1.02} + \frac{1.04}{4 \times 1.02} = 1$ ist:

$$\overset{2}{R}{}^{2}(35,30) = R(35,30) - \frac{TT(35,30)}{4 \times 1.02} - \frac{1.04}{4 \times 1.02}.$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß sich $\overset{2}{R}{}^{2}(35,30)$ eben so aus R(35,30) berechnen läßt, wie nach Seite 200 $\overset{2}{R}{}^{2}(35)$ aus R(30), wenn nicht überdies noch der Werth $\frac{TT(35,30)}{4 \times 1.02} = \frac{0.0077}{4 \times 1.02} = 0.0019$ in Abzug zu bringen wäre. Da indeß diese Quantität, welche von dem ungleichmäßigen Absterben verbundener Paare (Seite 69) herrührt, sehr klein ist und überall sehr klein ausfällt, es sei denn, daß beide verbundene Personen nahe gleichen sehr hohen Alters sind, so vernachlässigt man dieselbe und schreibt statt $\frac{1.04}{4 \times 1.02}$ kürzer $\frac{1}{4}$, so daß die vierteljährliche Correktur $\frac{3}{8}$ wäre. Hiernach erhält man den für die Praxis hinreichend genauen Satz: Soll aus den baaren Werthen der Lebensrenten oder der Verbindungsrenten bei **jährlicher Voraus**bezahlung der entsprechende baare Werth bei halbjährlicher oder vierteljährlicher **Voraus**bezahlung gefunden werden, so subtrahire man resp. $\frac{1}{4} = 0.2500$ oder $\frac{3}{8} = 0.3750$; soll dagegen der entsprechende Werth bei jährlicher, halbjährlicher oder vierteljährlicher **Nach**bezahlung gefunden werden, so subtrahire man resp. 1.000, $\frac{3}{4} = 0.7500$ oder $\frac{5}{8} = 0.6250$.

Da die Correkturen für die terminlichen Zahlungen beim baaren Werthe der Leibrente und der Verbindungsrente dieselben sind, so folgt hieraus wiederum, daß den Ueberlebensrenten für die terminlichen Zahlungen keine solche Correktur hinzuzufügen ist, ganz so, wie es Seite 169 für die mittlere Ueberlebensdauer der Fall war, daß es demnach auch bei solchen Ueberlebensrenten von untergeordneter Bedeutung ist, ob dieselben voraus- oder nachbezahlt werden.

Soll der baare Werth einer aufgeschobenen Lebensrente oder Verbindungsrente gefunden werden, so geschieht dies eben so wie Seite 177, nur daß man dort für die betreffenden Werthe bei jährlichen Zahlungen die für die terminlichen Zahlungen einsetzt. Wenden wir hier bei den Leibrenten, einer folgenden Bemerkung wegen, die genauen Correkturen an, so ist z. B. für 4% nach Seite 178

$$ {}^{10}\mathrm{R}^{\frac{4}{4}}(35) = \tfrac{339}{409} \times 0.675564 \times (13.0109 - 0.3811) = 7.0720. $$

Die aufhörende Lebens- oder Verbindungsrente in terminlichen Zahlungen wird sich demnach ergeben, wenn man von der vollen terminlichen Rente das aufgeschobene Stück subtrahirt, so daß

$$ \underset{10}{\mathrm{R}}^{\frac{4}{4}}(35) = 15.1175 - 0.3811 - 7.0720 = 7.6644 $$

ist. Man könnte vielleicht glauben, in diesem Falle kürzer zum Ziele zu gelangen, wenn man zunächst die aufhörende Rente bei jährlicher Zahlung sucht, und dann die betreffende Correktur anbringt und also im vorliegenden Falle (vergl. Seite 177)

$$ \underset{10}{\mathrm{R}}^{\frac{4}{4}}(35) = 15.1175 - 7.2853 - 0.3811 = 7.4511 $$

rechnet. Es findet sich aber, daß man gegen den obigen Werth 0.2133 weniger erhält. Der Grund dieser Erscheinung, den man kennen muß, um über die Richtigkeit des einen oder des andern Resultats entscheiden zu können, beruht in Folgendem. Die Seite 202 mitgetheilten genauen Correkturen sowohl, wie die im vorhergehenden Satze angegebenen Näherungs-Correkturen beruhen wesentlich auf dem Umstande, daß die Rente bis zum Aussterben des letzten Mitgliedes, d. h. unter der Bedingung gezahlt werde, daß am Anfange des letzten Jahres der Zahlung auf alle noch vorhandene Lebende, im zweiten Quartale auf drei Viertheile, im dritten auf die Hälfte und endlich im vierten Quartale auf ein Viertheil der anfänglich Lebenden Zahlung geleistet werde, so daß z. B. der baare Werth 7.4511 der richtige sein würde, wenn im Laufe des zehnten Jahres resp.

346, 259.50, 173, 86.50

solcher Vierteljahlungen fällig würden. Dieses ist aber bei den aufhörenden terminlichen Lebensrenten in der That nicht der Fall, denn da von 346 vierundvierzigjährigen Personen im Laufe des Jahres nur 7, also quartaliter 1.75 sterben, so sind resp.

346, 344.25, 342.50, 340.75 solcher Zahlungen,

demnach resp.

0, 84.75, 169.50, 154.25 mehr zu leisten,

welche den baaren Werth der aufhörenden terminlichen Lebensrente höher aus-

fallen lassen. In der That ist, wenn man die Viertheile dieser Werthe zunächst auf den Anfang des zehnten Jahres abzinst

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{84.75}{1.01} + \frac{169.50}{1.02} + \frac{254.25}{1.03}\right) = 124.233$$

und nun diesen letzten Werth auf den Anfang des Geschäfts, also neun Jahr zurückzinst und unter die ursprünglichen 409 Mitglieder vertheilt,

$$\frac{124.233 \times 0.702587}{409} = 0.2134,$$

welches gerade die obige Differenz ist und abermals den Beweis liefert, wie genau sich die Rechnung allen Wendungen der zu Grunde gelegten Mortalitäts-Tabelle anschließt.

Es giebt in der Praxis noch anderweitige Bestimmungen, die auf den baaren Werth der Lebens- und Ueberlebensrenten einwirken: die Probezeit, die Carenzzeit, das Eintrittsgeld und die Rückgewähr.

Die Probezeit ist der Zeitraum unmittelbar nach geschehener Versicherung, während dessen der Versicherer entweder noch keinen, oder doch nicht den vollen Anspruch auf die versicherte Summe hat, selbst alsdann nicht, wenn der Unglücksfall, gegen den versichert wurde, eingetreten sein sollte. Allerdings wird hierdurch der Zweck der gemachten Versicherung einigermaßen in's Ungewisse versetzt und pflegt deshalb bei größeren Geschäften, wie solche z. B. die Lebensversicherungs-Anstalten abzuschließen pflegen, von einer Probezeit abgestanden zu werden. Allein diese Kassen fordern auch einen so genauen und mehrfältig beglaubigten Nachweis über die Lebensfähigkeit der zu versichernden Personen, wie er für kleinere Kassen fast gar nicht zu beschaffen ist; weswegen hier eine solche Probezeit am Platze sein möchte, um wenigstens einigermaßen gegen grobe Uebervortheilung gesichert zu werden.

Bei den Lebens- und Verbindungsrenten kann von einer Probezeit aus theoretischen und praktischen Gründen nicht die Rede sein; praktisch nicht, weil die Zahlung dieser Renten ihrer Natur nach von dem Eintritte eines Unglücksfalls unabhängig ist und theorethisch nicht, weil jede Verzögerung in der Zahlung die Renten zu aufgeschobenen macht. Es bleiben somit nur die Sterbethaler, Wittwenthaler und Ueberlebensrenten übrig.

Was die Probezeit bei den Sterbekassen betrifft, so ist dieselbe bei den verschiedenen Kassen der Zeitdauer und der Qualität nach sehr verschieden. Entweder es ist nur ein Zeitraum nach der gemachten Versicherung festgesetzt,

während dessen auf den inzwischen eingetretenen Todesfall gar nichts, hinterher aber sogleich das volle Sterbegeld gezahlt wird, oder es wird sofort bis zum Ablauf der Probezeit ein bestimmter Theil des Sterbegeldes gezahlt, oder endlich wird der Anspruch an das Sterbegeld von Periode zu Periode erhöht, so daß das volle Sterbegeld erst nach dem Ablauf der letzten dieser Perioden erwächst. Sterbekassen pflegen diese Probezeit selten über ein Jahr auszudehnen, während, wie sich sogleich zeigen wird, Probezeiten von wenigen Wochen einen so geringen Einfluß auf das Sterbegeld ausüben, daß derselbe außer Acht gelassen werden kann. Aus diesem Grunde sollen hier nur die Probezeiten von Vierteljahr zu Vierteljahr besprochen werden, aus welchen sich die Correkturen von Wochen zu Wochen, falls man dieselben aus diesem oder jenem Grunde dennoch berücksichtigen wollte, vonselbst ergeben werden. Handelt es sich z. B. um fünfunddreißigjährige Personen, so sterben von 409 jährlich 7, also nach dem Gesetze des gleichmäßigen Aussterbens vierterjährlich $\frac{7}{4}$, welche insgesammt in die Mitte des Sterbequartals, also resp. $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{8}$ Jahr nach dem Anfange des Sterbejahres verlegt werden können. Der repartirte Betrag des Sterbegeldes für diese Todesfälle ist nun aber $\frac{7}{4 \times 409}$, oder nach Seite 16 Tab. 3, Col. a: $\frac{0.0171}{4}$ vierteljährlich, also der baare Werth z. B. bei $3\frac{1}{2}$% resp.

$$\frac{0.0171}{4 \times 1.004375}, \frac{0.0171}{4 \times 1.00875}, \frac{0.0171}{4 \times 1.021875}, \frac{0.0171}{4 \times 1.030625}.$$

Man rechnet indeß bei solchen Abzinsungen, namentlich im vorliegenden Falle, vortheilhafter, wenn man sagt: geben 100 für das Achteljahr $\frac{3.5}{8}$, so geben 8000 gerade 35, und also den Zinsfuß zu $\frac{8035}{8000}$ annimmt (Seite 165), welcher dem Abzinsungsfaktor $\frac{8000}{8035}$ entspricht. Hiernach sind die obigen baaren Werthe identisch mit

$$\frac{2 \times 17.1}{8035}, \frac{2 \times 17.1}{8105}, \frac{2 \times 17.1}{8175}, \frac{2 \times 17.1}{8245},$$

während sie bei 3%

$$\frac{2 \times 1.71}{803}, \frac{2 \times 1.71}{809}, \frac{2 \times 1.71}{815}, \frac{2 \times 1.71}{821}$$

und bei 4%

$$\frac{2 \times 1.71}{804}, \frac{2 \times 1.71}{812}, \frac{2 \times 1.71}{820}, \frac{2 \times 1.71}{828}$$

wären, so daß man nur die Tab. 3 verzeichneten Quotienten zu verdoppeln und durch den betreffenden Divisor zu dividiren hat. Zwischen dem einundzwanzigsten und sechzigsten Lebensjahre, außerhalb welcher Periode wohl nur selten Einkäufe in eine Sterbekasse gesucht oder bewilligt werden, ist nach Tab. 3 der größte Quotient 0.0429; theilt man dessen Zweifaches durch den kleinsten Divisor, so ergiebt sich $\frac{8.58}{803} = 0.0107$, während die Theilung durch den größten Divisor $\frac{8.58}{828} = 0.0104$ giebt, so daß der größtmöglichste Unterschied zwischen den Abzügen, welche man von den baaren Werthen der Sterbethaler zu machen hat, nur sehr klein ist und die wegen der Probezeit zu machenden Correkturen

von dem Zinsfuße und dem betreffenden Vierteljahre (innerhalb des ersten Jahres nach geschehener Versicherung) als unabhängig angesehen werden können. Hiernach ergeben sich

Abzüge von den baaren Werthen der Sterbethaler für jede vierteljährliche Probezeit zum Betrage 1.

Lebensalter:							
21	0.0025	31	0.0034	41	0.0047	51	0.0077
22	026	32	035	42	048	52	079
23	026	33	035	43	049	53	082
24	026	34	036	44	050	54	085
25	026	35	043	45	051	55	088
26	027	36	043	46	060	56	091
27	027	37	044	47	061	57	094
28	033	38	045	48	063	58	098
29	033	39	046	49	065	59	102
30	0.0034	40	0.0046	50	0.0075	60	0.0106

Soll z. B. im ersten halben Jahre nach dem Eintritt in die Sterbekasse kein Sterbegeld, im zweiten die Hälfte und nach Verlauf eines Jahres das volle Sterbegeld gezahlt werden, so erspart die Kasse während der angegebenen Perioden resp. das doppelte und das einfache Sterbegeld und der baare Werth dieser Ersparnisse ist z. B. bei fünfunddreißigjährigen Personen $3 \times 0.0043 = 0.0129$; sollte dagegen im ersten Vierteljahre Nichts, im zweiten der vierte Theil, im dritten die Hälfte und im vierten drei Viertheile und endlich nach einem Jahre das volle Sterbegeld gezahlt werden, so erspart die Kasse resp. $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{4}$, zusammen $\frac{10}{4}$, und der baare Werth wäre für das vorliegende Lebensalter $\frac{10}{4} \times 0.0043 = 0.0107$.

Wird indeß die Probezeit über das erste Jahr der Mitgliedschaft ausgedehnt, so ist der Zinsfuß für das zweite und die etwa folgenden Jahre in Anwendung zu bringen. Sollte z. B. im ersten halben Jahre Nichts, im zweiten ein Viertel, im dritten die Hälfte, im vierten halben Jahre drei Viertel des Sterbegeldes und nach Ablauf von zwei Jahren das volle Sterbegeld gegeben werden, so ersparte die Kasse im ersten halben Jahre 2, im zweiten $\frac{6}{4}$, zusammen $\frac{7}{2}$, im dritten $\frac{4}{4}$ und im vierten halben Jahre $\frac{2}{4}$, zusammen $\frac{3}{2}$, so daß der baare Werth für neunundfunfzigjährige Personen

$$\text{bei } 3\% \ldots \tfrac{7}{2} \times 0.0102 + \frac{\tfrac{3}{2} \times 0.0106}{1.03} = 0.02557$$

$$\text{bei } 3\tfrac{1}{2}\% \ldots \tfrac{7}{2} \times 0.0102 + \frac{\tfrac{3}{2} \times 0.0106}{1.035} = 0.02553$$

$$\text{bei } 4\% \ldots \tfrac{7}{2} \times 0.0102 + \frac{\tfrac{3}{2} \times 0.0106}{1.04} = 0.02549$$

so daß auch hier die Einwirkung des Zinsfußes nur noch sehr gering ist.

Beim Wittwenthaler, so wie bei den Ueberlebensrenten pflegt es sich um bedeutendere Summen als beim Sterbegelde zu handeln, weswegen sich auch hier die Probezeit auf längere Fristen, zwischen ein und fünf Jahr, auch wohl noch weiter hinaus zu belaufen pflegt. Nun ist z. B.:

$$T\binom{30}{35} = \left\{433 \times 7 + \frac{427 \times 7}{1.04} + \frac{421 \times 7}{(1.04)^2} + \cdots\right\} : (439 \times 409),$$

so daß für den Betrag 1 der baare Werth der Ersparniß

$$\text{im ersten Jahre: } \frac{433 \times 7}{439 \times 409} = \frac{433}{439} \times 0.0171 = 0.0169$$

$$\text{„ zweiten „ } \frac{\frac{427 \times 7}{439 \times 409}}{1.04} = \frac{427}{439} \times \frac{0.0171}{1.04} = 0.0160$$

$$\text{„ dritten „ } \frac{\frac{421 \times 7}{439 \times 409}}{(1.04)^2} = \frac{421}{439} \times \frac{0.0171}{(1.04)^2} = 0.0152$$

$$\text{„ vierten „ } \frac{\frac{415 \times 7}{439 \times 409}}{(1.04)^3} = \frac{415}{439} \times \frac{0.0171}{(1.04)^3} = 0.0144$$

$$\text{„ fünften „ } \frac{\frac{409 \times 7}{439 \times 409}}{(1.04)^4} = \frac{409}{439} \times \frac{0.0171}{(1.04)^4} = 0.0137$$

Sollte demnach beim Absterben der Männer im ersten Jahre nach der Versicherung Nichts, mit jedem folgenden Jahre dagegen ein Fünftheil des Betrages mehr und nach begonnenem sechsten Jahre der Mitgliedschaft der volle versicherte Betrag gezahlt werden, so wäre der baare Werth der Ersparnisse

$$\tfrac{1}{5}\left\{5 \times 0.0169 + 4 \times 0.0160 + 3 \times 0.0152 + 2 \times 0.0144 + 0.0137\right\} = 0.0473$$

und ähnlich in allen andern Fällen.

Bei den Ueberlebensrenten ist z. B.:

$$R\binom{30}{35} = \left\{\frac{433 \times 7}{1.04} + \frac{427 \times 14}{(1.04)^2} + \frac{421 \times 21}{(1.04)^3} + \frac{415 \times 28}{(1.04)^4} + \cdots\right\} : (439 \times 409)$$

Setzt man hier für die gestorbenen Männer die bezüglichen Summen der sterbenden Männer, so erhält man

$$R\binom{30}{35} = \left\{\frac{433 \times 7}{1.04} + \frac{427 \times (7+7)}{(1.04)^2} + \frac{421 \times (7+7+7)}{(1.04)^3} + \frac{415 \times (7+7+7+7)}{(1.04)^4} + \cdots\right\} : (439 \times 409)$$

und wenn man die Multiplikationen ausführt, sehr bald

$$\begin{aligned} 1.04 \times R\left({30 \atop 35}\right) = \frac{433 \times 7}{439 \times 409} = & \left\{433 + \frac{427}{1.04} + \frac{421}{(1.04)^2} + \frac{415}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : 433 \\ + \frac{427 \times 7}{439 \times 409} + & \frac{\left\{\cdots\cdots 427 + \frac{421}{1.04} + \frac{415}{(1.04)^2} + \cdots\right\}}{1.04} : 427 \\ + \frac{421 \times 7}{439 \times 409} + & \frac{\left\{\cdots\cdots\cdots\cdots 421 + \frac{415}{1.04} + \cdots\right\}}{(1.04)^2} : 421 \\ + \frac{415 \times 7}{439 \times 409} + & \frac{\left\{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 415 + \cdots\right\}}{(1.04)^3} : 415 \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

d. h.

$$R\left({30 \atop 35}\right) = \frac{433 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{R(31)}{1.04} + \frac{427 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{R(32)}{(1.04)^2} + \frac{421 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{R(33)}{(1.04)^3}$$

Unter dieser Form entspricht der baare Werth der Ueberlebensrente ganz der Auffassung, wie solche Seite 82, Tab. 31 angewandt worden ist. Es geben nämlich 439 × 409 Verbindungen der vorliegenden Alter in den aufeinander folgenden Jahren resp. 433 × 7, 427 × 7, 421 × 7 u. s. w. Wittwen, deren lebenslänglicher Bedarf, von der Zeit der eingetretenen Wittwenschaft gerechnet

$$433 \times 7 \times R(41),\ 427 \times 7 \times R(32),\ 421 \times 7 \times R(33)\ \ldots$$

u. s. w. ist. Zinst man daher noch diese baaren Werthe auf den Anfang des ganzen Geschäfts zurück, addirt die Beträge und dividirt die Summe durch 439 × 409, so erhält man die vorstehenden Werthe. Sollen nun die Wittwen während einer gewissen Zeit nach gemachtem Einkauf gar nicht, oder doch nicht zum vollen Betrage verpflegt werden, so ist der baare Werth der Ersparniß für den Betrag 1

während des 1sten Jahres der Mitgliedschaft: $\frac{433 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{15.9055}{1.04} = 0.2582$

„ „ 2ten „ „ „ $\frac{427 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{15.7195}{(1.04)^2} = 0.2419$

„ „ 3ten „ „ „ $\frac{421 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{15.5265}{(1.04)^3} = 0.2265$

„ „ 4ten „ „ „ $\frac{415 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{15.3260}{(1.04)^4} = 0.2120$

„ „ 5ten „ „ „ $\frac{409 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{15.1175}{(1.04)^5} = 0.1972$

Soll demnach nur ein Probejahr ohne alle Pension stattfinden, so ist der baare Werth der Ersparniß 0.2582, bei zwei Probejahren mit resp. Nichts und der Hälfte $0.2582 + \frac{1}{2} \times 0.2419 = 0.3793$; bei drei Probejahren resp. mit Nichts, einem Drittheil und zwei Drittheilen $0.2582 + \frac{2}{3} \times 0.2419 + \frac{1}{3} \times 0.2265 = 0.4951$ und endlich bei fünf Probejahren mit resp. Nichts, einem zwei, drei und vier Fünftheilen

$$0.2582 + \frac{4}{5} \times 0.2419 + \frac{3}{5} + 0.2265 + \frac{2}{5} \times 0.2120 = \frac{1}{5} \times 0.1982$$
$$= 0.7120,$$

immer unter der Voraussetzung, daß der Mann fünfunddreißig und die Frau dreißig Jahr alt sei.

Unter Carenzzeit hat man den Zeitraum zu verstehen, der nach Eintritt des Unglücksfalls, welcher Gegenstand der Versicherung war, zufolge der Bestimmungen mancher Institute noch zu vergehen hat, bis die anspruchsberechtigte Person in den Genuß der versicherten Zahlungen gelangt. Diese Carenzzeit unterscheidet sich von der Probezeit darin, daß sie nicht unmittelbar nach gemachter Versicherung, sondern nur erst alsdann eintritt, wenn die Versicherung durch den eingetretenen Unglücksfall reif geworden ist; sie kann daher nicht bei Lebens- und Verbindungsrenten, sondern nur bei solchen Zahlungen vorkommen, welche von dem vorhergegangenen Tode einer oder mehrerer anderer Personen abhängen.

Beim einfachen Sterbethaler, wo der Theorie nach das Sterbegeld für jeden Todes- d. h. für jeden Versicherungsfall gezahlt werden soll, kann demnach die Carenzzeit nur in einem Hinausschieben der Zahlungen bestehen und läßt sich also der baare Werth des Sterbethalers, wie schon Seite 197 bemerkt, durch einfaches Abzinsen bestimmen. Wäre z. B. festgesetzt, daß die Erbschaftsmasse 1 drei Jahr nach dem Tode des Erblassers ausgezahlt werden solle, so wäre beim Zinsfuße von 4% ihr baarer Werth nach der Formel $\frac{T}{1.02 \times (1.04)^3}$ zu beurtheilen.

Für die Wittwenthaler und die Ueberlebensrenten können zwei verschiedene Fälle eintreten. Um diese indeß gehörig zu verstehen, hat man sich zuvor eine ganz klare Einsicht davon zu verschaffen, was hier unter Vorausbezahlung und Nachbezahlung verstanden werden soll, weil man sonst, wie es häufig geschieht, Gefahr läuft, die Carenzzeit mit der Nachbezahlung zu identificiren, und nach dem, was über jene Seite 204 gesagt worden, auch für diese keinen Abzug in Rechnung setzen zu wollen. Ist der Mann fünfunddreißig und die Frau dreißig Jahr alt, so kommen nach Seite 76 und 66 auf 409 × 439 ursprüngliche Ehepaare in den aufeinander folgenden Jahren 433 × 7, 427 × 7, 421 × 7, 415 × 7 neu entstandene Wittwen, die durch den Wittwenthaler abzufinden sind; dagegen 433 × 7, 427 × 14, 421 × 21, 415 × 28 überhaupt vorhandene Wittwen, welche im Wege einer jährlichen Pension zu befriedigen sein würden. Setzt man nun voraus, daß die Zahlungen am Anfange der betreffenden Jahre geschehen sollen, oder vielmehr, daß die zahlenden Kassen sich schon am Anfange der Jahre auf die im Laufe derselben nach der Wahrscheinlichkeit zur Abhebung gelangenden Gelder vorzubereiten haben, so sind die baaren Werthe jener Zahlungen resp.:

$$433 \times 7,\ \frac{427 \times 7}{1.04},\ \frac{421 \times 7}{(1.04)^2},\ \frac{415 \times 7}{(1.04)^3},\ \ldots$$

und $$433 \times 7,\ \frac{427 \times 14}{1.04},\ \frac{421 \times 21}{(1.04)^2},\ \frac{415 \times 28}{(1.04)^3},\ \ldots$$

Wäre dagegen ausbedungen, daß diese Zahlungen immer erst am Ende der betreffenden Jahre eintreten sollen, so sind ihre baaren Werthe nur resp.

$$\frac{433 \times 7}{1.04}, \frac{427 \times 7}{(1.04)^2}, \frac{421 \times 7}{(1.04)^3}, \frac{415 \times 7}{(1.04)^4}, \ldots$$

$$\text{und } \frac{433 \times 7}{1.04}, \frac{427 \times 14}{(1.04)^2}, \frac{421 \times 21}{(1.04)^3}, \frac{415 \times 28}{(1.04)^4}, \ldots$$

In beiden Fällen empfangen aber der Theorie nach, oder werden vielmehr auf alle neu entstandenen resp. vorhandenen Wittwen die bedungenen Zahlungen geleistet, mögen dieselben noch am Leben sein oder nicht. Soll demnach für diese Art Leistungen die Carenzzeit auf gleiche Weise verstanden werden, d. h. werden die Gelder auch eventualiter an Dritte gezahlt, so wird dieses, wie bei den einfachen Sterbethalern, durch einfache Abzinsung auszugleichen sein. Sichert z. B. ein fünfunddreißigjähriger Ehemann seiner dreißigjährigen Frau, auf den Fall, daß dieselbe ihn überlebt, das Vermögen 1 zu, das sie oder ihre Erben fünf Jahre nach seinem Tode ausgezahlt erhalten sollen, so ist der baare Werth dieser Zusicherung, bei 4% Zinsen, auf $\frac{T\binom{30}{35}}{1.02 \times (1.04)^5}$ zu veranschlagen. In der Regel pflegt man aber den Ausdruck „Carenzzeit" so zu gebrauchen, daß auch die spätere Zahlung nur erfolgen solle, wenn die ursprünglich zur Empfangnahme berechtigte Person noch lebt, und macht eben dieses bei Wittwenthalern und Wittwenrenten den Hauptunterschied zwischen Nachbezahlung und Carenzzeit aus. Dies wäre der Fall, wenn im obigen Beispiele der Frauen Erben ausgelassen und nur gesagt worden, die Frau solle das Vermögen herausgezahlt erhalten, falls sie fünf Jahre nach Mannes Tode noch lebt.

Es sind nun die baaren Werthe der Wittwenthaler und der Wittwenrente für das Paar (35,30) resp.

$$T\binom{30}{35} = \left\{433 \times 7 + \frac{427 \times 7}{1.04} + \frac{421 \times 7}{(1.04)^2} + \frac{415 \times 7}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (409 \times 439)$$

$$\text{und } R\binom{30}{35} = \left\{433 \times 7 + \frac{427 \times 14}{1.04} + \frac{421 \times 21}{(1.04)^2} + \frac{415 \times 28}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (409 \times 439)$$

Sollen demnach die Zahlungen für das erste Jahr wegfallen und je im zweiten an die alsdann noch vorhandenen Wittwen erfolgen,

so leben von 433, 427, 421, 415 . . . .
Wittwen resp. noch 427, 421, 415, 409 . . . .

und man erhält

$$\overset{1}{T}\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times \frac{\left\{427 \times 7 + \frac{421 \times 7}{1.04} + \frac{415 \times 7}{(1.04)^2} + \frac{409 \times 7}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (409 \times 433)}{1.04}$$

$$\text{u. } \overset{1}{R}\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times \frac{\left\{427 \times 7 + \frac{421 \times 14}{1.04} + \frac{415 \times 21}{(1.04)^2} + \frac{409 \times 28}{(1.04)^3} + \cdots\right\} : (409 \times 433)}{1.04}$$

oder

$$\overset{1}{T}\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times \frac{T\binom{31}{35}}{1.04}$$

$$\overset{1}{R}\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times \frac{R(31,35)}{1.04}$$

d. h. sollen die Wittwenthaler oder die Wittwenrente einer einjährigen Carenzzeit unterworfen sein, so findet man ihren baaren Werth, wenn man den baaren Werth resp. des Wittwenthalers oder der Wittwenrente für ein Paar, bei welchem der Mann in demselben Alter verblieben, die Frau aber um die Dauer der Carenzzeit älter geworden wäre, auf diese Zeit abzinst und das Resultat mit der Wahrscheinlichkeit, daß die Frau noch so lange als die Carenzzeit festgesetzt ist, leben werde, multiplicirt.

Nach dieser Regel ist nun auch

$$\overset{1}{T}\binom{31}{35} = \frac{427}{433} \times \frac{T\binom{32}{35}}{1.04}$$

$$\overset{1}{R}\binom{31}{35} = \frac{427}{433} \times \frac{R\binom{32}{35}}{1.04}$$

$$\overset{1}{T}\binom{32}{35} = \frac{421}{427} \times \frac{T\binom{33}{35}}{1.04}$$

$$\overset{1}{R}\binom{32}{35} = \frac{421}{427} \times \frac{R\binom{33}{35}}{1.04}$$

. . . .

so daß man

$$\overset{2}{T}\binom{30}{35} = \frac{427}{439} \times \frac{T\binom{32}{35}}{(1.04)^2}$$

$$\overset{2}{R}\binom{30}{35} = \frac{427}{439} \times \frac{R\binom{32}{35}}{(1.04)^2}$$

$$\overset{3}{T}\binom{30}{35} = \frac{415}{439} \times \frac{T\binom{33}{35}}{(1.04)^2}$$

$$\overset{3}{R}\binom{30}{35} = \frac{415}{439} \times \frac{R\binom{33}{35}}{(1.04)^2}$$

erhält und die so eben für die einjährige Carenzzeit gegebene Regel auf jede beliebige Dauer anwenden kann. So findet man z. B.:

$$\overset{5}{R}\binom{30}{35} = \frac{409}{439} \times \frac{R\binom{35}{35}}{(1.04)^5} = \frac{409}{439} \times 3.2599 \times 0.821927 = 2.4963$$

Wird ein Versicherungsgeschäft nach Beitragszahlungen abgeschlossen (Seite 151), so pflegen sich viele Kassen neben den Beiträgen von den neuen Mitgliedern noch ein für allemal ein Antrittsgeld zahlen zu lassen, welches, wenn es nicht als bloße Sportel angesehen werden soll, vermindernd auf den

baaren Werth der abgeschlossenen Versicherung, also auch auf die zu zahlenden Beiträge einwirken wird. Bei den Sterbekassen ist meistentheils das Antrittsgeld im Verhältniß zu dem versicherten Sterbegelde nur gering und ist dasselbe, da es ein unwiderrufliches Eigenthum der Kasse wird, von dem baaren Werthe der Versicherung in Abzug zu bringen und der so verminderte Werth bei der Berechnung des Gleichgewichts zwischen Einnahmen und Ausgaben anzuwenden. Ein gleiches Verfahren hat man überall da, wo das Antrittsgeld au fonds perdu hingegeben wird, zu beobachten. Bei den Wittwenkassen älterer Einrichtung pflegte man das Antrittsgeld höher, öfter über einen Jahresbetrag der versicherten Wittwenpension hinaus, zu bemessen und weil die Versicherer in der Regel wenig geneigt sind, eine bedeutendere, in einer einzigen Rate zu entrichtende Summe auf's Spiel zu setzen, so wurde die Rückzahlung des Antrittsgeldes unter diesen oder jenen Bedingungen gewährleistet. Die Königlich Preußische allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt zahlte das Antrittgeld, mit Ausnahme einzelner Straffälle, die nicht weiter der Berechnung unterworfen werden können, bei Trennung der Verbindung durch den Tod des Mannes oder der Frau unverkürzt zurück. In diesem Falle ist es am einfachsten, den jährlichen Beitrag nach dem unverkürzten baaren Werth der Versicherung zu berechnen und davon die Jahreszinsen des Antrittsgeldes in Abrechnung zu bringen. Da nun in der Regel der Beitrag zum voraus bezahlt wird, während die Zinsen am Ende eines jeden halben Jahres eingehen, so sind für eine genaue Rechnung diese letzteren auf ihren baaren Werth am Anfange eines jeden Jahres zurückzuführen. Bezeichnet man demnach das Antrittsgeld mit 1, so beträgt der baare Werth der Zinsen (Seite 164)

bei 3% . . . . $0.978048 \times 0.03 = 0.029341$
" 3½% . . . . $0.974492 \times 0.035 = 0.034107$
" 4% . . . . $0.970965 \times 0.04 = 0.038839$

Zur Vertheidigung eines solchen Verfahrens läßt sich wenig anführen. Die Statuten sprechen sich mitunter dahin aus, daß die Abforderung des Antrittsgeldes, mit dessen Verlust die säumigen Mitglieder bedroht werden, geschehe, einmal, um eine pünktlichere Zahlung der Beiträge zu erwirken und vor gänzlichem Verluste der Mitgliedschaft und aller erworbenen Ansprüche bei Unterlassung später fällig werdender Beitragszahlungen sicherer zu stellen, zum andern aber, den Mitgliedern durch die daraus hervorgehende Abforderung geringerer Beiträge zu Hülfe zu kommen. In wie fern das Letztere dadurch erreicht wird, lasse ich dahingestellt; in ersterer Beziehung greifen aber gewiß derartige Bestimmungen, nach den Begriffen jetziger Zeit, allzusehr in den Privatwillen der Versicherer ein. In Bezug auf das Kassengeschäft selbst läßt sich eine derartige Bestimmung gleichfalls nicht rechtfertigen, weil sich die Ver-

sicherungsanstalt überflüssiger Weise die Verwaltung fremder Gelder aufbürdet und dabei nicht viel besser daran ist, als wenn sie fremde Kapitalien aufnähme (Seite 147).

Noch andere Wittwenkassen zahlen das Antrittsgeld zurück, wenn die Frau vor dem Manne, oder auch wohl, wenn der Mann vor der Frau verstirbt, jedoch nicht im entgegengesetzten Verlaufe. Bei solcher Einrichtung hat man neben dem baaren Werthe der versicherten Wittwenpension noch den baaren Werth resp. des Wittwerthalers oder des Wittwenthalers zu bestimmen und nach beiden zusammen die Beiträge zu berechnen. Sollen außerdem noch die Hinterbleibenden, wenn Mann und Frau im Laufe eines und desselben Jahres versterben, irgend eine Abfindung, z. B. den einjährigen Betrag der versicherten Pension ausgezahlt erhalten, so ist der baare Werth TT danach zu ermitteln und gleichfalls zum baaren Werthe der übrigen Versprechungen hinzuzufügen, um bei Berechnung der Gegenleistungen mit veranschlagt zu werden.

Um so viele Mitglieder wie möglich zu erhalten, hat man in neuerer Zeit angefangen, im Falle die Versicherung durch den früher erfolgten Tod derjenigen Person, zu deren Gunsten das Geschäft abgeschlossen war, nicht zum Austrage gelangt, die eingezahlten Gelder zurückzugeben, eine Rückgewähr zu zahlen. Geschieht der Einkauf durch Kapitalseinzahlung, so ist dieses Kapital so hoch abzumessen, daß aus seinen Zinsen die Jahresbeiträge entrichtet werden können, und ist es alsdann gleichgültig, welche Art von Versicherungsgeschäft dabei zu Grunde liegt. Soll dagegen die Anspruchsberechtigung durch Beitragszahlung erworben werden, so kommt es nicht allein auf die Art und Weise des Geschäfts, sondern auch auf die Termine an, in welchen die Zahlung der Beiträge bedungen wird. Begnügen wir uns mit dem einfachsten Fall, daß ein Vater seinem Kinde für ein bestimmtes Alter, falls es dasselbe erlebt, die Auszahlung eines Kapitals durch jährliche Beiträge sichern wolle, unter der Bedingung, daß diese letzteren beim früheren Todesfalle des Kindes zurückgezahlt werden. Mag des besseren Verständnisses wegen das Kind drei Jahr alt sein und nach vollendetem funfzehnten Lebensjahre das Kapital ausgezahlt werden sollen. Da nun nach Süßmilch von 618 solcher Kinder nach zwölf Jahren noch 511 leben, so ist der baare Werth der gemachten Pensionsversicherung bei 4% Zinsen (Seite 176): $\frac{511}{618 \times (1.04)^{12}}$. Sollen nun die Beiträge gleichfalls, mit dem Betrage 1 jährlich vorausbezahlt, zurückgegeben werden, so hat die Kasse außer diesem Kapitale im Laufe der einzelnen Jahre noch resp. (vgl. Tab. I)

25, 28, 36, 44, 45, 48, 49, 40, 36, 40, 44 und 48

zurückzuzahlen, weil im ersten, zweiten, dritten, vierten Jahre u. s. w. resp. 25, 14, 12, 11 Kinder sterben, auf welche resp. ein, zwei, drei, vier Beiträge u. s. w.

zurückzurechnen sind. Der baare Werth dieser Zahlungen, auf das einzelne Kind repartirt, ist aber, abgesehen von dem Tage der Rückzahlung,

$$\left\{25 + \frac{2 \times 14}{1.04} + \frac{3 \times 12}{(1.04)^2} + \frac{4 \times 11}{(1.04)^3} + \cdots + \frac{12 \times 4}{(1.04)^{11}}\right\} : 618,$$

wo der letztere Ausdruck den baaren Werth des nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsenden und nach zwölf Jahren aufhörenden Sterbethalers eines dreijährigen Kindes $\underset{12}{T}(3)$ bezeichnet. Der baare Werth sämmtlicher von der Kasse zu leistenden Zahlungen ist demnach gleich dem oben berechneten Werthe, zusammengenommen mit dem Produkte aus diesem letztern baaren Werthe und dem noch unbekannten Beitrage, und ist dieser letztere so zu bestimmen, daß zwischen Einnahme und Ausgabe das Gleichgewicht hergestellt werde, wie solches späterhin gezeigt werden soll.

Geschieht die Beitragszahlung halbjährlich mit 1, so hat die Kasse in den auf einanderfolgenden Jahren zu erstatten für die ersten Semester resp.

$$\frac{25}{2}, \frac{3 \times 14}{2}, \frac{5 \times 12}{2}, \frac{7 \times 11}{2} \cdots \frac{23 \times 4}{2}$$

deren baarer Werth

$$\frac{1}{2} \times \left\{25 + \frac{3 \times 14}{1.04} + \frac{5 \times 12}{(1.04)^2} + \frac{7 \times 11}{(1.04)^3} \cdots \frac{23 \times 4}{(1.04)^{11}}\right\} : 618$$

ist. Nun ist aber

$$3 = 1 + 2 \times 1,\ 5 = 1 + 2 \times 2,\ 7 = 1 + 2 \times 3 \ldots 23 = 1 + 2 \times 11,$$

also kann man den so eben gefundenen baaren Werth auch ausdrücken durch

$$\frac{1}{2} \times \left\{25 + \frac{14}{1.04} + \frac{12}{(1.04)^2} + \frac{11}{(1.04)^3} + \cdots + \frac{4}{(1.04)^{11}}\right\} : 618$$

$$+ \left\{\quad + \frac{14}{1.04} + \frac{2 \times 12}{(1.04)^2} + \frac{3 \times 11}{(1.04)^3} + \cdots + \frac{11 \times 4}{(1.04)^{11}}\right\} : 618$$

d. h. nach den Bezeichnungen (Seite 179 und Seite 184) durch

$$\frac{1}{2} \times \underset{12}{T}(3) + \frac{593}{618} \times \frac{\underset{11}{T}(4)}{1.04}.$$

Für die zweiten Semester werden dagegen zurückgezahlt resp.

$$\frac{2 \times 25}{2}, \frac{4 \times 14}{2}, \frac{6 \times 12}{2}, \frac{8 \times 11}{2} \cdots\cdots\cdots \frac{24 \times 4}{2},$$

$$\text{oder } 25,\ 2 \times 14,\ 3 \times 12,\ 4 \times 11 \ldots\ldots\ldots 12 \times 4$$

$$\text{d. h. } 25,\ 14 + 14,\ 12 + 2 \times 12,\ 11 + 3 \times 11 \ldots 4 + 11 \times 4,$$

deren baarer Werth

$$\frac{1}{1.02} \times \underset{12}{T}(3) + \frac{1}{1.02} \times \frac{593}{618} \times \frac{\underset{11}{T}(4)}{1.04}$$

ist, so daß man den baaren Werth der Rückgewähr erhält, wenn man

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1.02}\right) \times \underset{12}{T}(3) + \frac{593}{618} \times \left(1 + \frac{1}{1.02}\right) \frac{\underset{11}{T}(4)}{1.04}$$

mit dem halbjährlichen Beitrage multiplicirt.

Sollen die Beiträge vierteljährlich geleistet werden, so sind zurückzuzahlen

für die ersten Quartale resp. $\frac{25}{4}, \frac{5 \times 14}{4}, \frac{5 \times 12}{4}, \frac{13 \times 11}{4}, \ldots \frac{45 \times 4}{4}$,

" " zweiten " " $\frac{2 \times 25}{4}, \frac{6 \times 14}{4}, \frac{10 \times 12}{4}, \frac{14 \times 11}{4}, \ldots \frac{46 \times 4}{4}$,

" " dritten " " $\frac{3 \times 25}{4}, \frac{7 \times 14}{4}, \frac{11 \times 12}{4}, \frac{15 \times 11}{4}, \ldots \frac{47 \times 4}{4}$,

" " vierten " " $\frac{4 \times 25}{4}, \frac{8 \times 14}{4}, \frac{12 \times 12}{4}, \frac{16 \times 11}{4}, \ldots \frac{48 \times 11}{4}$,

Beiträge. Nun ist aber

$$5 = 1 + 4 \times 1,\ 9 = 1 + 4 \times 2,\ 13 = 1 + 4 \times 3, \ldots 45 = 1 + 4 \times 11$$
$$6 = 2 + 4 \times 1,\ 10 = 2 + 4 \times 2,\ 14 = 2 + 4 \times 3, \ldots 46 = 2 + 4 \times 11$$
$$7 = 3 + 4 \times 1,\ 11 = 3 + 4 \times 2,\ 15 = 3 + 4 \times 3, \ldots 47 = 3 + 4 \times 11$$
$$8 = 4 + 4 \times 1,\ 12 = 4 + 4 \times 2,\ 16 = 4 + 4 \times 3, \ldots 48 = 4 + 4 \times 11,$$

folglich ist der baare Werth der Rückzahlungen

für das erste Quartal: $\frac{1}{4} \times T_{12}(3) + \frac{593}{618} \times \frac{T_{11}^{(4)}}{1.04}$

" " zweite " $\frac{2}{4 \times 1.01} \times T_{12}(3) + \frac{593}{618} \times \frac{T_{11}^{(4)}}{1.01 \times 1.04}$

" " dritte " $\frac{3}{4 \times 1.02} \times T_{12}(3) + \frac{593}{618} \times \frac{T_{11}^{(4)}}{1.02 \times 1.04}$

" " vierte " $\frac{4}{4 \times 1.03} \times T_{12}(3) + \frac{593}{618} \times \frac{T_{11}^{(4)}}{1.03 \times 1.04}$.

Demnach erhält man den baaren Werth sämmtlicher Rückzahlungen, wenn man

$$\frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{2}{1.01} + \frac{3}{1.02} + \frac{4}{1.03}\right) \times T_{12}(3) + \frac{593}{618}\left(1 + \frac{1}{1.01} + \frac{1}{1.02} + \frac{1}{1.03}\right) \times \frac{T_{11}^{(4)}}{1.04}$$

mit dem vierteljährlichen Beitrage multiplicirt.

Versichert ein Mann seiner Ehefrau eine Wittwenpension unter derselben Bedingung, daß die Beiträge, falls die Frau vor ihm verstirbt, zurückgezahlt werden, so kommt es nicht auf den Tod der Frau allein, sondern auch noch auf das Amlebensein des Mannes an. Die Formeln werden alsdann verwickelter und können um so eher übergangen werden, als dergleichen Versicherungen nicht vorzukommen pflegen, sich dieselben auch jeder aufmerksame Leser selbst aufzustellen vermag.

Außer den bereits besprochenen Bestimmungen giebt es noch einen Grund, der es erfordert, daß man, ohne eine eigentliche Gegenleistung dafür zu bieten, die baaren Werthe der gemachten Versicherungen höher, die baaren Werthe der künftigen Einzahlungen niedriger zu veranschlagen, also den Mitgliedern bei Versicherungsvereinen mehr abzufordern hat, als es nach der aus den zu Grunde gelegten Elementen (Seite 152) hervorgehenden strengen Berechnung nöthig wäre. So wie dies einerseits zu beklagen ist, so ist es dennoch andererseits unerläßlich, denn die Lebensfähigkeit des Geschäfts, die es möglich macht, allen Mitgliedern gleich gerecht zu werden, soll das erste Ziel eines Vereins sein und das Bestreben, den Hülfesuchenden den Beitritt so wohlfeil wie möglich zu machen, darf erst die zweite Stelle einnehmen. Deshalb sind die Versicherungsbedingungen so einzurichten, daß man wenigstens gegen die wahrscheinlichen Verluste, d. h. gegen diejenigen, welche eben so gut eintreten, wie nicht eintreten können, gedeckt sei, wenn es auch nie gelingen wird, alle irgend denkbaren Nachtheile zum voraus zu entfernen, ohne den Zweck der Versicherung ganz aufzuheben.

Die Höhe des jedesmaligen Zinsfußes liegt außerhalb der Gewalt der Versicherungsanstalten, sie hängt vielmehr von politischen Constellationen und den dadurch bedingten Handelsconjunkturen ab; auch läßt sich nicht einmal sagen, daß der Zufall dabei sein Spiel habe, da es keiner Versicherungsanstalt möglich ist, jedes Steigen des Zinsfußes zu benutzen, gegentheils aber auch wiederum keine Gesellschaft jedem Fallen desselben ausgesetzt werden kann, indem die Darlehnsgeschäfte solcher Vereine auf Contrakten zu beruhen pflegen, die weder von der einen noch von der andern Seite sofort aufgehoben werden können.

Die Bestimmung des normalen Zinsfußes, der bei Aufstellung oder Beurtheilung eines Tarifs zu Grunde zu legen, ist nur in ganz besondern Fällen Sache des Technikers und liegt im Allgemeinen dem Auftraggeber ob; aber aus dem kurz zuvor Gesagten geht hervor, daß, falls der Zinsfuß einmal festgestellt ist, der Einfluß, welchen das Schwanken desselben in der Wirklichkeit ausüben wird, nicht zum voraus nach den Regeln über die Einwirkungen des Zufalls, d. h. nicht nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung beurtheilt werden kann. Das Zweckmäßigste, was sich hierbei thun läßt, ist, die Einrichtung zu treffen, daß dem Betriebsfonds alljährlich die Zinsen für das vorhanden gewesene Kapital des vergangenen Jahres nach demselben Zinssatze zugeschrieben, das etwa daran Fehlende aus einem andern Fonds — dem Reservefonds, Verwaltungsfonds — entnommen, das Ueberschießende dahin abgeführt werde. Auf diese Art wird wenigstens dem Unternehmen nach der Seite hin, welche der Vorausberechnung nicht unterworfen werden kann, eine Sicherheit gegeben, die man selbst mit einigem Opfer nicht zu theuer erkauft.

Ferner ist das Sterben der Menschen im Großen und Ganzen zwar

nach einem bestimmten Naturgesetze geregelt (Seite 167), aber der Tod der Individuen und Gruppen von Individuen ist als dem Zufalle unterworfen anzusehen (Seite 150), um so mehr, aus je weniger Personen solche Gruppen zusammengesetzt sind. Hiernach kann es daher geschehen, daß sich für ein Versicherungsgeschäft, welches nur auf den streng berechneten Preisen basirt wäre, nach Beendigung desselben ein Gewinn oder auch ein Verlust herausstellte, so daß dabei ein Risiko vorhanden ist. Soll es auch bei solchen Geschäften, an und für sich, nicht auf Gewinn abgesehen sein, so ist hinwiederum nach der bloßen Idee des Geschäfts Niemand vorhanden, welcher den Ausfall zu decken verpflichtet wäre. Eine Versicherungsanstalt kann demnach nicht für vollkommen lebensfähig erklärt werden, wenn dieselbe bei ihren Berechnungen nicht auf den möglichen Verlust Rücksicht genommen.

Um zunächst diesen Zufall auf die möglich engsten Grenzen zu beschränken, soll man meines Erachtens unter den Mortalitäts-Tabellen eine solche auswählen, bei welcher man sich mit Sicherheit auf ihre Anwendbarkeit für den vorliegenden Geschäftskreis überhaupt, und auf die Genauigkeit der angestellten Beobachtungen verlassen, diese letztern in ihren ursprünglichen Aussagen einsehen und deren Bearbeitung billigend Schritt vor Schritt folgen kann, weil man sich nur auf diese Weise ein begründetes selbstständiges Urtheil über die Zuverlässigkeit der Tabelle zu bilden vermag. Als eine diesen Anforderungen entsprechende Mortalitäts-Tabelle ist die von Brune für Frauen, so weit es Deutschland betrifft, allgemein anerkannt, und wenn ich dessenungeachtet in dieser Schrift hauptsächlich der Süßmilch'schen folge, so geschieht es deshalb, weil diese die gekannteste und verbreitetste von allen ist, für mehrere Versicherungsbranchen bei Beurtheilung der Lebensfähigkett zweckmäßig angewandt werden kann und es endlich nicht meine Absicht ist, Normaltarife aufzustellen, vielmehr nur zu zeigen, auf welche Weise man etwa den Gegenstand anzugreifen habe.

Andrerseits darf man aber hinwiederum die Sache nicht zu weit treiben, und alle Vorausberechnungen nach Mortalitäts-Tabellen für trügerisch erklären wollen; denn einmal beruht der ungünstigere Ausgang nur auf Möglichkeit, keinesweges auf Gewißheit, zum andern hat schon Babbage vor längerer Zeit nachgewiesen, daß während der dreißig Jahre von 1780 bis 1810 in England und Wales die Schwankungen in der Sterblichkeit geringer waren, als die in den Preisen der nothwendigsten Lebensmittel und daraus den Schluß gezogen, daß bei einem im Versicherungsgeschäft angelegten Kapitale weniger riskirt werde, als bei einem Handel mit Lebensmitteln von gleichem Geschäftsumfange.

Für die Art und Weise, wie das Risiko bei Feststellung der Preise zu berücksichtigen sei, pflegt man die vorher angegebene allgemeine Regel, die Einnahmen der Kasse geringer, die Ausgaben dagegen höher zu veranschlagen, so

auszulegen, daß für die Einnahmen ein geringerer Zinsgewinn und eine Tabelle mit größerer Sterblichkeit, für die Ausgaben aber ein höherer Zinsfuß und eine Tabelle mit geringerer Sterblichkeit zu Grunde zu legen sei. Obgleich ich bei Ausarbeitungen von Tarifen zur Beruhigung der Auftragsgeber dasselbe Verfahren beobachte, so gestehe ich dennoch, mich im Principe damit nicht einverstanden erklären zu können, schon deswegen nicht, weil man dadurch keine klare Einsicht über das erhält, was man mehr fordert, und für lange Zeit hinaus keinen praktischen Aufschluß darüber erwarten kann, wie hoch der Zuschlag für das Risiko bei den verschiedenartigen Versicherungsbranchen unter verschiedener Betheiligung zu veranschlagen sein dürfte. Sind Zinsfuß und Mortalitäts-Tabelle einmal festgestellt, so soll man meiner Meinung nach beide allen Branchen des Geschäfts, ohne einen Unterschied zwischen den Einnahmen und Ausgaben zu machen, zu Grunde legen und das Risiko in bestimmten Procentsätzen den berechneten Werthen hinzufügen. Hierbei mag man alsdann auch auf die sonst noch für anwendbar gehaltenen und im Gebrauch befindlichen Tabellen Rücksicht nehmen. Verfährt man auf diese Weise, so hat man eine genaue Kenntniß von dem Aufschlage und wird aus der Vergleichung der verschiedenen Bilanzen, unter Berücksichtigung der jedesmal versichert gewesenen Beträge, viel eher beurtheilen lernen, welchen Einfluß die Schwankungen in der Sterblichkeit auf den Gang des Geschäfts ausüben. Diese Partie ist das allein Unsichere, was dem Versicherungswesen über Leben und Tod der Menschen noch anklebt und wird nur durch die Vereinigung vieler praktischen Kräfte mit der Theorie vollständig aufgeklärt werden können. Das, was ich gegenwärtig hierüber mittheile, sind nur die ersten Anfänge der Untersuchung, so weit sie zu einer vollständigen Beurtheilung der Lebensfähigkeit von Versicherungsvereinen unerläßlich sind. Ich halte mich aber für verpflichtet, den Praktiker darauf aufmerksam zu machen, daß der Gegenstand von andern Schriftstellern — Tetens und nach ihm Struve in den Erläuterungen zu Tetens — von einer etwas andern Seite aufgefaßt worden ist, und zu Resultaten geführt hat, von welchen die meinigen theilweise sehr verschieden sind. Bei der Wichtigkeit der Sache werde ich für die gleichartigen Beispiele die Auflösungen jener Männer mit angeben.

Das Hazard oder der Zufall, der es bewirkt, daß der Versicherer in vielen Fällen gewinnt, ist das Grundprincip des Versicherungsgeschäfts, und wollte man dasselbe ganz vermeiden, so müßte man zu den Sparkassen (Seite 147) zurückkehren. Dieses Hazard, wonach bei Versicherungen, je nach dem Gegenstande derselben, entweder die am längsten Lebenden oder die am frühsten Sterbenden gewinnen, hat innerhalb der Grenzen der zu Grunde gelegten Mortalitäts-Tabelle für den Verein gar keine Gefahr, denn er war nach seinen strengen Berechnungen darauf vorbereitet. Es ist dies gleichsam als ein Spiel anzusehen, das die Versicherer unter sich spielen und das den finanziellen Zu-

stand des ganzen Vereins unberührt läßt. Dieser risikirt nur, daß das Spiel über die von ihm gesteckten Grenzen hinausgehen könne. Hat der Verein nur nicht zu wenig Mitglieder, so ist nicht zu fürchten, daß er gegen jedes einzelne Mitglied im Nachtheile bleiben werde, vielmehr anzunehmen, daß auch hier die gewöhnlichen Gesetze des Zufalls eintreten, wonach unter gleichen Bedingungen zu beiden Seiten Gewinn und Verlust gleich sein werden; nur der Vorsorge wegen macht man sich auf einen ungünstigen Ausgang gefaßt. Hieraus folgt alsdann von selbst, daß der Verein sich nicht gegen den größtmöglichen, sondern nur gegen den durchschnittlichen oder mittlern Verlust zu decken habe.

Der baare Werth dieses mittlern Verlustes wird gefunden, wenn man diejenigen Fälle, in welchen der Verein innerhalb der natürlichen Grenzen der berechneten Beträge gar nichts verlieren kann, von den übrigen absondert und alsdann das Mittel vom baaren Werthe der zu erwartenden Ausgaben nimmt.

Aus dieser Erklärung folgt sogleich, daß für eine gemachte Versicherung bei jedem Preise, welcher nicht dem absoluten Werthe derselben selbst gleichkommt, ein Risiko vorhanden sei, das aber um so kleiner ausfällt, je höher jener Preis ist. Die einzige Schwierigkeit besteht darin, nach welchen Elementen man den baaren Werth des mittlern Verlustes zu berechnen habe. Die zu Grunde gelegte Mortalitäts-Tabelle sollte man einerseits nicht dazu benutzen, denn man befürchtet ja, dabei zu kurz zu kommen; andererseits hat man dieselbe dennoch als die zweckmäßigste für sein Geschäft erklärt und man weiß nicht einmal, ob sich wirklich ein Verlust herausstellen werde. Man verfährt deshalb hier eben so, wie man es in der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung so oft zu thun genöthigt ist; man nimmt das Wahrscheinlichste für das Richtige und bedient sich derselben Mortalitäts-Tabelle, welche man ein für allemal für die passendste erkannt hat.

Nach dieser Erläuterung gehe ich zur Lösung der einzelnen Aufgaben über.

1) Ein Versicherungsverein verkauft an eine zwanzigjährige Person eine lebenslängliche jährliche Pränumerando-Rente zum Betrage 1 für den Preis 17.79; man soll das Risiko dafür berechnen.

Legt man, wie hierbei ein für allemal angenommen werden wird, den Zinsfuß von 4% zu Grunde, so kann die Person (vgl. Tab. VI) neunundzwanzig Jahr leben, bevor dieselbe ihre Einzahlung aufgezehrt hat, indem sie bei jährlicher Pränumerandozahlung an Zeitrente nur 17.66 zurückerhält und noch der Ueberschuß 0.13 verbleibt. Während dieser Zeit hat demnach auch der Verein keinen Verlust zu befürchten. Der baare Werth der nach dieser Zeit beginnenden Lebensrente, also des Risiko's, ist aber (Seite 179) $\frac{543.03}{224.09} = 2.42$, oder 13.6% vom berechneten baaren Werthe 17.79.

Tetens hat im Ganzen dieselbe Difinition für das Risiko, berechnet dasselbe aber aus einer Verknüpfung des größten Gewinnes und des größten Verlustes als eine Art Mittelwerth und findet es für dreißigjährige Personen kleiner als 5.2 . . ., während es nach der hier angewandten Art zu rechnen 2.51 beträgt.

Sollte der Verein an eine dreißigjährige Person eine mit dem sechzigsten Lebensjahre beginnende Leibrente zum Preise 1.378 verkaufen, so fände er zur Zeit des Beginnes der Rente für jedes der 210 von den ursprünglich 439 noch lebenden Mitglieder $\frac{439}{210} \times 1.378 \times 3.24340 = 9.315$ vor, aus welchen denselben bis zum einundsiebenzigsten Lebensjahre die Rente ohne alle Gefahr gezahlt werden könnte. Das Risiko wäre also $\frac{36.724}{135.35} = 0.271$, oder 19.7% des Verkaufspreises.

2) Ein Verein kauft von einer zwanzigjährigen Person eine lebenslängliche, jährlich pränumerando zahlbare Rente zum Betrage 1 für 17.79; man soll das Risiko berechnen.

Da der baare Werth einer neunundzwanzigmal gezahlten Zeitrente gleicher Qualität 17.66 ist, so hat der Verein von Personen, die über diese Zeit hinaus leben, keinen Schaden zu erleiden. Nun leben von 491 zwanzigjährigen Personen nach neunundzwanzig Jahren noch 308, sind demnach während dieser Zeit gestorben 183, so daß der mittlere Verlust $\frac{183}{491} \times (17.79 - 2.42) = 5.73$, oder 32.2% ist.

3) Eine Versicherungsanstalt kauft von einer zwanzigjährigen Person den Sterbethaler 1 für den Preis 0.3284; man soll das Risiko berechnen.

Die Versicherungsanstalt erhält den Betrag 1 erst nach dem Tode des Verkäufers, oder vielmehr, der Idee nach, am Anfange des Sterbejahres (Seite 176); sie hat somit Nachtheil, wenn der Tod nach dem neunundzwanzigsten Geschäftsjahre eintritt (vgl. Tab. V), weil dieser Thaler alsdann nur 0.3207 oder 0.0077 weniger werth ist. Also ist der baare Werth des Risikos: $\frac{25.155}{224.09} = 0.1123$, oder 34.2% des Einkaufspreises.

4) Eine Versicherungsanstalt verkauft an eine zwanzigjährige Person den Sterbethaler 1 für den Preis 0.3284; man soll das Risiko finden.

Da die Versicherungsanstalt Schaden erleidet, wenn sie den Sterbethaler vor dem neunundzwanzigsten Jahre hingeben soll, und bis dahin 183 Personen verstorben sind, so ist das Risiko $\frac{183}{491} \times (0.3284 - 0.1123) = 0.0805$, oder 24.6% von 0.3284.

Die Risikos für die gekaufte Lebensrente und für den verkauften Sterbethaler sind größer als resp. die für die verkaufte Lebensrente und für den gekauften Sterbethaler, weil bei jenen die Gefahr am Anfange des Geschäfts,

wo das Geld noch einen größern Werth hat, eintritt, bei diesen dagegen erst am Ende des Geschäfts, zu welcher Zeit der baare Werth des Geldes bereits geringer geworden.

Der Umstand, daß der Werth für die Lebensrente einer zwanzigjährigen Person zu derselben Zeit aufgezehrt ist, in welcher der für den Sterbethaler zum vollen Betrage anwächst, ist kein zufälliger, sondern gilt allgemein für jedes Lebensalter und ist eine Folge der Verknüpfung, welche Seite 180 zwischen den baaren Werthen der Lebensrenten und der Sterbethaler nachgewiesen worden und giebt Veranlassung, auch den Zusammenhang zu untersuchen, welcher zwischen den verschiedenen Risikos stattfindet. Wie aus dem Obigen folgt, ist das Risiko für die verkaufte Lebensrente und den gekauften Sterbethaler resp. eine aufgeschobene Lebensrente und ein aufgeschobener Sterbethaler, dagegen das Risiko für die gekaufte Lebensrente und für den verkauften Sterbethaler eine unter die während der Zeit der Gefahr Sterbenden repartirte aufhörende Lebensrente oder ein solcher Sterbethaler. Bleibt man also bei zwanzigjährigen Personen stehen, so ist das Risiko

für die verkaufte Lebensrente: $vR(20) = \frac{308}{491 \times (1.04)^{29}} \times R(49)$

" " gekaufte " $gR(20) = \frac{183}{491}\left\{R(20) - vR(20)\right\}$

" den gekauften Sterbethaler: $gT(20) = \frac{308}{491 \times (1.04)^{29}} \times T(49)$

" " verkauften " $vT(20) = \frac{183}{491}\left\{T(20) - vT(20)\right\}$

Demnach sind die Procentsätze jener Werthe resp.

$$\%\, vR(20) = \frac{308 \times 100}{491 \times (1.04)^{29}} \times \frac{R(49)}{R(20)}$$

$$\%\, gR(20) = \frac{183}{491} \times \left\{100 - \%\, vR(20)\right\}$$

$$\%\, gT(20) = \frac{308 \times 100}{491 \times (1.04)^{29}} \times \frac{T(49)}{T(20)}$$

$$\%\, vT(20) = \frac{183}{491} \times \left\{100 - \%\, gT(20)\right\}$$

d. h. man erhält den Procentsatz des Risikos für die gekaufte Lebensrente, so wie den des Risikos für den verkauften Sterbethaler resp. aus den Procentsätzen des Risikos für die verkaufte Lebensrente und den gekauften Sterbethaler, wenn man diese von 100 subtrahirt und die Differenz mit der Wahrscheinlichkeit, während der Periode der Gefahr zu sterben, multiplicirt.

Erinnert man sich daran, daß $\frac{308}{491 \times (1.04)^{29}}$ der Quotient der abgezinsten Zahl der Lebenden resp. vom Alter zwanzig Jahr und neunundvierzig Jahr, so ist:

$$^{0}/_{0}\,vR(20) = \frac{450730}{22409} \times \frac{12048}{17791} = 20.11 \times 0.6773 = 13.6\,^{0}/_{0}$$

$$^{0}/_{0}\,gR(20) = \frac{183}{491} \times (100 - 13.6) = 32.2\,^{0}/_{0}$$

$$^{0}/_{0}\,gT(20) = 20.11 \times \frac{0.5581}{0.3284} = 34.2\,^{0}/_{0}$$

$$^{0}/_{0}\,vT(20) = \frac{183}{491} \times (100 - 34.2) = 24.6\,^{0}/_{0}$$

Setzt man endlich in den Werth von gT(20) den Seite 181 gegebenen Ausdruck, so ist

$$gT(20) = \frac{308 \times 1.04}{491 \times (1.04)^{29}} - 0.04\ vR(20),$$

also

$$gT(20) = 0.2011 \times 1.04 - 0.04 \times 2.42 = 0.1123,$$

nach welcher Formel man indeß kaum kürzer rechnet, wenn es nur darauf ankommt, den Prozentsatz des Risikos, nicht das Risiko selbst zu bestimmen. Man sieht hieraus zugleich, daß je geringer das Risiko beim Einkauf ist, es desto größer beim Verkauf sein werde, und umgekehrt, wie es mir in der Natur der Sache zu liegen scheint.

Nach vorstehenden Formeln ist die

Berechnung des Risikos für die baaren Werthe der Leibrenten und der Sterbethaler

Aufnahmealter.	Zahlen der Lebenden.	Baare Werthe der Leibrenten.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Dauer der Aufzehrung der Leibrente resp. des Anwachsens des Sterbethalers zum vollen Betrage.	Lebende nach der Dauer.	Sterbende während der Dauer.	Abgezinste Zahlen der Lebenden vom Aufnahmealter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden vom Alter nach der Dauer.	Quotienten der vorstehenden Zahlen.	Baare Werthe der Leibrenten vom Alter nach der Dauer.	Quotienten der Zahlen in Col. i und b.	Risikos bei den baaren Werthen der Lebensrenten in % verkauft.	Risikos bei den baaren Werthen der Lebensrenten in % gekauft.	Baare Werthe der Sterbethaler vom Alter nach der Dauer.	Quotienten der Zahlen in Col. n und c.	Risikos bei den baaren Werthen der Sterbethaler in % verkauft.	Risikos bei den baaren Werthen der Sterbethaler in % gekauft.
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r
20	491	17.790	0.3284	29	308	183	224.09	45.073	0.2011	12.048	0.6773	13.6	32.2	0.5581	1.700	34.2	24.6
25	466	16.927	0.3605	27	282	184	174.80	36.687	0.2099	11.349	0.6681	14.0	33.1	0.5860	1.626	34.1	26.0
30	439	16.085	0.3966	24	264	175	135.35	31.754	0.2346	10.881	0.6765	15.9	33.5	0.6047	1.525	35.8	25.6
35	409	15.117	0.4353	22	237	172	103.65	25.343	0.2445	10.138	0.6706	16.4	32.7	0.6345	1.458	35.7	27.1
40	374	14.156	0.4737	20	210	164	77.900	19.963	0.2563	9.3420	0.6599	16.9	36.3	0.6663	1.407	36.0	28.1
45	339	13.011	0.5196	17	192	147	58.036	16.875	0.2908	8.7800	0.6748	19.6	34.9	0.6888	1.326	38.5	26.7
50	300	11.796	0.5682	15	162	138	42.214	12.658	0.3335	8.0527	0.6827	22.8	41.7	0.7179	1.263	42.2	26.6

ausgeführt werden. Die Sprünge in derselben liegen theils in der Mortalitäts-Tabelle, zum größten Theile aber in dem Umstande, daß sich die baaren Werthe der Zeitrenten, so wie die Abzinsungsfaktoren nach vollen Jahren mehr oder weniger genau den baaren Werthen der Lebensrenten und resp. der Sterbethaler anschließen, was sich durch Interpolation, oder auch dadurch, daß man die verbleibenden Ueberschüsse in Abzug bringt, beseitigen ließe.

5) Eine Versicherungsanstalt verkauft an ein Paar, bei welchem der Mann dreißig und die Frau zwanzig Jahr alt ist, eine Verbindungsrente zum jährlichen Pränumerandobetrage 1 für den Preis 13.67; man soll das Risiko finden.

Der Betrag 13.67 wird in den ersten neunzehn Geschäftsjahren mit 13.66 aufgezehrt und hinterläßt den Ueberschuß 0.01. Da nun nach neunzehn Jahren von 439 Männern noch 308 und von 491 Frauen noch 381 leben, so beträgt das Risiko (vgl. Tab. VIII C)

$$\frac{308 \times 381}{439 \times 491 \times (1.04)^{20}} \times 9.649.$$

Befindet man sich im Besitze der Summen der abgezinsten Produkte aus den Zahlen der Lebenden, so kann man diese Werthe eben so leicht wie die aufgeschobenen Lebensrenten berechnen (Seite 177); indeß läßt sich der Ausdruck dadurch etwas vereinfachen, daß man statt der Lebenden einer und derselben Person die abgezinsten Zahlen der Lebenden setzt, weil auf diese Weise der Abzinsungsfaktor $\frac{1}{(1.04)^{20}}$ schon mit in Anschlag gebracht wird. Wählt man hierzu die jüngere Person, so erhält man $\frac{308 \times 82.533}{224 \times 224.09} \times 9.65 = 2.53$, oder 18.5% des strengen Werthes.

6) Eine Versicherungsanstalt kauft eine mit dem Betrage 1 jährlich pränumerando zahlbare Verbindungsrente von einem Paare, bei welchem der Mann dreißig und die Frau zwanzig Jahr alt ist, für den Preis 13.67; man soll das Risiko finden.

Nach neunzehn Jahren sind von den anfänglichen 439 × 491 Paaren bereits 439 × 491 — 308 × 381 = 98201 ausgeschieden, so daß das Risiko $\frac{98201}{439 \times 491} \times (13.67 - 2.53) = 5.07$, oder 37.1% des strengen Werthes beträgt.

Wäre der Mann fünfunddreißig, die Frau dreißig Jahr alt gewesen (Seite 97), so risikirte der Versicherungsverein für den Preis 12.33

beim Verkauf: $\frac{291 \times 54.652}{409 \times 135.35} \times 7.90 = 2.27$, oder 18.4%

beim Einkauf: $\frac{82939}{439 \times 409} \times (12.33 - 2.27) = 4.64$, oder 37.6%.

Da sich, wie schon mehrere Male bemerkt wurde, die baaren Werthe der Verbindungsrenten in nichts Wesentlichem von den Lebensrenten unterscheiden, so wird zwischen den Risikos der ersteren dasselbe Verhältniß stattfinden, wie zwischen den Risikos der letzteren, und man daher den Prozentsatz für die gekauften Verbindungsrenten eben so aus dem für die verkauften ableiten können, wie es bei den Lebensrenten der Fall war; aus dem Grunde sind jene für die genannten Paare resp.

$$\frac{98.201}{439 \times 491} \times (100 - 18.5) = 37.1\%$$

$$\frac{82939}{439 \times 409} \times (100 - 18.4) = 37.6\%.$$

Tetens unterscheidet nicht zwischen Kauf und Verkauf, sagt vielmehr ausdrücklich, daß der Gewinn des Einen der Verlust des Andern sein müsse.

So richtig dieser Satz an und für sich ist, so unrichtig ist seine Anwendung beim Versicherungsgeschäft, wo man, wie schon öfter nachgewiesen worden, es immer nur mit Durchschnitten zu thun hat, bei welchen man einen Mittelzustand aus allen Verläufen für alle Betheiligten voraussetzt. — Die Gleichartigkeit hört aber sofort auf, wenn man sich in der Wirklichkeit einer Reihe vereinzelter Fälle gegenüber denkt, weil da die Voraussetzung eines mittlern Zustandes für jeden einzelnen Fall offenbar nicht mehr stattfindet.

Man erhält in diesem Falle das Risiko, wenn man die Risikos jedes einzelnen Geschäfts mit sich selbst multiplicirt, die Produkte addirt und dann diejenige Zahl sucht, welche, mit sich selbst multiplicirt, der Summe jener Produkte gleich wird. Wären z. B. die Risikos bei fünf Geschäften resp. 1, 3, 4, 5 und 7, so hätte man

$$1 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 + 7 \times 7 = 1 + 9 + 16 + 25 + 49 = 100;$$

demnach wäre das Risiko 10, weil $10 \times 10 = 100$ ist.

Dies ist der einzige Satz in diesem Buche, dessen Beweis ich meinen Lesern schuldig bleibe, weil es mir nicht gelungen ist, ihn in den Kreis des arithmetischen Wissens zu bannen, welchen ich hier voraussetze und worüber ich mich in der Vorrede ausgesprochen habe. Zu Tetens Zeit war derjenige Zweig der Mathematik, um den es sich hier handelt, noch gänzlich unbekannt, und so ist denn auch die von diesem Schriftsteller gegebene Formel so unrichtig, daß sie nicht einmal der Bedingung Genüge leistet, das einfache Risiko wiederzugeben, wenn man die Anzahl der Geschäfte gleich 1 setzt.

7) Eine Versicherungsanstalt verkauft an einen Mann von dreißig Jahren für seine Ehefrau von zwanzig Jahren eine jährliche Wittwenpension zum Betrage 1 für den Preis 4.12; man soll das Risiko berechnen.

Die Versicherungsanstalt macht ein doppeltes Geschäft, indem sie der Frau eine Lebensrente für den Preis 17.79 verkauft und dabei 2.42 riskirt (1); außerdem aber kauft die Anstalt die Verbindungsrente für den Preis 13.67 zurück und riskirt abermals 5.07 (6); es ergiebt sich daher das Risiko, wenn man diejenige Zahl sucht, die mit sich selbst multiplicirt, $2.42 \times 2.42 + 5.07 \times 5.07 = 31.56$ giebt, und jene Zahl, oder wie man sie nennt, die Wurzel von 31.56, ist nahebei 5.62, indem $5.62 \times 5.62 = 31.69$ ist. — Wie man sieht, überragt hierbei das Risiko den Einkaufspreis und beträgt 136.2% desselben, weil letzterer aus einer Differenz zwischen Verkauf und Rückkauf hervorgegangen, während das Risiko ein zweifaches ist. Tetens findet dasselbe kleiner als 3.4 . . ., was aber offenbar unrichtig ist, da er bei der Leibrente allein 5.2 . . . angiebt.

Für das Ehepaar von resp. fünfunddreißig und dreißig Jahren wäre das Risiko beim Preise 3.76 zu 5.30, oder 140.9% zu veranschlagen.

8) **Eine Versicherungsanstalt schließt wiederholentlich ein und dasselbe Geschäft ab, dessen einfaches Risiko bekannt ist; man soll das Risiko für das Gesammtgeschäft, so wie den repartirten Betrag für jedes einzelne Geschäft finden.**

Des bessern Verständnisses wegen setze man das Risiko für das einzelne Geschäft zu 2.42 fest und die Anzahl der Geschäft zu 64. Um nun das Risiko zu finden, hat man 2.42 mit sich selbst zu multipliciren, macht 5.8564, dieses Produkt 64mal zu addiren, macht 64 × 5.8564 und endlich die Wurzel zu suchen, die mit sich selbst multiplicirt, das so eben genannte Produkt ergiebt. Diese Wurzel wird, wie fast von selbst einleuchtend, ein Produkt aus der Wurzel von 64, d. i. 8, und aus der Wurzel von 5.8564, d. i. 2.42 sein, also ist 8 × 2.42 das Risiko für das Gesammtgeschäft und $\frac{8 \times 2.42}{64} = \frac{2.42}{8}$ der auf jedes einzelne Geschäft repartirte Betrag.

Da man ein gleiches Resultat für alle andern Zahlen erhalten wird, so folgt daraus der für die Praxis wichtige Satz: **Schließt eine Versicherungsanstalt ein und dasselbe Geschäft zu wiederholten Malen ab, so wächst zwar das Gesammtrisiko mit der Wurzel aus der Anzahl der Geschäfte, wogegen das Risiko für das einzelne Geschäft sich nach demselben Verhältnisse verkleinert;** woraus alsdann weiter zu schließen, daß **theoretisch auch bei der größten Anzahl solcher Geschäfte immer noch,** wenn auch äußerst **geringes Risiko zurückbleibt.**

Macht demnach die Anstalt resp.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Geschäfte, so vergrößert sich das Gesammtrisiko

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10mal,

während sich das Risiko für das einzelne Geschäft eben so viele Male verkleinert. Für größere Zahlen ergiebt sich

Zahl der Geschäfte.	Verhältnißzahl für das Risiko.	Zahl der Geschäfte.	Verhältnißzahl für das Risiko.
200	14mal	1000	31 „
300	17 „	1500	39 „
400	20 „	2000	45 „
500	22 „	2500	50 „
600	24 „	4000	63 „
700	26 „	6000	78 „
800	28 „	8000	89 „
900	30 „	10000	100mal

Auch ist es bei ganz gleichen Geschäften einerlei, ob man den absoluten Werth des Risikos, oder den Prozentsatz desselben sucht. Denn ist der baare Werth der Versicherung z. B. 17.79, der des einfachen Risikos 2.42, so ist der Prozentsatz $\frac{2.42 \times 100}{17.79}$, das Risiko bei 200 Versicherungsfällen aber $\frac{2.42}{14}$, also der Prozentsatz $\frac{2.42 \times 100}{14 \times 17.79}$, was eben so viel ist als $\frac{2.42 \times 100}{17.79} : 14$.

9) Ein Kapitalist will an dreißigjährige Männer aufgeschobene Lebensrenten nach den streng berechneten Werthen verkaufen, die vom vollendeten sechzigsten Lebensjahre ab zum jährlichen Betrage 240 gezahlt werden sollen. Man verlangt, daß er das Risiko dafür baar niederlege; wie viel hat derselbe einzuzahlen?

Da nach (1) das Risiko für den jährlichen Betrag 1 zu 0.271 gefunden wurde, so ist es für den Betrag 240 gerade 65; demnach sind zu deponiren

bei	50	Versicherungen:	$7 \times 65 =$	455
"	100	"	$10 \times 65 =$	650
"	400	"	$20 \times 65 =$	1300
"	900	"	$30 \times 65 =$	1950
"	1600	"	$40 \times 65 =$	2600
"	2500	"	$50 \times 65 =$	3250
"	10000	"	$100 \times 65 =$	6500
"	9467929	"	$3077 \times 65 =$	200005.

10) Eine Versicherungsanstalt will einer zwanzigjährigen Person das Sterbegeld 1 gegen einen lebenslänglichen jährlichen Beitrag versichern; wie hoch ist derselbe, ohne und mit Rücksicht auf das Risiko, anzusetzen?

Der baare Werth des Sterbegeldes 1 beträgt 0.3284, der baare Werth der lebenslänglichen jährlichen Zahlung 1 aber 17.79; will daher die Anstalt weder gewinnen noch verlieren, so muß zwischen den Ausgaben und Einnahmen Gleichgewicht vorhanden, also der 17.79fache Jahresbeitrag 0.3284 ergeben, letzterer also ohne Rücksicht auf das Risiko $\frac{0.3284}{17.79} = 0.01846$ sein. Beachtet man dagegen das Risiko, so ist nach den vorhergehenden Berechnungen der baare Werth der von der Anstalt gekauften Lebensrente auf $17.79 - 5.73 = 12.06$, der des verkauften Sterbethalers aber auf $0.3284 + 0.0805 = 0.4089$ zu veranschlagen, demnach der Jahresbeitrag mit Rücksicht auf das Risiko $\frac{0.4089}{12.06} = 0.03391$, oder 187.8% des reinen Betrages.

11) Eine Versicherungsanstalt schließt 200 Geschäfte der vorstehenden Art ab; wie hoch hat dieselbe den Jahresbeitrag zu stellen?

Der baare Werth des Sterbegeldes ist zu $0.3284 + \frac{0.0805}{14} = 0.3342$, der der Leibrente aber zu $17.79 - \frac{5.73}{14} = 17.38$ zu veranschlagen; demnach

ist der Jahresbeitrag $\frac{0.3342}{17.38} = 0.01923$, oder nur noch 104.2% des reinen Beitrags.

Durch dieselbe Rechnung ergiebt sich der Beitrag

bei 50 Versicherungen:	$\frac{0.3399}{16.97} = 0.02003$,	oder	109.0%	des reinen Beitrags		
„ 100 „	$\frac{0.3364}{17.22} = 0.01954$,	„	105.3%	„	„	„
„ 200 „	$\frac{0.3342}{17.38} = 0.01923$,	„	104.2%	„	„	„
„ 300 „	$\frac{0.3333}{17.45} = 0.01909$,	„	103.4%	„	„	„
„ 400 „	$\frac{0.3324}{17.50} = 0.01900$,	„	102.9%	„	„	„
„ 500 „	$\frac{0.3321}{17.53} = 0.01894$,	„	102.6%	„	„	„

12) Eine Versicherungsgesellschaft schließt mit einem dreißigjährigen Manne über eine Wittwenpension zum Betrage von jährlich 1 für dessen zwanzigjährige Ehefrau zum Preise 13.67 ab; wie hoch wird sich der jährliche Beitrag während der Dauer der Ehe herausstellen?

Der baare Werth der Wittwenrente ist 4.12, die der Verbindungsrente 13.67, folglich der strenge Beitrag 0.3014. Bei Berücksichtigung des Risikos dagegen hat man den baaren Werth der Ueberlebensrente zu $4.12 + 5.61 = 9.73$, dagegen den baaren Werth der Verbindungsrente zu $13.67 - 5.07 = 8.60$ (6) zu veranschlagen, so daß der jährliche Beitrag $\frac{9.73}{8.60} = 1.131$ oder 375.2% des reinen Beitrags wäre.

Für das Ehepaar (35, 30) wäre der reine Beitrag $\frac{3.76}{12.33} = 0.3049$, aber mit Berüsichtigung des Risikos $\frac{3.76 + 5.30}{12.33 - 4.64} = 1.1782$, oder 386.4% des reinen Beitrages.

13) Wie hoch wird sich der Beitrag mit Berücksichtigung des Risikos herausstellen, wenn der Verein 200 solcher Geschäfte abschließt?

Der baare Werth der Ueberlebensrente ist in diesem Falle zu $4.12 + \frac{5.61}{14} = 4.52$, und der der Verbindungsrente zu $13.67 - \frac{5.07}{14} = 13.31$ zu veranschlagen, daher der jährliche Beitrag zu $\frac{4.52}{13.31} = 0.3396$, oder 111.1% vom reinen Beitrag.

Für das Ehepaar, bei dem der Mann fünfunddreißig, die Frau dreißig Jahr alt ist, erhält man

bei 50 Versicherungen, den jährlichen Beitrag					0.3873
„ 100	„	„	„	„	0.3614
„ 200	„	„	„	„	0.3450
„ 300	„	„	„	„	0.3375
„ 400	„	„	„	„	0.3322
„ 500	„	„	„	„	0.3309.

14) Der reine baare Werth einer Versicherung und das einfache Risiko sind bekannt; man soll die Anzahl Personen finden, die erforderlich sind, damit das Risiko, welches aus dem Gesammtgeschäft hervorgeht, einem bestimmten Theile des baaren Werthes gleich werde.

Das aus dem Gesammtgeschäfte hervorgehende Risiko ist gleich dem Quotienten aus dem einfachen Risiko und der Wurzel aus der Anzahl der Mitglieder. Soll derselbe nun dem gegebenen Theile des baaren Werthes gleich sein, so muß der Quotient aus dem einfachen Risiko und dem Theile des baaren Werthes gleich der Wurzel, folglich dieser Quotient mit sich selbst multiplicirt, gleich der Anzahl der Mitglieder sein. Man findet daher die Anzahl der Mitglieder, wenn man den Prozentsatz des einfachen Risikos durch den gegebenen Prozentsatz dividirt und den Qotienten mit sich selbst multiplicirt.

Soll demnach für eine fünfunddreißigjährige Person das aus dem Gesammtgeschäft hervorgehende Risiko ein Prozent der reinen baaren Werthe betragen, so werden

a.	bei der verkauften Leibrente	16.4 × 16.4 = 269
b.	bei der gekauften Leibrente	32.7 × 32.7 = 1069
c.	bei dem gekauften Sterbethaler . . .	32.7 × 32.7 = 1069
d.	bei dem verkauften Sterbethaler. . .	37.5 × 37.5 = 1274

Mitglieder erforderlich sein.

Für Ehepaare, bei welchen der Mann fünfunddreißig, die Frau dreißig Jahr alt ist, sind

e.	für die verkaufte Verbindungsrente. .	18.4 × 18.4 = 335
f.	für die gekaufte Verbindungsrente . .	37.6 × 37.6 = 1414
g.	für die verkaufte Wittwenrente . . .	140.9 × 140.9 = 19853

Ehepaare dazu nöthig.

Hieraus sieht man, daß sich die Zahlen der Mitglieder bei gleichem Gesammtrisiko wie die Doppelverhältnisse des einfachen Risikos, dagegen bei gleichem einfachem Risiko umgekehrt wie die Doppelverhältnisse der Gesammtrisikos verhalten; ferner, daß ein Versicherungsverein, der Leibrenten, Sterbegelder und Wittwenpensionen gegen Kapitalseinzahlungen und gleichen Prozentsatz des Risikos versichern wollte, auf mehr Theilnehmer für die Sterbegelder als für die Leibrenten, und auf noch weit mehr Theilnahme an den Wittwenpensionen als an den Sterbegeldern zu hoffen haben müßte.

15) Eine Versicherungsanstalt will an fünfunddreißigjährige Männer Sterbegelder gegen lebenslängliche jährliche Voraus-

bezahlungen verkaufen; auf wie viele Mitglieder müßte sie zählen können, wenn sie den reinen jährlichen Beitrag zur Deckung des Risikos um fünf Prozent erhöhen wollte?

Der baare Werth des Sterbegeldes für fünfunddreißigjährige Personen ist 0.4353, der der Lebensrente 15.12; der reine jährliche Beitrag wäre also $\frac{0.4353}{15.12} = 0.02879$, d. h. der reine Beitrag wäre gleich dem Quotienten aus dem baaren Werthe des Sterbegeldes durch den der Leibrente. Des Risikos wegen vergrößert sich in dieser Bilanz der Zähler um das Risiko für das Sterbegeld, während der Nenner sich um das der Leibrente verringert und der Ausdruck rechts um 5% erhöht werden soll, also in 1.05×0.02879 übergeht. Hieraus folgt, daß der um das Risiko vermehrte baare Werth des Sterbethalers gleich ist dem Produkte aus dem baaren Werthe der Lebensrente und dem um die fünfprozentigen Zinsen erhöhten jährlichen Beitrage, weniger dem Produkte aus dem Risiko der Lebensrente und dem genannten erhöhten Beitrage. Das erstere Produkt aus dem baaren Werthe der Lebensrente und dem um die fünfprozentigen Zinsen erhöhten Beitrage ist aber dem Obigen zufolge nichts andres, als der baare Werth des Sterbethalers, erhöht um seine fünfprozentigen Zinsen. Läßt man demnach den einfachen Sterbethaler auf beiden Seiten weg, so behält man das Risiko des Sterbethalers gleich den fünfprozentigen Zinsen des baaren Werthes des Sterbethalers weniger dem Produkte aus dem um die fünfprozentigen Zinsen erhöhten Beitrage mit dem Risiko der Leibrente. Also ist das Risiko des Sterbethalers zusammengenommen mit dem zuletzt genannten Produkte den fünfprozentigen Zinsen des Sterbethalers gleich. Beiden Summen kommt, da sie das Risiko für das ganze Geschäft umfassen, die Wurzel aus der Anzahl der Mitglieder als Nenner zu, während in den Zählern die einfachen Risikos stehen; demnach erhält man die Wurzel der Anzahl der Mitglieder, wenn man zu dem einfachen Risiko für den baaren Werth des Sterbethalers das Produkt aus dem um fünf Prozent erhöhten jährlichen Beitrage und dem Risiko des baaren Werthes der Leibrente addirt und die Summe durch die fünfprozentigen Zinsen des Sterbethalers dividirt, so daß im vorliegenden Beispiele die Wurzel aus der Anzahl der Mitglieder

$$\frac{vT(35) + 1.05 \times 0.02879 \times gR(35)}{0.05 \times 0.4353}$$

beträgt. Nun ist aber $vT(35) = \frac{0.4353 \times 35.7}{100}$, $gR(35) = \frac{15.12 \times 32.7}{100}$, und wiederum $0.02879 \times 15.12 = 0.4353$, also die Wurzel aus der Anzahl der Mitglieder:

$$\frac{0.4353 \times 35.7 + 1.05 \times 0.4353 \times 32.7}{5 \times 0.4353},$$

oder da auch 0.4353 im Zähler und Nenner wegfällt:

$$\frac{35.7 + 1.05 \times 32.7}{5},$$

d. h.: Man findet die Wurzel aus der Anzahl der Mitglieder, wenn man das nach dem untergelegten Prozentsatz erhöhte Risiko der verkauften Lebensrente zum Risiko des verkauften Sterbegeldes addirt und die Summe durch den Prozentsatz dividirt.

Vermittelst dieser Rechnung findet man, daß beim Aufschlage des Jahresbeitrags bei Sterbekassen

um	1	Prozent	4679
=	2	=	1180
=	3	=	530
=	4	=	304
=	5	=	196

Mitglieder erforderlich sind, also daß die Anzahl der nothwendigen Versicherungen bei Zunahme des Prozentsatzes rasch abnimmt.

16) Eine Versicherungsanstalt will an fünfunddreißige Männer für ihre dreißigjährigen Ehefrauen Wittwenpensionen zum jährlichen Betrage 1 versichern, gegen jährliche Vorausbezahlungen während der Dauer der Ehe; auf wie viele Theilnehmer hat die Anstalt zu rechnen, wenn sie den reinen jährlichen Beitrag des Risikos wegen um fünf Procent erhöhen wollte?

Der baare Werth der Ueberlebensrente ist 3.76, der der Verbindungsrente 12.33, folglich der reine Jahresbeitrag $\frac{3.76}{12.33} = 0.3049$. Des Risikos wegen hat man aber den Zähler zu vergrößern, den Nenner zu verkleinern und da sich alles ganz auf dieselbe Weise wie vorher gestaltet, so erhält man die Wurzel aus der Anzahl der nöthigen Mitglieder zu

$$\frac{140.9 + 1.05 \times 37.6}{5} = 36.1,$$

demnach die Zahl der Mitglieder 1303.

Eben so findet man

bei	dem	Aufschlage	von	1%	die	Zahl	der	Versicherungen	32005
=	=	=	=	2%	=	=	=	=	8512
=	=	=	=	3%	=	=	=	=	3584
=	=	=	=	4%	=	=	=	=	2025
=	=	=	=	5%	=	=	=	=	1303,

so daß wiederum die Zahl der Mitglieder viel rascher fällt, als der Prozentsatz der Beiträge steigt. Der Grund hiervon ist leicht nachzuweisen. Man kann die beiden letzten Ausdrücke auch in der Form $\frac{35.7 + 32.7}{5} + 0.372$ und resp. $\frac{140.9 + 37.6}{5} + 0.376$ schreiben, wo der erste Summand in demselben Verhältniß fällt, wie der Prozentsatz steigt, der zweite Summand aber unveränderlich ist, und da nun jener Summand bei weitem überwiegt, so erhält man den Satz: Wenn eine Versicherungsanstalt Sterbegelder oder Wittwen=

pensionen gegen Beitragszahlungen versichert, so nimmt die nothwendige Zahl der Mitglieder nach dem doppelten Verhältniß ab, nach welchem der Prozentsatz für das Risiko steigt; jedoch bleibt dieselbe immer größer als für Kapitalseinzahlungen bei gleichem Prozentsatze für das Risiko erforderlich ist.

In beiden Formeln würde der Nenner Null, wenn das Risiko ganz wegfallen sollte, d. h. daß auch im Falle der Beitragszahlung bei keiner noch so großen endlichen Zahl von Versicherungen theoretisch vom Risiko gänzlich abgesehen werden kann (Seite 221).

Aus diesen Beispielen ergiebt sich der Vorzug größerer Versicherungsvereine vor den zu beschränkten und sieht man daraus zugleich, wie gering der repartirte Betrag für jedes Mitglied bei einem größern Verkehr ausfällt. Indeß darf dieser Satz nur theoretisch genommen werden und läßt sich auf verhältnißmäßig kleine Geschäfte, bei welchen man die Qualität der Aufnahmesuchenden nicht so genau prüft, nicht unmittelbar anwenden (Seite 42), weil hier wiederum das einfache Risiko bedeutend steigen kann.

Es versteht sich von selbst, daß die Geschäfte, auf deren Anzahl es hierbei ankommt, nicht alle zu gleicher Zeit abgeschlossen zu werden brauchen, die betreffende Anzahl sich vielmehr auf alle Geschäfte gleicher Art erstreckt, welche ein Versicherungsverein zu machen hofft. Da indeß der Erfolg hierbei sehr ungewiß ist, es auch darauf ankommt, sich den Verein von Zeit zu Zeit als abgeschlossen zu denken: so wird man die Anzahl der Geschäfte nur nach dem Beharrungszustande abzählen können.

Bei 50 jährlich beitretenden zwanzigjährigen Personen findet man also für die Anzahl der Personen (Seite 31) 50 × 35.35 = 1767.5 und hiervon ist die Wurzel 42, weil 42 × 42 = 1764 ist. Nach diesem Beispiele ist die

Berechnung für die Verkleinerungsverhältnisse bei Sterbekassen

Aufnahmealter:	Es treten jährlich bei, Personen:					
	50	100	150	200	250	300
20	42	57	73	84	94	103
25	40	57	69	80	89	98
30	38	54	66	76	85	94
35	36	51	62	72	81	89
40	34	48	59	68	76	83
45	32	45	55	64	71	78
50	29	52	51	59	66	72

ausgeführt und ersieht man bei dem regelmäßigen Fortschritt dieser Verhältnisse, daß sich diejenigen für dazwischen liegende Aufnahmealter und Zahlen der jährlich beitretenden Personen leicht durch Interpolation bestimmen lassen. Den 9467929 dreißigjährigen Mitgliedern unter (9) entspräche eine jährliche Aufnahme von $\frac{9467929}{29.07}$ d. h. 325694 Mitgliedern.

Bei den Wittwenkassen hängen diese Verkleinerungsverhältnisse von den Altern beider Eheleute ab. Für die bisher behandelten Paare von resp. dreißig und zwanzig Jahr, deren mittlere Verbindungsdauer 21.85 ist, so wie für das Paar von resp. fünfunddreißig und dreißig Jahren mit der mittlern Verbindungsdauer 18.44 erhält man die Verkleinerungsverhältnisse

beim jährlichen Eintritt von Paaren:	(30,20)	(35,30)
50	36	30
100	47	43
150	57	52
200	66	60
250	74	68
300	81	74.

Wird ein Verein neu gestiftet und zählt derselbe nicht eine große Anzahl ursprünglicher Mitglieder (die bei dieser Berechnung im Allgemeinen außer Acht zu lassen sind), so hat man anfänglich diese Zahlen noch bedeutend zu verkleinern, weil es sehr lange dauert, bevor der Beharrungszustand erreicht ist.

Bei solcher Behandlungsweise stellt sich das Risiko im Verhältniß zur versicherten Summe heraus. Beansprucht daher ein Mitglied den vierfachen Betrag dessen, was jedes von vier andern Mitgliedern verlangt, so hätte es das vierfache Risiko zu zahlen, während von den vier andern Personen, als eine Gesellschaft für sich betrachtet, zusammen das Doppelte zu zahlen wäre. Dieses Resultat ist unserm Begriffe vom Zufalle ganz angemessen, denn jenes Mitglied für sich wird den vierfachen Nachtheil oder Vortheil herbeiführen, während jedes dieser Mitglieder für sich allein zwar gleichfalls den einfachen Ausgang herbeiführen kann, es aber nicht wahrscheinlich ist, daß er bei allen vieren auf derselben Seite liegen, d. h. jedesmal zum Vortheil oder jedesmal zum Nachtheil ausschlagen werde, wodurch sich das Risiko verringert; weshalb es denn auch der Billigkeit gemäß ist, daß jenes Mitglied verhältnißmäßig ein größeres Risiko zahle, als diese. Man hat daher bei der Berechnung des Risikos in Bezug auf die Anzahl der Theilnehmer nicht die Stückzahl, sondern die Kopfzahl unterzulegen. Dies trifft auch ganz und gar mit den sonstigen Ausgängen bei Versicherungsanstalten zusammen. Denkt man sich z. B. einen Verein von 300 Personen, welche je den Betrag 3 versichert haben,

gegen einen gleichartigen von 500 Personen je mit dem Versicherungsbetrage 2, so sind bei jenem Vereine 900, bei diesem 1000 Beträge fraglich. Setzt man nun voraus, daß bei jenem Vereine während eines gewissen Zeitraumes 9 Personen je mit dem Vortheil oder Nachtheil 3 ausscheiden, so hat man der Wahrscheinlichkeit nach bei diesem einen Abgang von 15 Personen je mit dem Ausgange 2 vorauszusetzen. Diese Ausgänge haben auf eine oder die andere Weise die zurückgebliebenen Mitglieder zu tragen und ergiebt die Repartition auf den einfachen Betrag beim ersten Vereine $\frac{27}{900-27}$, d. i. $\frac{3}{97}$, und beim andern Vereine $\frac{30}{1000-30}$, d. i. gleichfalls $\frac{3}{97}$, woraus alsdann folgt, daß wenn beide Vereine verbunden gedacht werden, derselbe Repartitionsausgang herauskommen wird, (Seite 38); und in der That findet man alsdann $\frac{27+30}{900+1000-27-30}$, d. i. gleichfalls $\frac{3}{97}$. Setzt man dagegen voraus, daß im erstern Vereine einmal ausnahmsweise ein Drittheil mehr, also 12 mit 36 Ausgängen fällig würden, so wäre der Repartitionsausgang in der Vereinzelung $\frac{36}{900-36} = \frac{1}{24}$, dagegen in der Verbindung mit dem andern Vereine $\frac{36+30}{900+1000-36-30} = \frac{66}{1834}$, und hätten durch diese Verbindung die Mitglieder des erstern Vereins für jeden einfachen Versicherungsbetrag $\frac{1}{24} - \frac{33}{917} = \frac{125}{24 \times 917}$ gewonnen oder verloren, dagegen die Mitglieder des andern Vereins $\frac{66}{1834} - \frac{3}{97} = \frac{450}{97 \times 917}$ verloren oder gewonnen. Allein bei vorausgesetzter gleicher Qualität der Mitglieder beider Vereine läßt sich mit derselben Wahrscheinlichkeit wie vorher voraussetzen, daß das Sterblichkeitsverhältniß im erstern Vereine unverändert bleibe, aber einmal ausnahmsweise im andern das Drittheil mehr, also 20 Mitglieder mit 40 Einlagen stürben. Alsdann wäre der repartirte Ausgang für den zweiten Verein $\frac{40}{1000-40} = \frac{1}{24}$, wie vorher beim erstern Vereine; dagegen fände man in der Verbindung beider Vereine $\frac{27+40}{900+1000-27-40} = \frac{67}{1833}$, welches um ein sehr Geringes größer als $\frac{66}{1834}$, so daß gegenwärtig die Mitglieder im erstern Vereine verlieren oder gewinnen, wenn die im andern Vereine gewinnen oder verlieren, und zwar sehr nahebei dieselben Beträge wie vorher. Hieraus folgt alsdann, daß, *wenn in einem Vereine gleich qualificirter Mitglieder größere und kleinere Beträge versichert sind, diese Verschiedenheit der Beträge im Allgemeinen keinen Einfluß auf das Versicherungsgeschäft ausübt, ausnahmsweise dagegen mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Mitglieder eines Versicherungsbetrags von denen eines andern gewinnen oder verlieren können.* Aus diesem Satze und den vorhergegangenen Untersuchungen folgt alsdann sogleich der für die Praxis wichtige Satz: *Bei Aufstellung eines Tarifs oder bei Untersuchung der Lebensfähigkeit eines Vereins kann man von den verschiedenen Versicherungsbeträgen ganz absehen, vielmehr einen und denselben Betrag zu Grunde legen, sowohl was die reinen Einzahlungen,*

als was das Risiko betrifft, und hat hinterher nur darauf zu sehen, daß jedes Mitglied seine Einzahlungen in gleichem Verhältniß zu der versicherten Summe leiste.

Hat man bei Aufstellung eines Tarifs alle Vorsicht angewandt, welche die Wissenschaft vorschreibt und die Erfahrung an die Hand gegeben, so ist es zwar höchst unwahrscheinlich und ein vielleicht noch nie dagewesener Fall, daß das Geschäft einen unglücklichen Ausgang nehmen sollte; allein die Möglichkeit desselben läßt sich gleichwohl nicht bestreiten. In einer Sterbekasse könnten die Mitglieder früher absterben, in einer Wittwenkasse die Ehen früher getrennt werden oder die Wittwen länger leben, als man nach allen bisherigen Erfahrungen vorausgesetzt hatte; der Zinsfuß könnte für längere Perioden oder gar für immer einen bedeutenden Rückgang erleiden; es könnten bedeutende unvorhergesehene Verluste eintreten u. s. w. Damit der Verein hiergegen geschützt sei, bedarf er einer Garantie dafür, daß ihm zur gehörigen Zeit das etwa Fehlende zugeschossen werde. Der Garant, gleichviel noch, wer es sei, welcher die Zuschüsse zu leisten verpflichtet sein soll, wird darauf sehen, daß er so sparsam wie möglich in Anspruch genommen werde. Er wird zunächst dahin wirken, daß die Gegenleistungen nach den sichersten Grundlagen richtig berechnet und das Risiko so wie die Verwaltungskosten in angemessener Höhe veranschlagt werden, daß man das Geld sicher anlege und nicht zu Spekulationen benutze. Alsdann wird er alle solche Geschäfte, für die er keine zahlreiche Betheiligung zu erwarten hat, gänzlich ausschließen, die übrigen so einrichten, daß er auch hier noch für jede Kategorie der Versicherer auf eine hinreichende Anzahl rechnen kann, also namentlich die Versicherungsbeträge nicht allzu hoch steigen und nicht allzu sehr verschieden sein lassen; bei Sterbekassen zu jungen Leuten und zu alten Personen, bei Wittwenkassen zu alten Ehemännern, so wie allen solchen Ehen, in welchen der Mann viel älter als die Frau ist, den Zutritt versagen u. s. w. — Wenn dennoch einige Vereine auch mit einzelnen Personen ganz individuelle Geschäfte abschließen, so ist es nur als eine Wette anzusehen, der sich die Vereine unterziehen, weil sie das Risiko für sich haben und bei ihren sonstigen Vermögensverhältnissen einen einzelnen unglücklichen Ausgang verwinden können.

Die Garantie kann nun erstlich von einem der Gesellschaft an und für sich ganz fremd gegenüberstehenden Kapitalisten, oder einer Assoziation einiger oder mehrerer solcher Kapitalisten nach Kopfzahl oder Aktienantheil übernommen werden. Diese individuelle oder moralische Person sichert der Gesellschaft zu, alle etwaigen Ausfälle zu decken, ohne jedoch thatsächlich solche zu befürchten, macht dagegen aber auch Anspruch auf den ganzen oder wenigstens auf einen bedeutenden Theil des Gewinnes, den sie nach aller Wahrscheinlichkeit erwartet. Man nennt dieses Garantie im engeren Sinne

des Wortes. Jeder Versicherungsverein wird aber (Seite 146) selbst Kapitalist, und zwar genau in demselben, oder vielmehr, bei gehöriger Berücksichtigung des Risikos, in einem noch etwas größeren Verhältniß, als der Umfang des Geschäfts erfordert. Es steht mithin dem nichts entgegen, daß die Gesellschaft, wie jeder großartige Geschäftsmann es thut, ihr eigener Garant werde, in der Art, daß jeder einzelne Versicherer sich verpflichtet, alle Ausfälle, für welche kein Dritter aufzukommen hat, durch Nachzahlungen zu decken und dafür mit den von ihm bereits eingezahlten Beträgen und seiner künftigen Anspruchsberechtigung haftet; man errichtet die Gesellschaft auf Gegenseitigkeit. Solche Geschäfte sind in neuerer Zeit in Verruf gekommen, weil die Stifter der Heirathskassen ihren Mitgliedern einredeten, es seien diese Kassen gleichfalls auf Gegenseitigkeit eingerichtet, während man dieselben größtentheils „Kassen auf Einseitigkeit" hätte nennen sollen. Die Versicherungsvereine auf Gegenseitigkeit verdienen in vielem Betracht den Vorzug vor denen auf Garantie, und ist nicht abzusehen, warum der Minderbemittelte oder gar der Arme dem Geldmanne, welcher größtentheils nur das Geschäft des Fuchses übernimmt, den Löwenantheil überlassen sollte. Hierbei ist aber wohl zu beachten, daß der Selbstgarant alle die Vorsichtsmaßregeln ergreife, welche vorher dem Garanten im Allgemeinen zugeschrieben wurden. Man macht zwar den Einwand, daß der Kapitalist sein Geld höher verwerthe, als ein Verein auf Gegenseitigkeit; allein es ist nicht wohl zu begreifen, warum diese Vereine nicht ebenso gut geschickte und treue Verwalter ihrer Geschäfte sein sollten, wie der Garant? Außerdem fließt der Gewinn doch größtentheils in die Kasse des Garanten, ohne den Mitgliedern zu Gute zu kommen. Wenn es nun auch schon im Allgemeinen dem Gemeinwesen vortheilhaft sein wird, daß die Kapitalien der ihm Angehörigen so fruchtbringend wie möglich gemacht werden, ohne dahin zu sehen, wem der Gewinn zufließe, so hat man meines Dafürhaltens diese Maxime nicht so weit auszudehnen, dem einzelnen Gemeinde-Mitgliede oder einem Theil derselben die beliebige Verwendung der Ersparnisse zu versagen, weil ein Anderer dieselben vielleicht besser zu benutzen versteht. Auch hat man zu bedenken, daß sich nicht überall da, wo ein solcher Verein nothwendig und zweckmäßig wäre, ein Garant einfindet; daß dagegen, ist ein solcher einmal aufgetreten, derselbe, wie leider die tägliche Erfahrung lehrt (Seite 4), und wovon ich selbst noch bei Gelegenheit der Kinderversorgungskassen ein eclatantes Beispiel anführen werde, alles anwendet, so viel Zuspruch wie möglich zu bekommen und zu Betheiligungen verleitet, die besser unterblieben wären. — Diese Ansicht von der Sache habe ich aus den Schriften der kompetentesten Beurtheiler des Faches gewonnen. Babbage sagt darüber, nachdem er von dem Mißtrauen gesprochen, das der Gegenseitigkeit geworden, oder vielmehr absichtlich bereitet war,

in seinem Werke: Vergleichende Darstellung der verschiedenen Lebens-Assecuranz-Gesellschaften. Weimar 1827. Seite 30: „Man glaubt, daß der Vortheil solcher Einrichtungen“ (fremder Garantie) „darin besteht, den Versicherten mehrere Sicherheit zu gewähren, und in der Befreiung von aller Verbindlichkeit, welche auch angenommen, ihnen nicht zur Last fallen kann. Die runde Summe, worüber man eins geworden, wird beim Tode der Versicherten ohne allen Abzug oder Vermehrung bezahlt. Die Preise solcher Comptoire, die diesen Plan angenommen haben, sind gewöhnlich hoch, und es verdient wohl erwogen zu werden, ob man die mehrere Sicherheit nicht theuer um den Preis bezahlt, der von solchen Gesellschaften gefordert wird.“ — Tetens, in seiner Abhandlung: Versuch über das Risiko der Kasse bei Versorgungsanstalten (Seite 191) drückt sich noch bestimmter aus: „Daraus,“ (daß bei Vergrößerung der Gesellschaft das Risiko geringer wird) „denn vonselbst erhellet, es sei in jedem Falle zweckmäßiger, daß die Gesellschaft selbst das Risiko übernehme, sich selbst garantire. Nur muß die Zahl der Interessenten nicht zu klein sein. Ist sie groß, so können die einzelnen leicht so viel ohne ihre Beschwerde wagen, als dabei zu wagen ist.“

Die Garantie soll demnach für alle etwaige Ausfälle, welche das Geschäft in irgend einer Art, besonders aber in Beziehung auf das Hazard zu erleiden haben dürfte, aufkommen und folgt hieraus vonselbst, daß besonders die letzten Mitglieder eines Vereins durch solche Sicherstellung zu schützen wären. Was soll man aber dazu sagen, wenn in neuester Zeit die Meinung ausgesprochen wird, daß die ersten Mitglieder einer Gefahr ausgesetzt sind? Eine solche wäre nur in dem einzigen Falle denkbar, daß ein Versicherungsverein keinen rechten Anklang fände und man nun den wenigen Mitgliedern, die etwa hinzugetreten sind, die Verpflichtung auferlegen wollte, die vielleicht theuern Einrichtungs- und bisherigen Verwaltungskosten zu decken. Daß aber eine Garantie geschaffen werden könne, wenn man gegen hohe Zinsen ein Kapital aufnimmt und solches hinterher aus den Einzahlungen der Mitglieder zurückzahlen will, könnte nur der glauben, welcher über den Gegenstand gar nicht gedacht hätte. Ohne diese Anleihe bliebe zwar auch von den Mitgliedern alles einzuzahlen, was zurück verlangt wird, bei dem aufgenommenen Kapitale aber auch noch der Zinsausfall. Abgesehen von dem Allen enthält es schon einen Widerspruch, von Gefahr für die Mitglieder und Garantie des Vereins zugleich zu sprechen!

In dem bisherigen Theile des zweiten Abschnitts haben wir die Rechnungsmethoden kennen gelernt, die bei Versicherungsgeschäften über das Leben und Sterben der Menschen angewandt, jedesmal zum Ziele führen, ohne jedoch be-

haupten wollen, daß sie dies immer auf kürzestem Wege thun; im Gegentheil wird sich bei den Kinderversorgungs- und Aussteuerkassen herausstellen, daß man bei Versicherungen auf kurze Perioden gut thut, die ganze Rechnung für dergleichen einzelne Fälle von Neuem anzulegen, was denn auch niemals Schwierigkeiten macht. Bevor wir aber mit den gefundenen Werthen arbeiten, ist es nothwendig, dieselben näher kennen zu lernen und nach den verschiedenen Zinsfüßen und Mortalitäts-Tabellen mit einander zu vergleichen, damit man sich derselben je nach Bedarf mit um so größerer Sicherheit bedienen, auch Schlüsse von einer Unterlage auf die andere machen könne.

Zunächst wird es vom Techniker häufig verlangt, die Richtigkeit seiner Rechnungen durch die Probe zu veranschaulichen, und obgleich wir dergleichen schon im ersten Abschnitte bei Gelegenheit der Tabellen 50, 51 und 52 mitgetheilt haben, so sollen dennoch hier wiederum zwei vollständige Proben für baare Werthe aufgestellt werden, weil dieselben Gelegenheit geben, den Gegenstand noch von einer allgemeinen Seite kennen zu lernen und wir späterhin Veranlassung haben werden, solche Proben auch für Beitragszahlungen auszuführen. In den nachfolgenden

Proben für die baaren Werthe der Lebensrenten und der Sterbethaler à 4%

Alter der zu versorgenden	Lebende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den frühern Jahren vor der Zahlung	nach der Zahlung	Jahreszinsen der Bestände à 4%.	Sterbende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den frühern Jahren vor der Zahlung	nach der Zahlung	Jahreszinsen der Bestände à 4%.
	a	b	c	d	a'	b'	c'	d'
0	1000	12431.5	11431.5	457.3	250	542.74	292.74	11.71
1	750	11888.8	11138.8	445.5	89	304.45	215.45	8.62
2	661	11584.3	10923.3	436.9	43	224.07	181.07	7.24
3	618	11360.2	10742.2	429.7	25	188.31	163.31	6.53
4	593	11171.9	10578.9	423.2	14	169.84	155.84	6.23
5	579	11002.1	10423.1	416.9	12	162.07	150.07	6.00
6	567	10840.0	10273.0	410.9	11	156.07	145.07	5.80
7	556	10683.9	10127.9	405.1	9	150.87	141.87	5.67
8	547	10533.0	9986.0	399.4	8	147.54	139.54	5.58
9	539	10385.4	9846.4	393.9	7	145.12	138.12	5.52
10	532	10240.3	9708.3	388.3	5	143.64	138.64	5.55
11	527	10096.6	9569.6	382.8	4	144.19	140.19	5.61
12	523	9952.4	9429.4	377.2	4	145.80	141.80	5.67

Alter der zu versorgenden	Lebende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren vor der Zahlung.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren nach der Zahlung.	Jahreszinsen der Bestände à 4%.	Sterbende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren vor der Zahlung.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren nach der Zahlung.	Jahreszinsen der Bestände à 4%.
	a	b	c	d	a′	b′	c′	d′
13	519	9806.6	9287.6	371.5	4	147.47	143.47	5.74
14	515	9659.1	9144.1	365.8	4	149.21	145.21	5.81
15	511	9509.9	8998.9	360.0	4	151.02	147.02	5.88
16	507	9358.9	8851.9	354.1	4	152.90	148.90	5.96
17	503	9206.0	8703.0	348.1	4	154.86	150.86	6.04
18	499	9051.1	8552.1	342.1	4	156.90	152.90	6.12
19	495	8894.2	8399.2	336.0	4	159.02	155.02	6.20
20	491	8735.2	8244.2	329.8	5	161.22	156.22	6.25
21	486	8574.0	8088.0	323.5	5	162.47	157.47	6.30
22	481	8411.5	7930.5	317.2	5	163.77	158.77	6.35
23	476	8247.7	7771.7	310.9	5	165.12	160.12	6.40
24	471	8082.6	7611.6	304.5	5	166.52	161.52	6.46
25	466	7916.1	7450.1	298.0	5	167.98	162.98	6.52
26	461	7748.1	7287.1	291.5	5	169.50	164.50	6.58
27	456	7578.6	7122.6	284.9	5	171.08	166.08	6.64
28	451	7407.5	6956.5	278.3	6	172.72	166.72	6.67
29	445	7234.8	6789.8	271.6	6	173.39	167.39	6.70
30	439	7061.4	6622.4	264.9	6	174.09	168.09	6.72
31	433	6887.3	6454.3	258.2	6	174.81	168.81	6.75
32	427	6712.5	6285.5	251.4	6	175.56	169.56	6.78
33	421	6536.9	6115.9	244.6	6	176.34	170.34	6.82
34	415	6360.5	5945.5	237.8	6	177.16	171.16	6.85
35	409	6183.3	5774.3	231.0	7	178.01	171.01	6.84
36	402	6005.3	5603.3	224.1	7	177.85	170.85	6.83
37	395	5827.4	5432.4	217.3	7	177.68	170.68	6.83
38	388	5649.7	5261.7	210.5	7	177.51	170.51	6.82
39	381	5472.2	5091.2	203.6	7	177.33	170.33	6.81
40	374	5294.8	4920.8	196.8	7	177.14	170.14	6.81
41	367	5117.6	4750.6	190.0	7	176.95	169.95	6.80
42	360	4940.6	4580.6	183.2	7	176.75	169.75	6.79
43	353	4763.8	4410.8	176.4	7	176.54	169.54	6.78
44	346	4587.2	4241.2	169.6	7	176.32	169.32	6.77
45	339	4410.8	4071.8	162.9	7	176.09	169.09	6.76

Alter der zu versorgenden	Lebende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren vor der Zahlung.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren nach der Zahlung.	Jahreszinsen der Bestände à 4°/₀.	Sterbende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren vor der Zahlung.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren nach der Zahlung.	Jahreszinsen der Bestände à 4°/₀.
	a	b	c	d	a′	b′	c′	d′
46	332	4234.7	3902.7	156.1	8	175.85	167.85	6.72
47	324	4058.8	3734.8	149.4	8	174.57	166.57	6.66
48	316	3884.2	3568.2	142.7	8	173.23	165.23	6.61
49	308	3710.9	3402.9	136.1	8	171.84	163.84	6.55
50	300	3539.0	3239.0	129.6	9	170.39	161.39	6.46
51	291	3368.6	3077.6	123.1	9	167.85	158.85	6.36
52	282	3200.7	2918.7	116.7	9	165.21	156.21	6.25
53	273	3035.4	2762.4	110.5	9	162.46	153.46	6.14
54	264	2872.9	2608.9	104.3	9	159.60	150.60	6.03
55	255	2713.2	2458.2	98.3	9	156.63	147.63	5.91
56	246	2556.5	2310.5	92.4	9	153.54	144.54	5.78
57	237	2402.9	2165.9	86.6	9	150.32	141.32	5.65
58	228	2252.5	2024.5	81.0	9	146.79	137.79	5.52
59	219	2105.5	1886.5	75.4	9	143.51	134.51	5.38
60	210	1961.9	1751.9	70.1	9	139.89	130.89	5.24
61	201	1822.0	1621.0	64.8	9	136.13	127.13	5.09
62	192	1685.8	1493.8	59.8	10	132.22	122.22	4.89
63	182	1553.6	1371.6	54.9	10	127.11	117.11	4.69
64	172	1426.5	1254.5	50.2	10	121.80	111.80	4.48
65	162	1304.7	1142.7	45.7	10	116.28	106.28	4.25
66	152	1188.4	1036.4	41.4	10	110.53	100.53	4.02
67	142	1077.8	935.8	37.4	10	104.55	94.55	3.78
68	132	973.2	841.2	33.6	10	98.33	88.33	3.53
69	122	874.8	752.8	30.1	10	91.86	81.86	3.28
70	112	782.9	670.9	26.8	9	85.14	76.14	3.05
71	103	697.7	594.7	23.8	9	79.19	70.19	2.81
72	94	618.5	524.5	21.0	9	73.00	64.00	2.56
73	85	545.5	460.5	18.4	8	66.56	58.56	2.34
74	77	478.9	401.9	16.1	8	60.90	52.90	2.12
75	69	418.0	349.0	14.0	7	55.02	48.02	1.92
76	62	363.0	301.0	12.0	7	49.94	42.94	1.72
77	55	313.0	258.0	10.3	6	44.66	38.66	1.55
78	49	268.3	219.3	8.8	6	40.21	34.21	1.37

Alter der zu versorgenden	Lebende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren vor der Zahlung.	nach der Zahlung.	Jahreszinsen der Bestände à 4%.	Sterbende.	Ursprüngliches Kapital resp. Bestände aus den früheren Jahren vor der Zahlung.	nach der Zahlung.	Jahreszinsen der Bestände à 4%.
	a	b	c	d	a′	b′	c′	d′
79	43	228.1	185.1	7.4	6	35.58	29.58	1.18
80	37	192.5	155.5	6.2	5	30.76	25.76	1.03
81	32	161.7	129.7	5.2	4	26.79	22.79	0.91
82	28	134.9	106.9	4.3	4	23.70	19.70	0.79
83	24	111.2	87.2	3.5	4	20.49	16.49	0.66
84	20	90.7	70.7	2.8	3	17.15	14.15	0.57
85	17	73.5	56.5	2.3	3	14.72	11.72	0.47
86	14	58.8	44.8	1.8	2	12.19	10.19	0.41
87	12	46.6	34.6	1.4	2	10.60	8.60	0.34
88	10	36.0	26.0	1.0	2	8.94	6.94	0.28
89	8	27.0	19.0	0.8	2	7.22	5.22	0.21
90	6	19.8	13.8	0.5	1	5.43	4.43	0.18
91	5	14.3	9.3	0.4	1	4.61	3.61	0.15
92	4	9.7	5.7	0.2	1	3.76	2.76	0.11
93	3	5.9	2.9	0.1	1	2.87	1.87	0.08
94	2	3.0	1.0	0.0	1	1.95	0.95	0.04
95	1	1.0	0	.	1	0.99	−0.01	.

ist von 1000 Neugebornen ausgegangen. Da nun der baare Werth der Lebensrente 12.4315 und der des Sterbethalers 0.5427 ist, so waren einzuzahlen 12431.5, resp. 542.7, Col. b und b′, woraus sich alsdann das Uebrige von selbst ergiebt. Bei der Berechnung solcher Proben thut man gut, von fünf zu fünf, oder von zehn zu zehn Jahren nachzusehen, ob man keine Fehler begangen habe, indem man sich zuerst davon überzeugt, daß die Verzinsungen Col. d und d′ richtig sind und alsdann Einnahmen und Ausgaben aufrechnet und mit dem früheren Bestande verbindet. Ist man z. B. beim Anfange des zwanzigsten Jahres angelangt, so stellt sich die Rechnung folgendermaßen:

für die Lebensrente				für den Sterbethaler			
Bestand:	8735.2			Bestand:	161.22		
Einnahme	329.8	Ausgabe	491	Einnahme	6.25	Ausgabe	5
„	323.5	„	486	„	6.30	„	5
„	317.2	„	481	„	6.35	„	5
„	310.9	„	476	„	6.40	„	5
„	304.5	„	471	„	6.46	„	5
	10321.1		2405		192.98		25
	2405.0				25.00		
	7916.1				167.98		

und da sich diese Bestände beim Alter von fünfundzwanzig Jahren wirklich vorfinden, so hat man sich auf eine leichte Weise von der Richtigkeit seiner Rechnung überzeugt.

Ist die Probe nun für ein Alter durchgeführt, so ist sie es auch für alle höheren Alter; denn ist z. B. der baare Werth der Leibrente oder des Sterbethalers für zwanzigjährige Personen resp. 17.7905 und 0.3284, so müssen 491 solcher Personen von 491 × 17.7905 lebenslänglich ernährt werden und von 491 × 0.3284 nach ihrem Tode den Sterbethaler beanspruchen lassen können. Zufolge der Probe ist aber ein Gleiches mit den Beständen in den Colonnen a und a′ der Fall; also haben jene Produkte mit diesen Beständen übereinzustimmen, und in der That ist

$$491 \times 17.7905 = 8735.1 \text{ und } 491 \times 9.3284 = 161.24,$$

was sehr wenig von jenen Beständen abweicht.

Man erhält daher die Bestände aus der Multiplication des betreffenden baaren Werthes mit der entsprechenden Zahl der Lebenden, und umgekehrt, den baaren Werth durch Division der Bestände durch die Zahl der Lebenden und kann sich auf die eine oder die andere Weise von der Richtigkeit der früher gefundenen baaren Werthe überzeugen. Ferner sieht man ein, daß dasselbe Verfahren der Probe bei allen andern baaren Werthen, Verbindungsrenten, Wittwenthalern, Ueberlebensrenten u. s. w. Anwendung findet, und endlich ist es leicht, von dem Bestande des einen Jahres zu dem des nachfolgenden oder des vorhergehenden Jahres zu gelangen. Im erstern Falle hat man nur die Zahl der Anspruchsberechtigten von dem Bestande zu subtrahiren und die Differenz auf ein Jahr aufzuzinsen, im letztern dagegen den Bestand auf ein Jahr abzuzinsen und die Zahl der Anspruchsberechtigten des nächst vorhergehenden Jahres zu addiren. Hieraus erhält man die schöne Regel: **Soll man den baaren Werth irgend einer Art und eines Alters aus dem des nächst vorhergehenden Alters finden, so multiplicire man**

diesen letztern mit der Anzahl der im vergangenen Jahre überhaupt noch vorhanden gewesenen Existenzen, subtrahire vom Produkte die Zahl der Anspruchsberechtigten zur selbigen Zeit, zinse die Differenz auf ein Jahr auf und dividire das Resultat durch die Anzahl der Existenzen in dem folgenden Jahre. — Soll man dagegen den baaren Werth irgend einer Art und eines Alters aus dem des nachfolgenden Alters finden, so multiplicire man den letztern mit der dazu gehörigen Anzahl der Existenzen, zinse das Produkt auf ein Jahr ab, addire zum Resultat die Anzahl der Anspruchsberechtigten und dividire die Summe durch die Anzahl der Existenzen des vorhergehenden Jahres.

Hierbei sind für die Lebensrenten und Verbindungsrenten die Existenzen zugleich die Anspruchsberechtigten, für alle übrige Renten aber verschieden. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß bei einer Verbindung zweier Personen beide zugleich ein Jahr älter oder jünger werden, so daß der Altersunterschied immer derselbe bleibt.

Das letztere Verfahren war gerade bei der Probe eingeschlagen worden, indem man von 1000 × 12.4315, resp. 1000 × 0.5427 ausging, die Divisionen noch nicht ausführte und die ferneren Multiplikationen ersparen konnte, weil, wie wir sahen und wie sich von selbst versteht, die Bestände selbst die betreffenden Produkte vorstellen. Freilich war dazu die Kenntniß des baaren Werths für die Neugebornen, der nicht als gegeben angesehen werden kann, nöthig; allein ein solcher Werth ist immer bekannt, es ist der des höchsten Alters resp. der höchsten Altersverbindung, nämlich 1, von welchem aus man successive zu den baaren Werthen für die nächst jüngeren Alter gelangen kann. Diese Methode, die baaren Werthe zu berechnen, ist eben so einfach und übersichtlich, wie die früher erörterte Rechnungsweise und würde häufiger angewandt werden, wenn nicht die abgezinsten Werthe der Existenzen und die Summen dieser Werthe von so vielfältigem Nutzen wären.

Nachfolgend stehen zwei Beispiele für

Berechnung der Verbindungsrenten aus einander.

A. Uebergang vom höhern Alter zum jüngern.					B. Uebergang vom jüngern Alter zum höhern.				
Alter der verbundenen Personen.	Anzahl der Verbindungen.	Abgezinste Bestände.	Bestände im Betriebsfonds.	Baare Werthe der Verbindungsrenten. c : a	Alter der verbundenen Personen.	Anzahl der Verbindungen.	Aufgezinste Bestände.	Bestände im Betriebsfonds.	Baare Werthe der Verbindungsrenten. c′ : a′
	a	b	c	d		a′	b′	c′	d′
60,50	63000	.	467920	7.4273	33,28	189871	.	2413336	12.7104
59,49	67452	449923	517375	7.6703	34,29	184675	2223465	2312404	12.5216
58,48	72048	497476	569524	7.9048	35,30	179551	2127729	2212838	12.3244
57,47	76788	547620	624408	8.1316	36,31	174066	2033287	2114618	12.1485
56,46	81672	600392	682064	8.3512	37,32	168665	1940552	2018174	11.9657
55,45	86445	655831	742276	8.5867	38,33	163348	1849509	1923489	11.7755
54,44	91344	713727	805071	8.8136	39,34	158115	1760141	1830547	11.5775

Vermittelst der letztern Rechnung kann man sich von der Richtigkeit der Seite 191 auf ganz anderem Wege gefundenen Resultate überzeugen, während mir die erstere dazu diente, einen Rechnungsfehler in Tetens zu entdecken. Den baaren Werth der Verbindungsrente für das Paar (60,50) fand ich nämlich wie Tetens 7.4273, allein bei dem Paare (55,45) erhielt ich 8.5868, während bei Tetens 8.5934 steht, wie denn auch alle übrigen jüngeren Verbindungsrenten mit dem Altersunterschiede von zehn Jahren fortwährend etwas zu hoch angegeben sind.

Aus dem zuletzt ausgesprochenen Satze folgt zugleich, daß der baare Werth irgend einer Art und eines Alters kleiner, gleich oder größer sei, als der derselben Art und des nächst vorhergehenden Alters, je nachdem das Verhältniß der zurückgebliebenen zu den anfänglichen Existenzen dieses letztern Alters größer, gleich oder kleiner ist als die Differenz, welche man erhält, wenn man den Zinsfuß durch den baaren Werth des geringern Alters dividirt und den Quotienten von 1 subtrahirt. Setzt man hierin noch für die zurückgebliebenen Existenzen den Unterschied zwischen den anfänglichen und den ausgeschiedenen und läßt nun auf beiden Seiten 1 weg, so ergiebt sich der Satz: Der baare Werth irgend einer Art und irgend eines Alters ist größer, gleich oder kleiner, als der derselben Art und des um ein Jahr geringeren Alters, je nachdem die Wahrscheinlichkeit der Anspruchsberechtigung im jüngern Alter kleiner, gleich oder größer ist, als der Quotient des Zinsfußes durch den den jüngern Altern entsprechenden baaren Werth.

Dies ist der Grund, warum die baaren Werthe der Lebensrenten und der Verbindungsrenten im Allgemeinen mit dem höher werdenden Alter ab-,

die der Sterbethaler und Ueberlebensrenten aber damit zunehmen und warum bei allen die niedrigsten Alter, bei den Verbindungsrenten und Ueberlebensrenten aber auch höchste Alter davon Ausnahme machen.

Im Allgemeinen wissen wir schon

1) daß die baaren Werthe der Lebensrenten bei einer und derselben Mortalitäts-Tabelle um so geringer ausfallen werden, je größer der Zinsfuß ist (Seite 162); um aber den Unterschied näher zu untersuchen, habe ich folgende

Vergleichung der baaren Werthe der Lebensrenten nach Süßmilch, für 4 %, 3½ % und 3 %.

Lebensalter.	Baare Werthe der Leibrenten à 4 Prozent.	Unterschied in Lebensjahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Leibrenten à 3½ Prozent	Unterschied in Lebensjahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Leibrenten à 3 Prozent	Lebensalter.	Baare Werthe der Leibrenten à 4 Prozent.	Unterschied in Lebensjahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Leibrenten à 3½ Prozent.	Unterschied in Lebensjahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Leibrenten à 3 Prozent.
	a	b	b'	c	d	d'	e		a	b	b'	c	d	d'	e
21	17.642	6	7.2	18.902	6	7.6	20.334	41	13.944	3	5.3	14.678	3	5.5	15.486
22	17.487	6		18.722	6		20.121	42	13.723	3		14.432	3		15.211
23	17.327	6		18.535	6		19.902	43	13.495	3		14.178	3		14.928
24	17.160	6		18.341	6		19.676	44	13.257	2		13.915	2		14.636
25	16.987	5		18.140	5		19.442	45	13.011	2		13.643	2		14.335
26	16.807	5	6.7	17.933	5	7.1	19.202	46	12.755	2	4.9	13.362	2	5.0	14.025
27	16.619	5		17.718	5		18.953	47	12.527	2		13.110	2		13.747
28	16.424	5		17.495	5		18.697	48	12.291	2		12.852	2		13.461
29	16.257	5		17.302	5		18.474	49	12.048	2		12.585	2		13.169
30	16.085	5		17.103	5		18.244	50	11.796	2		12.310	2		12.868
31	15.905	4	6.3	16.898	4	6.6	18.007	51	11.575	2	4.3	12.068	2	4.4	12.602
32	15.719	4		16.685	4		17.763	52	11.349	2		11.821	2		12.331
33	15.526	4		16.466	4		17.512	53	11.118	2		11.569	2		12.056
34	15.326	4		16.238	4		17.254	54	10.881	2		11.312	2		11.776
35	15.117	4		16.003	4		16.987	55	10.639	2		11.050	2		11.491
36	14.938	4	5.8	15.799	4	6.0	16.753	56	10.392	2	3.8	10.782	1	3.9	11.201
37	14.752	4		15.588	4		16.513	57	10.138	2		10.509	1		10.906
38	14.560	4		15.371	3		16.267	58	9.879	1		10.230	1		10.606
39	14.362	3		15.147	3		16.014	59	9.614	1		9.945	1		10.301
40	14.156	3		14.916	3		15.754	60	9.342	1		9.656	1		9.990

angefertigt, aus welcher hervorgeht, daß der Unterschied in den baaren Werthen beim Fallen des Zinsfußes

	von 4 % auf 3½ %	von 3½ % auf 3 %
6 Lebensjahre beträgt,	vom 21sten bis 24sten Lebensjahre	vom 21sten bis 24sten Lebensjahre
5 „ „	„ 25 „ „ 30 „ „	„ 25 „ „ 30 „ „
4 „ „	„ 31 „ „ 38 „ „	„ 31 „ „ 37 „ „
3 „ „	„ 39 „ „ 43 „ „	„ 38 „ „ 43 „ „
2 „ „	„ 44 „ „ 57 „ „	„ 44 „ „ 55 „ „
1 „ „	„ 58 „ „ — „ „	„ 56 „ „ — „ „

2) daß der Unterschied nach Prozenten des kleinern Werthes beim einundzwanzigsten Lebensjahre resp. mit 7.2 und 7.6 beginnt und in beiden Fällen mit jedem Jahre durchschnittlich um 0.1 fällt, danach also z. B. im sechsundvierzigsten Lebensjahre resp. 4.7 und 5.1 sein würde, während in der That die direkte Rechnung resp. 4.9 und 5.0 ergiebt, so daß die Abweichung nur sehr gering ist. Da sich nun auch nach der Brune'schen Mortalitäts-Tabelle beim Fallen des Zinsfußes von 4% auf 3½% eine Differenz herausstellt, die

beim einundzwanzigsten Lebensjahre 19.950 — 18.509, d. i. 7.7%

beim sechsundfunfzigsten " 12.072 — 11.606, d. i. 4.9%

beträgt, so dürfte der Praktiker berechtigt sein, beim Fallen des Zinsfußes von 4% auf 3½% und resp. von 3½% auf 3% das einundzwanzigste Lebensjahr für das Steigen der baaren Werthe der Leibrente allgemein mit 7.5% anzusetzen und diesen Betrag mit jedem Lebensjahre um 0.1 fallen zu lassen. Hiernach würden auf das sechsundvierzigste Lebensjahr 5.0% kommen.

Diese Gleichartigkeit des Steigens der genannten baaren Werthe beim Fallen des Zinsfußes von 4% auf 3½% und resp. von 3½% auf 3% darf nicht befremden. Zwar weiß man, daß der Unterschied auf viele Jahre hinaus an und für sich ein sehr bedeutender ist (Seite 157); allein gerade dann hat die Zahl der Lebenden gegen die anfängliche Zahl derselben auch schon so sehr abgenommen, daß der totale Effekt nur noch ein sehr geringer sein kann.

Betrachten wir nun die baaren Werthe der Lebensrente bei einem und demselben Zinsfuß, aber verschiedenen Mortalitäts-Tabellen, so sehen wir zunächst aus der

Vergleichung der baaren Werthe der Leibrenten nach verschiedenen Mortalitäts-Tabellen und 4% Zinsen

Lebensalter.	Northamptoner.	Süßmilch.	Wargentin.	Kerseboom.	Brune Männer.	Brune Frauen.	Deparcieux.
	a	b	c	d	e	f	g
0	11.33	12.43	17.66	14.53	.	.	14.05
10	18.52	19.25	19.89	18.11	.	.	17.25
20	17.03	17.79	18.60	17.79	.	18.55	16.58
30	15.78	16.08	17.01	16.67	17.63	17.66	15.84
40	14.20	14.16	15.03	15.24	15.41	16.08	14.62
50	12.26	11.80	12.66	12.96	12.76	13.52	12.58
60	10.04	9.34	9.79	10.55	9.66	10.31	10.24
70	7.36	6.99	6.78	7.75	6.67	7.09	7.36
80	4.64	5.20	4.33	4.90	4.31	4.75	4.86
90	2.76	3.28	2.64	2.38	1.82	3.13	2.58

daß die nach der Brune'schen Mortalitäts-Tabelle für Frauen im Ganzen genommen die größten baaren Werthe liefern, während (Seite 170) die Deparcieux'sche Tabelle die längsten mittlern Lebensdauern ergab, weil es hierbei nur darauf ankommt, wie viele Personen gelebt haben, bei den baaren Werthen aber auch noch darauf, wann dieselben gelebt haben. Man denke sich nämlich zwei Mortalitäts-Tabellen so eingerichtet (Seite 166), daß sie für ein bestimmtes Lebensalter, für welches man den baaren Werth der Leibrenten berechnen will, gleich viele Lebende haben. Tritt nun in irgend welchem Jahre eine Abweichung ein, so wirkt dieselbe auf die mittlern Lebensdauern gleichmäßig, sie mag sich bereits in den früheren oder in den späteren Jahren einstellen; bei den baaren Werthen der Lebensrenten aber ist die Abweichung auf so viele Jahre, als seit dem anfänglichen Alter verflossen sind, zurückzuzinsen. Die Abweichung in den baaren Werthen der Lebensrenten ist also zwar der Abweichung in den Zahlen der Lebenden proportional, aber um so größer, je früher sie eintritt. Man erhält hierdurch ein Mittel, aus dem nach einer Mortalitäts-Tabelle berechneten baaren Werthe den für eine andere Tabelle geltenden Werth durch Correkturen zu berechnen, vorausgesetzt immer, daß für das vorliegende Alter die Zahl der Lebenden in beiden Tabellen dieselbe ist. In der nachfolgenden Berechnung des baaren Werthes der Leibrente für eine siebenzigjährige Person sind in den Colonnen a und b die Zahlen der Lebenden angegeben, welche nach Brune resp. mehr oder weniger vorhanden sind, wenn man in jener Tabelle die Zahl der Lebenden im siebenzigsten Lebensjahre ebenfalls gleich 112 setzt. Col. c stehen die dem betreffenden Lebensalter entsprechenden Abzinsungsfaktoren und in den Colonnen d und e die abgezinsten Abweichungen. Die Summe dieser Abweichungen giebt im Mehr 1.1769, im Weniger 0.6252, folglich 0.5517 mehr, welches durch die abgezinste Zahl der 112 Lebenden 5.5812 dividirt, die Correktur 0.0988 ergiebt, die zum baaren Werthe der Lebensrente nach Süßmilch 6.9901 hinzugefügt, für denselben Werth nach Brune 7.089 giebt, während die direkte Berechnung 7.086 finden ließ.

Lebensalter.	Bei 112 anfänglich Lebenden hat Brune mehr	weniger als Süßmilch.	Abzinsungsfaktoren à 4%.	Abgezinste Ueberschüsse.	
	a	b	c	d	e
70	.	.	0.0642	.	.
71	1	—	0.0617	0.0617	—
72	1	—	0.0594	0.0594	—
73	4	—	0.0571	0.2284	—
74	3	—	0.0549	0.1647	—
75	3	—	0.0528	0.1584	—
76	3	—	0.0508	0.1524	—
77	3	—	0.0488	0.1464	—
78	2	—	0.0469	0.0938	—
79	1	—	0.0451	0.0451	—
80	1	—	0.0434	0.0434	—
81	—	2	0.0417	—	0.0834
82	—	—	0.0401	—	—
83	—	1	0.0386	—	0.0386
84	—	1	0.0371	—	0.0371
85	—	2	0.0357	—	0.0714
86	—	2	0.0343	—	0.0686
87	—	2	0.0330	—	0.0660
88	—	2	0.0317	—	0.0634
89	—	2	0.0305	—	0.0610
90	—	1	0.0293	—	0.0293
91	—	1	0.0282	—	0.0282
92	—	1	0.0271	—	0.0271
93	—	1	0.0261	—	0.0261
94	—	1	0.0250	—	0.0250
95	—	—	0.0241	—	—
96	1	—	0.0232	0.0232	—

+ 1.1769 − 0.6252
— 0.6252

+ 0.5517 : 5.5812

+ 0.0988
6.9901

7.089

Beiläufig zeigt sich hier wiederum (vgl. Seite 206), wie genau diese Berechnungen sich den Mortalitäts-Tabellen anschließen, und da nun diese letzteren nur als relativ wahr anzusehen sind, so könnten eine bis zwei Decimalen hinreichend sein (Seite 29). Geht man gleichwohl bis vier Decimalen, so geschieht dieses nur, um einem praktischen Bedürfnisse Genüge zu leisten. Jeder Rechner hat nämlich am Schlusse seiner Arbeit die gefundenen Beträge in gemünztes Geld überzutragen und da die zu versichernden Einheiten in der Regel nicht allzu klein sind, so ist es nothwendig, von mehr als zwei Decimalen auszugehen, damit auch verschiedene Bearbeiter immer auf dasselbe Resultat kommen.

Aus der

Vergleichung der baaren Werthe der Lebensrenten nach den Mortalitäts-Tabellen von Süßmilch und von Brune bei 4% Zinsen

Lebensalter.	Baare Werthe der Lebensrente nach Süßmilch.	Unterschied im Lebensalter.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Lebensrente nach Brune.	Lebensalter.	Baare Werthe der Lebensrente nach Süßmilch.	Unterschied im Lebensalter.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Lebensrente nach Brune.
	a	b	b′	c		a	b	b′	c
21	17.642	9	4.9	18.509	43	13.495	7		15.421
22	17.487	9	5.5	18.457	44	13.257	7		15.178
23	17.327	9	6.1	18.391	45	13.011	7	14.7	14.924
24	17.160	10	6.7	18.312	46	12.755	6	15.0	14.660
25	16.987	10	7.3	18.221	47	12.527	6	14.9	14.389
26	16.807	10	7.9	18.120	48	12.291	6		14.109
27	16.619	10	8.4	18.012	49	12.048	6		13.820
28	16.424	10	9.0	17.898	50	11.796	5		13.521
29	16.257	10	9.4	17.781	51	11.575	5		13.215
30	16.085	10	9.8	17.658	52	11.349	5		12.901
31	15.905	10	10.2	17.530	53	11.118	5		12.581
32	15.719	10	10.7	17.397	54	10.881	4	12.6	12.256
33	15.526	10	11.2	17.257	55	10.639	4	12.1	11.930
34	15.326	9	11.7	17.112	56	10.392	4	11.7	11.606
35	15.117	9	12.2	16.960	57	10.138	4	11.3	11.282
36	14.938	9	12.5	16.800	58	9.879	3	10.9	10.960
37	14.752	9	12.8	16.633	59	9.614	3	10.6	10.637
38	14.560	8	13.0	16.458	60	9.342	3	10.3	10.308
39	14.362	8	13.3	16.274	61	9.064	3	9.7	9.947
40	14.156	8	13.6	16.080	62				9.637
41	13.944	8	13.8	15.873	63				9.295
42	13.723	7		15.654	64				8.953

ergiebt sich, daß, nach Lebensjahren genommen, die baaren Werthe der Lebensrenten noch weiter aus einander liegen, als die mittleren Lebensdauern (S. 171). Der Unterschied beträgt nämlich

vom	21sten	bis	24sten	Lebensjahre	....	9 Jahr
"	25sten	"	33sten	"	....	10 "
"	34sten	"	37sten	"	....	9 "
"	38sten	"	40sten	"	....	8 "
"	41sten	"	45sten	"	....	7 "
"	46sten	"	49sten	"	....	6 "
"	50sten	"	53sten	"	....	5 "
"	54sten	"	57sten	"	....	4 "
"	58sten	"	—	"	....	3 "

also regelmäßig vom vierunddreißigsten Lebensjahre an gerechnet, für je vier Lebensjahre ein Jahr weniger.

Dagegen zeigen sich die Abweichungen nach Prozenten sehr unregelmäßig und läßt sich nur so viel sagen, daß dieselben beim einundzwanzigsten Lebensjahre mit 5°/₀ anfangen, bis zum sechsundvierzigsten Lebensjahre auf 15°/₀, also durchschnittlich jährlich 0.4°/₀ steigen, und von da ab bis zum einundsechzigsten Lebensjahre bis 9.7 herabsinken, was wiederum mit jährlich 0.35 veranschlagt werden kann. Zieht man noch die baaren Werthe der Lebensrenten nach Süßmilch zu 4½°/₀ und 3°/₀ hinzu, so findet man, daß die Werthe nach Brune zu 4°/₀ übertroffen werden von denen nach Süßmilch zu 3½°/₀ bis zum vierundzwanzigsten, und von denen zu 3°/₀ bis zum fünfunddreißigsten Lebensjahre, während von da ab nach der hier folgenden Uebersicht

Lebensalter.	Baare Werthe der Leibrente nach Süßmilch.	Unterschied.	Baare Werthe der Leibrente nach Brune.	Lebensalter.	Baare Werthe der Leibrente nach Süßmilch.	Unterschied.	Baare Werthe der Leibrente nach Brune.
	a	b	c		a	b	c
36	16.753	0	16.800	48	13.461	2	14.109
37	16.513	1	16.633	49	13.169	2	13.820
38	16.267	1	16.458	50	12.868	2	13.521
39	16.014	1	16.274	51	12.602	2	13.215
40	15.754	2	16.080	52	12.331	2	12.901
41	15.486	2	15.873	53	12.056	2	12.581
42	15.211	2	15.654	54	11.776	2	12.256
43	14.928	2	15.421	55	11.491	1	11.930
44	14.636	2	15.178	56	11.201	1	11.606
45	14.335	2	14.924	57	10.906	1	11.282
46	14.025	2	14.660	58	10.606	1	10.960
47	13.747	2	14.389	59	10.301	1	10.637

die baaren Werthe nach Süßmilch zwischen dem vierzigsten und vierundfunfzigsten Lebensjahre um 2, sonst aber nur um 1 Jahr vorausschreiten. Der Unterschied zwischen der größten Abweichung unter den baaren Werthen der Lebensrenten kommt also ungefähr einem Schwanken des Zinsfußes von einem Prozent gleich, ein Ereigniß, das im Laufe eines Jahrhunderts mehrere Male einzutreten pflegt, und sind hierauf die Aeußerungen über die Unsicherheit der Mortalitäts-Tabellen für Versicherungsanstalten einzuschränken (Seite 137). Ist man nach den bis jetzt vorliegenden Erfahrungen berechtigt, die Brune'sche Mortalitäts-Tabelle für Frauen als normal anzusehen, so ergiebt sich daraus, daß man die baaren Werthe der Einnahmen und in Folge dessen auch die der Sterbethaler, also alle Berechnungen für Sterbekassen gefahrlos nach der Süßmilch'schen Mortalitäts-Tabelle und einem der Lokalität angepaßten Zinsfuß berechnen kann und bei einer einigermaßen starken Betheiligung nicht einmal nöthig hat, etwas auf das Risiko zu veranschlagen (Seite 230).

Wir haben nun zunächst die baaren Werthe der Leibrenten, welche nach der strengen Berechnung gefunden worden sind, mit denen zusammenzustellen, die man nach derselben Mortalitäts-Tabelle bei gleichem Zinsfuße als Zeitrente (Seite 172) findet, werden indeß dabei genauer verfahren, als es am angeführten Orte der größern Deutlichkeit wegen geschehen, indem wir auch die Bruchtheile in den Angaben der mittleren Lebensdauern berücksichtigen. Denn ist z. B. die mittlere Lebensdauer einer funfzigjährigen Person 16.46, so heißt dieses so viel, daß 100 solcher Personen nicht 1600, sondern 1646 Jahre durchleben werden, und also auf mehrere derselben, außer den durchschnittlichen sechzehn, noch eine siebzehnte Zahlung kommen kann. Wir wenden demnach die Interpolation an und berechnen den baaren Werth der Leibrente einer funfzigjährigen Person, bei 3% z. B.

$$12.938 + 0.46 \times (13.561 - 12.938) = 13.205.$$

Auf diese Art erhält man folgende

Vergleichung der baaren Werthe der Lebensrenten mit den, den mittleren Lebensdauern entsprechenden Zeitrenten,

Lebensalter.	Mittlere Lebensdauern.	Baare Werthe der Zeitrenten à 3%.	Baare Werthe der Lebensrenten à 3%.	Unterschiede in Prozenten.	Baare Werthe der Zeitrenten à $3\frac{1}{2}$%.	Baare Werthe der Lebensrenten à $3\frac{1}{2}$%.	Unterschiede in Prozenten.	Baare Werthe der Zeitrenten à 4%.	Baare Werthe der Lebensrenten à 4%.	Unterschiede in Prozenten.
		a	b	c	d	e	f	g	h	i
20	35.03	22.143	20.541	— 7.8	20.710	19.077	— 8.6	19.419	17.790	— 9.2
25	31.78	20.912	19.442	— 7.6	19.646	18.140	— 8.3	18.523	16.987	— 9.1
30	27.96	19.306	18.244	— 5.8	18.269	17.103	— 6.8	17.316	16.085	— 8.0
35	24.92	17.897	16.987	— 5.4	17.023	16.003	— 6.3	16.216	15.117	— 7.3
40	22.06	16.446	15.754	— 3.9	15.726	14.916	— 5.5	15.054	14.156	— 6.3
45	19.12	14.822	14.335	— 3.4	14.252	13.643	— 4.5	13.716	13.011	— 5.4
50	16.46	13.205	12.868	— 2.6	12.787	12.310	— 3.9	12.364	11.796	— 4.8
55	14.01	11.642	11.491	— 1.3	11.309	11.050	— 2.4	10.992	10.639	— 3.3
60	11.58	9.949	9.990	+ 0.4	9.714	9.656	— 0.7	9.487	9.342	— 1.5
65	9.88	8.694	8.533	— 1.9	8.520	8.286	— 2.6	8.351	8.053	— 3.6
70	8.18	7.158	7.347	+ 1.1	7.252	7.164	— 1.1	7.134	6.990	— 2.0
75	6.76	6.217	6.318	+ 1.6	6.134	6.185	+ 0.8	6.052	6.058	— 0.1
80	5.53	5.174	5.385	+ 3.9	5.119	5.292	+ 3.3	5.012	5.202	+ 1.7
85	4.32	4.113	4.437	+ 7.3	4.081	4.379	+ 6.8	4.052	4.322	+ 6.3
90	3.00	2.913	3.335	+ 12.9	2.900	3.309	+ 12.4	3.886	3.284	+ 12.1

aus welcher man sieht, daß für denselben Zinsfuß die Zeitrenten im Allgemeinen größer ausfallen, als die Lebensrenten, sowohl nach Prozenten, wie absolut genommen; daß die Unterschiede für die jüngeren Alter am größten sind, nach und nach (mit Ausnahme des Alters um fünfundsechzig Jahr) abnehmen, bis für die höchsten Alter die Zeitrenten unter die Leibrenten zu stehen kommen, so wie endlich, daß diese Unterschiede mit dem Zinsfuße zunehmen, und zwar nahebei von 3% auf $3\frac{1}{2}$% eben so viel wie von $3\frac{1}{2}$% auf 4%. Der Grund aller dieser Erscheinungen ist (Seite 174) bereits angegeben. Der Techniker hat aber darauf Rücksicht zu nehmen, wenn er es, um allgemeiner verständlich zu sein oder eines selten vorkommenden Zinsfußes wegen, einmal vorziehen sollte, bei seinen Arbeiten die baaren Werthe aus den mittleren Lebensdauern zu berechnen; denn jene Abweichungen sind, wie man sieht, für die jüngeren Alter groß genug, um Irrthümer zu veranlassen.

Um schließlich noch beurtheilen zu können, auf welchen Grad der Genauigkeit zu rechnen sei, wenn man statt der baaren Werthe der Lebensrenten für jedes einzelne Alter den für das Durchschnittsalter in Rechnung setzt, ist die nachstehende

Berechnung der Durchschnitte für die baaren Werthe der Lebensrenten

Lebensalter.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Durchschnittswerthe fünfjährige.	Durchschnittswerthe fünfzehnjährige.	Lebensalter.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Durchschnittswerthe fünfjährige.	Durchschnittswerthe fünfzehnjährige.
	a	b	c		a	b	c
21	17.6417			51	11.5752		
22	17.4872			52	11.3492		
23	17.3268	17.3206		53	11.1180	11.1127	
24	17.1601			54	10.8815		
25	16.9870			55	10.6394		
	86.6028				55.5633		
26	16.8068			56	10.3918		
27	16.6193			57	10.1384		
28	16.4242	16.4385	16.4260	58	9.8790	9.8730	9.8466
29	16.2575			59	9.6137		
30	16.0847			60	9.3422		
	82.1925				49.3651		
31	15.9055			61	9.0643		
32	15.7195			62	8.7800		
33	15.5265	15.5190		63	8.5358	8.5452	
34	15.3260			64	8.2929		
35	15.1175			65	8.0528		
	77.5950	49.2781			42.7258	29.5309	
36	14.9379			66	7.8175		
37	14.7523			67	7.5895		
38	14.5604	14.5538		68	7.3722	7.3879	
39	14.3619			69	7.1703		
40	14.1565			70	6.9901		
	72.7690				36.9396		
41	13.9437			71	6.7740		
42	13.7233			72	6.5799		
43	13.4946	13.4859	13.4358	73	6.4176	6.4098	6.4247
44	13.2572			74	6.2197		
45	13.0108			75	6.0578		
	67.4296				32.0490		
46	12.7546			76	5.8541		
47	12.5266			77	5.6907		
48	12.2912	12.2676		78	5.4757		
49	12.0108			79	5.3043		
50	11.7546			80	5.0578		
	61.3378	40.3073			27.3826	19.2742	

angefertigt. Nimmt man nämlich die Unterschiede zwischen den baaren Werthen der Renten je zweier auf einander folgenden Lebensalter, so sieht man zwar,

daß diese Unterschiede bis um das sechzigste Lebensjahr herum größer und von da ab wieder kleiner werden, um etwa vom achtzigsten Lebensjahre ab abermals zuzunehmen; indeß geschieht dieses so sprungweise, daß man hieraus nichts zu schließen vermag. Nimmt man dagegen zuvörderst von den in Col. a stehenden baaren Werthen der Lebensrenten vom Alter einundzwanzig an die Durchschnitte von fünf und fünf auf einander folgenden Jahren, Col. b, und vergleicht dieselben mit den entsprechenden baaren Werthen für die durchschnittlichen Lebensalter, so sieht man, daß diese Lebensalter bis zum sechzigsten Lebensjahre, mit alleiniger Ausnahme des Quinquenniums von sechsundzwanzig bis dreißig, etwas größere, über das sechzigste Lebensjahr hinaus dagegen etwas kleinere Werthe liefern, als die durchschnittlichen baaren Werthe der Lebensrenten für die einzelnen Alter, daß aber die Abweichungen von einander nirgend zwei volle Hundertstel betragen, also diese Quinquinaldurchschnitte überall mit voller Sicherheit angewendet werden können. — Nimmt man ferner die Durchschnitte von funfzehn auf einander folgenden Jahren, so sieht man, daß auch hier die größte Abweichung für die Periode sechsunddreißig bis funfzig noch nicht sechs Einheiten der zweiten Decimale, oder 4.4 pro mille zu Gunsten des Durchschnittsalters beträgt, man also auch hier noch auf Resultate zu rechnen hat, die für die Praxis hinreichende Genauigkeit darbieten.

Um weiter fortzuschreiten, habe ich in der

Berechnung für verschiedene Verbindungen der Durchschnittswerthe

Faktoren.	Lebensjahre.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Faktoren.	Lebensjahre.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Faktoren.	Lebensjahre.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Faktoren.	Lebensjahre.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Faktoren.	Lebensjahre.	Baare Werthe der Lebensrenten.
a	b	c	a'	b'	c'	a''	b''	c''	a'''	b'''	c'''	a^{IV}	b^{IV}	c^{IV}
1	28	16.4260	1	28	16.4260	4	112	65.7040	1	28	16.4260	27	756	443.5020
1	43	13.4358	2	86	26.8716	3	129	40.3074	3	129	40.3074	9	387	120.9222
1	58	9.8470	3	174	29.5410	2	116	19.6940	9	522	88.6230	3	174	29.5410
1	73	6.4247	4	292	25.6988	1	73	6.4247	27	1971	173.4669	1	73	6.4247
4	202	46.1335	10	580	98.5374	10	430	132.1301	40	2650	318.8233	40	1390	600.3899
	50.5	11.5334 gegen 11.6442		58.0	9.8537 gegen 9.8790		43.0	13.2130 gegen 13.4946		66.2	7.9706 gegen 7.7719		34.7	15.0097 gegen 15.1801
		+ 1.0 °/₀			+ 0.3 °/₀			+ 2.1 °/₀			− 2.6 °/₀			+ 1.1 °/₀

aus denselben zuerst in den Colonnen a bis c ganz einfach die Durchschnitte genommen und finde eine Abweichung von 1.0 °/₀ zu Gunsten des Durchschnittsalters. In den Colonnen a' bis c' sind die vier Werthe resp. mit 1, 2, 3 und 4 und in den Colonnen a'' bis c'' mit denselben in umgekehrter Reihen-

folge multiplicirt worden, und auch hier beträgt die Abweichung zu Gunsten des Durchschnittsalters nur resp. 0.3% und 2.1%. Endlich sind die Durchschnitte in den Colonnen a''' bis c''' resp. mit den Zahlen 1, 3, 27 und 81 und in den Colonnen a'''' bis c'''' mit denselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge multiplicirt worden und ergeben sich die Abweichungen nach den Durchschnittsaltern zu — 2.6% resp. + 1.1%. Aus diesem allen geht hervor, *daß man sich überall da, wo es nicht gerade auf Berechnung ganz genauer Tarife abgesehen ist, der baaren Werthe der Lebensrenten, welche dem Durchschnittsalter entsprechen, mit hinreichender praktischer Sicherheit bedienen könne.*

Stellt man die baaren Werthe der Sterbethaler neben einander, so ergiebt die

Vergleichung der baaren Werthe der Sterbethaler nach Süßmilch

Lebensalter.	Baare Werthe der Sterbethaler. 3 Prozent.	Unterschied nach Jahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Sterbethaler. 3½ Prozent.	Unterschied nach Jahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Sterbethaler. 4 Prozent.	Lebensalter.	Baare Werthe der Sterbethaler. 3 Prozent.	Unterschied nach Jahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Sterbethaler. 3½ Prozent.	Unterschied nach Jahren.	Unterschied in Prozenten.	Baare Werthe der Sterbethaler. 4 Prozent.
	a	b	b'	c	d	d'	e		a	b	b'	c	d	d'	e
21	0.4200	7	12.2	0.3734	6	11.7	0.3343	41	0.5654	5	8.4	0.5213	4	8.1	0.4823
22	4264	7		3797	6		3405	42	5737	5		5299	4		4911
23	4329	7		3863	6		3469	43	5822	5		5388	4		5002
24	4397	6		3931	6		3536	44	5909	5		5480	4		5097
25	4467	6		4001	6		3605	45	6000	5		5575	4		5196
26	4539	6	11.3	4074	5	10.8	3677	46	6093	5	7.4	5673	4	7.1	5298
27	4614	6		4149	5		3752	47	6176	5		5761	4		5389
28	4691	6		4227	5		3830	48	6262	5		5852	4		5484
29	4758	6		4294	5		3897	49	6349	5		5945	4		5581
30	4827	6		4364	5		3966	50	6440	5		6040	4		5682
31	4898	6	10.4	4436	5	9.8	4038	51	6519	4	6.4	6126	4	6.2	5770
32	4971	6		4510	5		4112	52	6601	4		6213	4		5860
33	5046	6		4587	5		4189	53	6683	4		6301	4		5953
34	5124	6		4667	5		4270	54	6767	4		6391	4		6047
35	5204	6		4749	5		4353	55	6853	4		6483	3		6144
36	5274	6	9.4	4820	5	8.9	4425	56	6940	4	5.5	6576	3	5.3	6243
37	5346	6		4894	5		4499	57	7028	4		6672	3		6345
38	5420	5		4970	4		4576	58	7118	3		6769	3		6448
39	5496	5		5048	4		4655	59	7210	3		6869	3		6555
40	0.5574	5		0.5129	4		0.4737	60	0.7303	3		0.6970	3		0.6663

1) Daß der Unterschied derselben beim Fallen des Zinsfußes

	von 4 % auf 3½ %	von 3½ % auf 3 %
7 Lebensjahre beträgt:	....	vom 21sten bis 23sten Lebensjahre
6 „ „	vom 21sten bis 25sten Lebensjahre	„ 24sten „ 37sten „
5 „ „	„ 26sten „ 37sten „	„ 38sten „ 50sten „
4 „ „	„ 38sten „ 54sten „	„ 51sten „ 57sten „
3 „ „	„ 55sten „ —sten „	„ 58sten „ —sten „

2) Daß der Unterschied in Prozenten der kleineren Werthe beim einundzwanzigsten Lebensjahre resp. mit 11.7 und 12.2 beginnt und mit jedem Jahre durchschnittlich um 0.2 fällt, so daß man in der Praxis 12 % beim einundzwanzigsten Lebensjahre voraussetzen kann, und so beim sechsundfunfzigsten Lebensjahre auf 5 % käme, was von resp. 5.5 % und 5.3 % nur um ein Geringes abweicht.

Aus der nachfolgenden

Vergleichung der baaren Werthe der Sterbethaler nach den Mortalitäts-Tabellen von Brune und von Süßmilch bei 4 % Zinsen

Lebensjahre.	Baare Werthe der Sterbethaler nach Süßmilch.	Unterschiede		Baare Werthe der Sterbethaler nach Brune.	Lebensjahre.	Baare Werthe der Sterbethaler nach Süßmilch.	Unterschiede		Baare Werthe der Sterbethaler nach Brune.
		in Jahren.	in Prozenten.				in Jahren.	in Prozenten.	
	a			b		a			b
21	0.3343	9	11.6	0.2996	43	0.5002	8		0.4232
22	3405	9		3017	44	5097	7		4329
23	3469	9		3044	45	5196	7		4430
24	3536	10		3075	46	5298	7	16.8	4536
25	3605	10		3112	47	5389	6		4644
26	3677	10	13.5	3152	48	5484	6		4756
27	3752	10		3195	49	5581	6		4872
28	3830	10		3241	50	5682	5		4992
29	3897	10		3288	51	5770	5	12.8	5114
30	3966	10		3337	52	5860	5		5240
31	4038	10	16.5	3388	53	5953	5		5368
32	4112	10		3441	54	6047	4		5498
33	4189	10		3497	55	6144	4		5628
34	4270	9	20.1	3555	56	6243	3	8.7	5758
35	4353	9	20.4	3616	57	6345	3		5883
36	4425	9	20.3	3680	58	6448	3		6016
37	4499	9		3747	59	6555	3		6145
38	4576	8		3817	60	0.6663	3	4.5	6377
39	4655	8		3890	61				6410
40	4737	8		3968	62				6545
41	4823	8	19.1	4051	63				0.6682
42	0.4911	8		0.4138					

ergiebt sich, daß der Unterschied beträgt:

vom 21sten	bis	23sten	Lebensjahre:	9	Jahr
„	24sten	„	33sten	„	10	„
„	34sten	„	37sten	„	9	„
„	38sten	„	43sten	„	8	„
„	44sten	„	46sten	„	7	„
„	47sten	„	49sten	„	6	„
„	50sten	„	53sten	„	5	„
„	54sten	„	55sten	„	4	„
„	56sten	„	—	„	3	„

so daß zwischen dem einundzwanzigsten und vierundzwanzigsten Lebensjahre die Abweichungen in Jahren bei den baaren Werthen der Sterbethaler genau mit denen bei den baaren Werthen der Lebensrenten übereinstimmen, über das vierzigste Lebensjahr hinaus jene Abweichungen aber noch etwas größer bleiben, als diese. Nach Prozenten der kleineren Werthe berechnet, stellen sich aber die Unterschiede zwischen den baaren Werthen der Sterbethaler noch viel größer heraus, als die der Lebensrenten, indem sie beim einundzwanzigsten Lebensjahre mit 11.6% anfangen und bis zum fünfunddreißigsten auf 20.4% steigen, von da ab aber wiederum bis zum sechzigsten Lebensjahre auf 4.5% fallen.

Läßt man dagegen den Zinsfuß von 4% auf 5% steigen, so verringern sich die baaren Werthe der Sterbethaler nach Süßmilch dergestalt, daß sie nur zwischen dem dreiunddreißigsten und funfzigsten Lebensjahre um ein Jahr größer bleiben, als die entsprechenden baaren Werthe nach Brune, so daß auch hierfür die Abweichung zwischen den extremsten Mortalitäts-Tabellen kaum dem Schwanken des Zinsfußes um ein Prozent gleich kommt. Bei der

Vergleichung der baaren Werthe der Sterbethaler mit den nach den mittleren Lebensdauern berechneten baaren Werthen

Lebensalter.	Corrigirte mittlere Lebensdauer.	Baare Werthe der Sterbethaler à 3 Prozent			Baare Werthe der Sterbethaler à 3½ Prozent.			Baare Werthe der Sterbethaler à 4 Prozent.		
		nach der mittleren Lebensdauer berechnet.	richtige.	Unterschiede in Prozenten.	nach der mittleren Lebensdauer berechnet.	richtige.	Unterschiede in Prozenten.	nach der mittleren Lebensdauer berechnet.	richtige.	Unterschiede in Prozenten.
	a	b	c	d	b′	c′	d′	b″	c″	d″
21	34.39	0.3619	0.4200	13.8	0.3064	0.3734	17.9	0.2596	0.3343	22.3
26	31.12	3986	4539	12.2	3428	4074	15.8	2951	3677	19.8
31	27.96	4376	4898	10.7	3823	4436	13.8	3340	4038	17.3
36	24.92	4788	5274	9.2	4243	4820	12.0	3764	4425	14.9
41	22.06	5210	5654	7.9	4682	5213	10.2	4210	4823	12.7
46	19.12	5683	6093	6.7	5180	5673	8.7	4724	5298	10.8
51	16.46	6148	6519	5.7	5677	6126	7.3	5245	5770	9.1
56	14.01	0.6609	0.6940	4.8	0.6176	0.6576	6.1	0.5773	0.6243	7.5

ist wiederum die Interpolation angewandt worden. Da z. B. die corrigirte

mittlere Lebensdauer einer einundzwanzigjährigen Person 34.39, so ist nach dem Zinsfuß von 3% der baare Werth des Sterbethalers

$$0.3770 - 0.39 \times (0.3770 - 0.3660) = 0.3619$$

und sieht man aus dieser Vergleichung, daß auch hier die Unterschiede zwischen den direkt berechneten und den durch Annäherung gefundenen Werthen mit dem Zinsfuße zunehmen und so groß ausfallen, daß man auch nicht einmal annähernd richtige Resultate erhält und also mit solchen Werthen eigentlich gar nicht gearbeitet werden sollte.

Aus der Seite 181 angegebenen Beziehung zwischen den entsprechenden baaren Werthen der Lebensrenten und der Sterbethaler folgt unmittelbar, daß bei Durchschnittsrechnungen die Abweichungen zwischen den baaren Werthen der Sterbethaler den Jahreszinsen der Abweichungen zwischen den baaren Werthen der Lebensrenten gleich sein werden, jedoch im entgegengesetzten Sinne, so daß, wenn die durchschnittliche Lebensrente zu groß ist, der durchschnittliche Sterbethaler zu klein sein wird und umgekehrt. Das Verhältniß zwischen den Abweichungen und den richtigen Werthen ist also von der absoluten Größe der ersteren unabhängig. Ersteres Verhältniß läßt sich durch 1, dividirt durch den baaren Werth der Lebensrente und letzteres durch die Jahreszinsen von 1, dividirt durch die Differenz aus dem um die Jahreszinsen erhöhten 1 weniger den Jahreszinsen der Lebensrente ausdrücken. Soll demnach das erstere Verhältniß größer, gleich oder kleiner als das letztere sein, so muß die genannte Differenz kleiner, gleich oder größer als die Jahreszinsen der Lebensrente, d. i. das um die Jahreszinsen erhöhte 1 kleiner, gleich oder größer als die doppelten Jahreszinsen der Lebensrente, oder endlich die Lebensrente größer, gleich oder kleiner als das um die Jahreszinsen erhöhte 1, dividirt durch die doppelten Jahreszinsen sein. Es wird demnach die verhältnißmäßige Abweichung zwischen den baaren Werthen der Lebensrenten kleiner sein, als die zwischen den baaren Werthen der Sterbethaler, so lange

bei 3% die Lebensrente größer als

$\frac{1.03}{2 \times 0.03} = 17.1667$, d. i. bis zum 34sten Lebensjahre,

bei 3½% die Lebensrente größer als

$\frac{1.035}{2 \times 0.035} = 14.7857$, d. i. bis zum 40sten Lebensjahre,

bei 4% die Lebensrente größer als

$\frac{1.04}{2 \times 0.04} = 13.0000$, d. i. bis zum 45sten Lebensjahre,

während sich über diese Alter hinaus das Sachverhältniß umkehren wird.

So ergab z. B. die vorhergehende Rechnung den durchschnittlichen baaren Werth der Lebensrente einer dreiundzwanzigjährigen Person 17.3206, während der richtige Werth 17.3268 war, so daß die Abweichung 0.0062 zu wenig und

das Verhältniß 0.0358 % beträgt. Demzufolge wird man für den durchschnittlichen baaren Werth des Sterbethalers 1.04 — 0.04 × 17.3206 = 0.3472 statt 0.3469 finden, so daß die Abweichung 0.0003 zu viel beträgt und das Verhältniß 0.0865 % ist. Ferner war der durchschnittliche baare Werth der Lebensrente einer dreiundsiebenzigjährigen Person 6.4098, der richtige 6.4176, Abweichung 0.0078 oder 0.121 % zu wenig, so daß der durchschnittliche Werth des Sterbethalers 1.04 — 0.04 × 6.4098 = 0.7836, statt 0.7833, d. i. eine Abweichung von 0.0383 % zu viel stattfindet. Aus dem Gesagten folgt unmittelbar, daß zwar die durchschnittlichen baaren Werthe der Sterbethaler einen entgegengesetzten Gang von denen der Lebensrenten nehmen, die Abweichungen von den wahren Werthen aber immer noch so klein bleiben, daß sich eine Durchschnittsrechnung mit Sicherheit anwenden läßt.

Der baare Werth der Lebensrente einer fünfundneunzigjährigen Person, so wie der jeder Verbindungsrente zweier oder mehrerer Personen, wobei eine fünfundneunzigjährige Antheil nimmt, ist immer 1, weil noch im Laufe dieses Jahres die Person zu leben aufhört und also auch die Verbindung getrennt wird. Nach der Seite 245 mitgetheilten Rechnungsmethode ist demnach, bei 4 % Zinsen, der baare Werth

der Lebensrente einer vierundneunzigjährigen Person:

$$\tfrac{1}{2} \times (2 + \tfrac{1}{1.04}) = \tfrac{1}{2} \times 2.9615 = 1.4808$$

der Verbindungsrente zweier vierundneunzigjähriger Personen:

$$\tfrac{1}{4} \times (4 + \tfrac{1}{1.04}) = \tfrac{1}{4} \times 4.9615 = 1.2404$$

der Verbindungsrente einer vierundneunzigjährigen und einer neunundachtzigjährigen Person aber

$$\tfrac{1}{12} \times (12 + \tfrac{5}{1.04}) = \tfrac{1}{12} \times 16.8075 = 1.4006.$$

Setzt man diese Rechnung rückwärts schreitend fort, so sieht man, daß die Lebensrenten immer rascher wachsen werden, als die Verbindungsrenten, und diese wieder um so rascher, desto größer der Altersunterschied zwischen beiden verbundenen Personen ist. Wie dieses in der Natur der Sache liegt, so ergiebt sich daraus, weßhalb der Gang, den die Verbindungsrenten nehmen, unter sich und von den Lebensrenten ein sehr abweichender und das gegenseitige Verhalten dieser Renten von neuem zu untersuchen ist.

In der nachfolgenden

Vergleichung der baaren Werthe der Verbindungsrenten nach Süßmilch bei 4%, 3½% und 3%

Lebensalter der einen Person:	Baare Werthe der Verbindungsrenten: Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 0					Baare Werthe der Verbindungsrenten: Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 5					Baare Werthe der Verbindungsrenten: Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 10					Baare Werthe der Verbindungsrenten: Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 15					Baare Werthe der Verbindungsrenten: Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 20				
	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%
	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
21	14.519	5.8	15.353	6.0	16.280																				
26	13.616	5.3	14.339	5.6	15.137	14.044	5.5	14.819	5.8	15.676															
31	12.669	4.9	13.287	5.1	13.964	13.116	5.1	13.783	5.3	14.515	13.497	5.3	14.206	5.5	14.987										
36	11.686	4.5	12.207	4.5	12.770	12.149	4.6	12.713	4.9	13.327	12.542	4.8	13.145	5.0	13.804	12.873	5.0	13.511	5.2	14.210					
41	10.744	4.0	11.172	4.1	11.634	11.184	4.2	11.652	4.4	12.159	11.583	4.4	12.088	4.5	12.636	11.921	4.5	12.457	4.6	13.040	12.203	4.6	12.767	4.8	13.381
46	9.581	3.5	9.918	3.6	10.278	10.120	3.6	10.498	3.9	10.903	10.487	3.9	10.896	4.0	11.337	10.821	4.0	11.258	4.2	11.729	11.101	4.2	11.562	4.3	12.060
51	8.496	3.1	8.756	3.2	9.034	8.995	3.3	9.290	3.4	9.603	9.450	3.5	9.776	3.6	10.124	9.748	3.6	10.097	3.7	10.472	10.020	3.7	10.391	3.8	10.788
56	7.476	2.6	7.672	2.7	7.879	7.939	2.8	8.164	2.9	8.401	8.351	3.0	8.601	3.1	8.866	8.724	3.1	8.997	3.2	9.287	8.956	3.3	9.216	3.3	9.556

sind für die verschiedenen Altersverbindungen die baaren Werthe der Renten, ihrer großen Menge wegen, nur von fünf zu fünf Jahren aufgeführt und ersieht man aus denselben, 1) daß diese Verbindungsrenten für die verschiedenen Zinsfüße einander noch näher liegen, als die Lebensrenten, wovon der Grund bereits Seite 248 angegeben; 2) daß die Differenz bei den baaren Werthen der Verbindungsrenten zweier einundzwanzigjährigen Personen 6.0% beträgt und bei demselben Altersunterschiede von Jahr zu Jahr um ungefähr 0.1% fällt, beim Wachsen des Altersunterschiedes aber und demselben Alter der ältern Person für jede fünf Jahr um etwa 0.15% steigt. Will man nun z. B. wissen, um wieviel die Verbindungsrente

einer sechsundvierzigjährigen und einer sechsundzwanzigjährigen Person steigt, wenn der Zinsfuß um ½% abnimmt, so beträgt dies zuvörderst für zwei sechsundvierzigjährige Personen 6.0 — 2.5 = 3.5, und also würde auf die fragliche Verbindungsrente 3.5 + 0.6 = 4.1 kommen, während die direkte Berechnung resp. 4.2 und 4.3 ergiebt.

Zu der

Vergleichung der baaren Werthe der Verbindungsrenten nach Süßmilch und nach Brune beim Zinsfuße von 4%

Lebensalter der einen Person:	Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist älter, Jahre: 15			Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist älter, Jahre: 10			Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist älter, Jahre: 5			Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 0			Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 5			Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 10			Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 15			Baare Werthe der Verbindungsrenten beim Zinsfuße von 4 Prozent. Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 20		
	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
21	12.873	14.6	15.081	13.497	13.1	15.531	14.044	11.4	15.847	14.519	9.2	15.988												
26	11.921	15.9	14.174	12.542	15.0	14.759	13.116	13.4	15.153	13.616	11.7	15.418	14.044	9.5	15.520									
31	10.821	16.7	12.992	11.582	16.0	13.790	12.149	15.0	14.301	12.669	13.4	14.629	13.116	11.6	14.840	13.497	9.4	14.903						
36	9.748	16.1	11.618	10.487	16.6	12.583	11.184	15.7	13.287	11.686	14.8	13.715	12.149	13.0	13.972	12.542	11.2	14.129	12.873	9.1	14.160			
41	8.724	14.0	10.140	9.450	15.8	11.225	10.120	16.3	12.080	10.744	15.2	12.676	11.184	14.1	13.014	11.583	12.6	13.204	11.921	10.5	13.314	12.202	8.4	13.319
46				8.351	14.3	9.746	8.995	16.9	10.701	9.581	16.1	11.425	10.120	14.9	11.905	10.487	13.7	12.154	10.821	11.8	12.283	11.101	10.1	12.355
51							7.939	14.1	9.220	8.496	15.2	10.023	8.995	15.2	10.604	9.450	13.8	10.967	9.748	12.5	11.137	10.020	10.7	11.216
56										7.476	12.2	8.511	7.939	13.2	9.147	8.351	13.2	9.583	8.724	11.3	9.839	8.956	9.9	9.944

ist zunächst zu bemerken, daß bei den Verbindungsrenten nach Brune zweierlei Mortalitäts-Tabellen, die für Männer und die für Frauen, zu Grunde liegen, weswegen man auch zwischen Frauen die älter und solchen, die jünger sind als ihre Männer, zu unterscheiden hat, was bei einer und derselben Mortalitäts-Tabelle nicht nöthig wäre. Man erhält daher die baaren Werthe

der Lebensrenten so, wie sie sich bis jetzt bei der Königl. allgemeinen Wittwen-verpflegungs-Anstalt ergeben haben und sich der Wahrscheinlichkeit nach auch bei ähnlichen Anstalten herausstellen werden, so daß dieselben zur Vergleichung recht eigentlich geeignet sind. Aus dieser Vergleichung geht nun hervor: 1) daß für dieselben Altersunterschiede der verbundenen Personen die Unterschiede zwischen den baaren Werthen der Verbindungsrenten nach Brune und Süßmilch bis zu einem gewissen Alter wachsen, von da aber wiederum abnehmen, ohne daß sich hierfür eine bestimmte Regel geben ließe; 2) daß für ein und dasselbe Alter der Frauen die Unterschiede zwischen den baaren Werthen der Verbindungsrenten um so größer ausfallen, desto jünger die Männer sind; 3) daß der Unterschied zwischen den baaren Werthen der Verbindungsrenten nach Brune und nach Süßmilch nicht überall durch ein Fallen des Zinsfußes um 1% ausgeglichen wird.

Daß die baaren Werthe der Verbindungsrenten, wenn man dieselben nach der mittlern Verbindungsdauer berechnet, von den richtigen Werthen nach derselben Mortalitäts-Tabelle bedeutend abweichen werden, steht nach dem bereits Gesagten zu erwarten, weshalb hierfür bei der großen Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle nur ein Beispiel gegeben werden soll. Die mittlere Verbindungsdauer einer dreißigjährigen und einer fünfunddreißigjährigen Person ist 19.44, der richtige Werth der Verbindungsrente 12.325. Berechnet man dagegen die letztere nach jener Dauer, so ergiebt sich $13.659 + 0.44 \times (14.134 - 13.659) = 13.868$, oder 12.5% über dem richtigen Werthe.

Aus der nachfolgenden

Berechnung der Verbindungsrenten nach dem Durchschnittsalter bei gleichem Altersunterschiede

Lebensalter der einen Person.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach dem Durchschnittsalter.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach den einzelnen Altern berechnet.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach dem Durchschnittsalter.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach den einzelnen Altern berechnet.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach dem Durchschnittsalter.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach den einzelnen Altern berechnet.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach dem Durchschnittsalter.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach den einzelnen Altern berechnet.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach dem Durchschnittsalter.	Baare Werthe der Verbindungsrenten nach den einzelnen Altern berechnet.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 0		Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 5		Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 10		Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 15		Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre: 20	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
23	14.181	14.174								
28	13.194	13.219	13.662	13.672						
33	12.281	12.272	12.711	12.718	13.128	13.120				
38	11.332	11.325	11.776	11.768	12.160	12.160	12.515	12.508		
43	10.311	10.301	10.785	10.776	11.164	11.154	11.481	11.488	11.791	11.782
48	9.152	9.143	9.688	9.678	10,084	10.076	10.397	10.388	10.655	10.658
53	8.102	8.098	8.583	8.576	9.033	9.026	9.356	9.350	9.606	9.600
58	7.030	7.024	7.515	7.509	7.905	7.897	8.269	8.261	8.520	8.513
		85.556		74.697		63.433		51.995		40.553
		10.694		18.671		10.572		10.399		10.138
		gegen		gegen		gegen		gegen		gegen
		10.846		10.776		10.547		10.388		10.116

ergiebt sich wieder, wie sehr nahe die nach den Durchschnittsaltern genommenen Werthe die den individuellen Altern entsprechenden erreichen, so daß man beim gleichen Altersunterschiede der verbundenen Personen mit Sicherheit die Durchschnittsalter anwenden kann. Dagegen darf dieses Verfahren nicht auf verschiedene Altersunterschiede übertragen werden. Man denke sich nämlich zwei Männer, resp. vom Alter vierzig Jahr und zwanzig Jahr, und zwei Frauen gleicher Alter, so ergiebt dieses nach den Durchschnittsaltern zwei Paare von je dreißig Jahren mit dem baaren Werth der Verbindungsrente 11.852; in der Wirklichkeit können es aber sein 1) zwei Paare von resp. vierzig und zwanzig Jahren, mit dem baaren Werth der Verbindungsrente 12.397, und 2) ein Paar von je vierzig und ein Paar von je zwanzig Jahren mit dem durchschnittlichen baaren Werthe $\frac{14.678 + 10.948}{2} = 12.183$, und sieht man, wie sehr schon diese drei Werthe von einander abweichen.

Die baaren Werthe der Ueberlebensrenten sind nach Seite 196 die Unterschiede zwischen dem baaren Werthe der Lebensrente der überlebenden Person und dem baaren Werthe der Verbindungsrente beider Personen, und da beiderlei Renten ihren verschiedenen Gang gehen, so kommt es, daß für gleiche Altersunterschiede der verbundenen Personen mit dem zunehmenden Lebensalter die baaren

Werthe der Ueberlebensrenten bald mehr oder weniger wachsen, bald mehr oder weniger fallen; sowie, daß man für die Ueberlebensrenten auch bei einer und derselben Mortalitäts-Tabelle zu unterscheiden hat, ob die Frauen jünger oder älter sind, als die Männer. Die

Vergleichung der baaren Werthe der Ueberlebensrenten nach Süßmilch für 4%, 3½% und 3%

Alter der überlebenden Person:	Baare Werthe der Ueberlebensrenten. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 0					Baare Werthe der Ueberlebensrenten. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 5					Baare Werthe der Ueberlebensrenten. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 10					Baare Werthe der Ueberlebensrenten. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 15					Baare Werthe der Ueberlebensrenten. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 20				
	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	4%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%	4%	Unterschiede in Prozenten.	3½%	Unterschiede in Prozenten.	3%
	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
21	3.123	13.6	3.549	14.2	4.051																				
26	3.191	12.6	3.594	13.1	4.065	3.690	12.5	4.150	12.9	4.687															
31	3.236	11.3	3.611	12.5	4.044	3.756	11.4	4.185	11.9	4.680	4.322	11.3	4.810	11.7	5.371										
36	3.252	10.4	3.592	10.9	3.983	3.754	10.4	4.146	10.8	4.594	4.451	10.2	4.903	10.5	5.417	5.190	9.8	5.701	10.2	6.281					
41	3.199	9.6	3.506	9.9	3.853	3.823	9.4	4.181	9.6	4.584	4.494	9.1	4.903	9.4	5.362	5.219	8.9	5.682	9.1	6.199	6.132	8.4	6.648	8.7	7.225
46	3.173	8.6	3.444	8.8	3.746	3.759	8.4	4.072	8.6	4.421	4.403	8.1	4.761	8.4	5.159	5.230	7.8	5.638	8.0	6.087	6.080	7.4	6.529	7.6	7.025
51	3.079	7.6	3.312	7.7	3.568	3.636	7.4	3.904	7.6	4.201	4.375	7.1	4.685	7.3	5.025	5.145	6.8	5.495	6.9	5.875	5.834	6.5	6.211	6.8	6.624
56	2.916	6.6	3.110	6.8	3.322	3.557	6.4	3.784	6.6	4.032	4.241	6.1	4.502	6.3	4.783	4.855	6.0	5.145	6.0	5.451	5.442	5.6	5.749	5.8	6.081

Alter der überlebenden Person:	Die zu überlebende Person ist jünger, Jahre: 5					Die zu überlebende Person ist jünger, Jahre: 10					Die zu überlebende Person ist jünger, Jahre: 15					Die zu überlebende Person ist jünger, Jahre: 20				
26	2.763	12.7	3.114	13.2	3.526															
31	2.789	11.7	3.115	12.1	3.493	2.408	11.9	2.692	12.2	3.021										
36	2.789	10.6	3.086	11.0	3.426	2.396	10.8	2.654	11.1	2.949	2.064	10.9	2.288	11.1	2.543					
41	2.760	9.6	3.026	9.9	3.327	2.361	9.7	2.590	10.1	2.851	2.023	9.8	2.221	10.1	2.446	1.740	9.9	1.912	10.2	2.106
46	2.634	8.7	2.864	8.1	3.122	2.268	8.7	2.466	9.0	2.688	1.934	8.8	2.104	9.1	2.295	1.653	8.9	1.800	9.1	1.964
51	2.580	7.7	2.779	7.1	2.999	2.125	7.9	2.293	8.1	2.478	1.827	7.9	1.971	8.1	2.130	1.555	7.9	1.678	8.1	1.814
56	2.452	6.8	2.618	6.1	2.800	2.010	6.9	2.181	7.1	2.335	1.667	7.1	1.785	7.2	1.914	1.435	7.0	1.536	7.1	1.645

ergiebt nun 1) daß bei dem Schwanken des Zinsfußes um ½% die Unterschiede etwa doppelt so groß sind, als bei den Lebensrenten und den Verbindungsrenten, weswegen auch schon eine merkliche Verschiedenheit der Abweichungen zwischen den 4 und 3½prozentigen baaren Werthen eintritt; 2) daß bei gleichen Altersunterschieden die Abnahme für jede Erhöhung der Alter um 1 Jahr etwa 0.2% beträgt, und daß bei gleichem Alter der Frauen die Unterschiede um so größer ausfallen, je jünger die Männer sind, daß aber hierbei eine solche Regelmäßigkeit wie bei den Verbindungsrenten nicht hervortritt; nur so viel steht fest, daß diese Unterschiede beim Wachsen der Altersunterschiede nicht zu- sondern abnehmen. Die

Vergleichung der baaren Werthe der Ueberlebensrenten nach Süßmilch und nach Brune beim Zinsfuße von 4%

Alter der überlebenden Person:	Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist jünger, Jahre: 15			Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist jünger, Jahre: 10			Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist jünger, Jahre: 5			Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 0			Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 5			Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 10			Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 15			Baare Werthe der Ueberlebensrenten à 4 Prozent. Die zu überlebende Person ist älter, Jahre: 20		
	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.	nach Süßmilch.	Unterschiede in Prozenten.	nach Brune.
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
21										3.123	— 23.9	2.521												
26							2.763	— 21.1	2.273	3.191	— 18.1	2.702	3.690	— 12.5	3.280									
31				2.408	— 20.4	2.000	2.789	— 17.3	2.377	3.236	— 11.5	2.901	3.756	— 5.6	3.558	4.322	+ 0.4	4.326						
36	2.064	— 20.1	1.719	2.396	— 17.4	2.041	2.789	— 11.2	2.500	3.252	— 5.4	3.085	3.754	+ 0.8	3.786	4.451	+ 4.2	4.647	5.190	+ 9.1	5.663			
41	2.023	— 19.1	1.699	2.361	— 13.3	2.083	2.760	— 6.7	2 586	3.199	— 0.1	3.197	3.823	+ 3.7	3.968	4.494	+ 4.8	4.906	5.219	+ 15.8	6.034	6.132	+ 17.0	7.292
46	1.934	— 16.0	1.668	2.268	— 9.2	2.077	2.634	— 2.1	2.581	3.173	+ 1.9	3.235	3.759	+ 7.1	4.056	4.403	+ 11.3	5.077	5.230	+ 19.5	6.248	6.080	+ 22.2	7.441
51	1.827	— 14.4	1.597	2.125	— 6.8	1.990	2.580	— 2.2	2.514	3.079	+ 3.5	3.192	3.636	+ 10.6	4.068	4.375	+ 14.4	5.110	5.145	+ 20.5	6.199	5.834	+ 25.9	7.346
56	1.667	— 13.7	1.466	2.040	— 9.7	1.860	2.452	— 2.2	2.386	2.916	+ 5.7	3.095	3.557	+ 10.5	3.973	4.244	+ 14.8	4.921	4.855	+ 22.4	5.954	5.442	+ 25.3	6.821

ergiebt das merkwürdige Resultat, 1) daß die nach der Süßmilch'schen Mortalitäts-Tabelle berechneten Werthe größer ausfallen, als die nach der von Brune, so lange die Frau älter ist als der Mann, und zwar um so mehr, desto

größer der Altersunterschied, aber um so weniger, desto höher das beiderseitige Alter ist; 2) daß die Ueberlebensrenten nach Süßmilch die nach Brune selbst alsdann noch übertreffen, wenn die Frau eben so alt oder fünf Jahr jünger ist als der Mann, jedoch nur resp. bis zum einundvierzigsten und nach dem einunddreißigsten Lebensjahre der Frau; 3) daß über diese Jahre und Altersunterschiede hinaus die baaren Werthe der Lebensrenten nach Brune größer ausfallen, als die nach Süßmilch, um so mehr, desto höher das beiderseitige Alter der verbundenen Personen und desto größer der Altersunterschied derselben ist; 4) daß das Schwanken des Zinsfußes um 1% die Unterschiede zwischen den baaren Werthen der Ueberlebensrenten nach beiden Mortalitäts-Tabellen mehr als ausgleicht.

Von der Berechnung der baaren Werthe der Ueberlebensrenten nach den mittleren Ueberlebens- und Verbindungsdauern als Zeitrenten kann man keine auch nur annähernd richtige Resultate erwarten, dagegen darf die Berechnung nach Durchschnittsaltern bei gleichen Altersunterschieden mit Sicherheit angewandt werden, weil solches bei den Lebensrenten, so wie bei den Verbindungsrenten gleicher Altersunterschiede geschehen konnte.

Nach dieser Erörterung der Eigenthümlichkeit jeder Sorte von baaren Werthen wende ich mich zu den einzelnen Arten der Versicherungs-Anstalten.

I. Kinder-Versorgungs- und Aussteuer-Kassen.

Die Kinder-Versorgungs-Kassen (caisses paternelles) bezwecken, den bei ihnen betheiligten Kindern nach Erreichung eines vorher bestimmten Alters ein gewisses Kapital auszuzahlen. Kassen dieser Art gehören allerdings nicht zu denen, welche dazu bestimmt sind, den Mitgliedern einem zu befürchtenden Unglücksfall gegenüber den gegenwärtigen Besitzstand mehr oder weniger zu schützen; sie sollen vielmehr erst einen künftigen Besitzstand begründen helfen. Da indessen der Erfolg jener Kassen nach denselben Regeln wie die Versicherungsgeschäfte zu beurtheilen ist, so versage ich ihnen hier um so weniger den Platz, als man sich zu bemühen scheint, derartigen Kassen einen bedeutenden Zuspruch zu verschaffen. Der Unterschied der Kinder-Versorgungs-Kassen von den Sparkassen besteht darin, daß jene auf die während der Expectanz versterbenden Kinder entweder gar nichts oder doch nicht das volle eingezahlte Kapital mit den inzwischen darauf gefallenen Zinsen und Zinseszinsen zurückgewähren, und so für die zur wirklichen Erhebung gelangenden Mitglieder eine Beerbung eintritt, die es ermöglicht, das herauszuzahlende Kapital größer werden zu lassen, als bei einer reinen Sparkasse.

Die Vererbschaftung kann nun zweierlei Art, eine individuelle oder eine generelle sein. Im ersteren Falle beschränkt die Kasse das jedesmalige Geschäft auf die während eines gewissen Zeitraums angemeldeten Kinder gleichen Alters und vertheilt zur verabredeten Zeit die eingezahlten Kapitalien nebst den bedungenen Zinsen und Zinseszinsen unter die alsdann noch am Leben befindlichen Mitglieder, mit oder ohne eine Rückgewähr an die Hinterbliebenen der inzwischen Verstorbenen. Das Versicherungsmoment besteht also in diesem Falle zwischen den Vertretern der Kinder selbst, welches die Kassen nur vermitteln und dabei die Verwaltung des Geldes und seiner Zeit die statutenmäßige Vertheilung übernehmen. Ein Risiko kann demnach für dieselben aus solchem Geschäfte nicht hervorgehen, weshalb für die Geschäftsführung nur fünf Prozent

von den eingezahlten Kapitalien als Provision beansprucht und 3½% Zinsen und Zinseszinsen gewährt zu werden pflegen. Setzt man nun, wie es gewöhnlich geschieht, das einundzwanzigste Lebensjahr als Vertheilungs-Termin fest und läßt z. B. auf 532 zehnjährige Kinder je den Betrag 1 einzahlen, so wächst dieses Kapital in den bevorstehenden eilf Jahren der Exspectanz auf $532 \times (1.035)^{11}$ an und da nun von der angegebenen Zahl von Kindern 486 das einundzwanzigste Lebensjahr erreichen, so wird der Antheil jedes noch lebenden Mitgliedes $\frac{532 \times (1.035)^{11}}{486}$ sein; d. h. man findet den zu erwartenden Antheil jedes zur Hebung gelangenden Mitgliedes, wenn man das von ihm eingezahlte Kapital für die Dauer der Exspectanz aufzinst, diesen künftigen Werth mit der Tabellenzahl der Lebenden beim Aufnahmealter multiplicirt und das Produkt durch die Zahl der Lebenden beim Vertheilungsalter dividirt.

Bei der vorstehenden Bestimmung des wahrscheinlichen Antheils sind indessen die Rückgewähr und die Geschäftsprovision noch nicht in Abzug gebracht. Sehen wir von jener, als wenig gebräuchlich, ab und bringen dagegen die 5% Abzug in Anschlag, so bleibt als zu erwartendes Kapital für das einzelne Mitglied $\frac{19}{20} \times \frac{532 \times (1.035)^{11}}{486}$, und ist es ganz dasselbe, ob die Provision sofort vom eingelegten Kapitale oder von dem fälligen Antheile jedes einzelnen Mitgliedes in den festgesetzten Prozenten in Abzug gebracht wird.

In der nachfolgenden

Berechnung des zu erwartenden Kapitals bei Kinder-Versorgungs-Kassen für den einmaligen Betrag 1

Lebensalter.	Lebende Kinder nach Süßmilch.	Aufzinsungsfaktoren à 3½ Prozent.	Aufgezinste Zahlen der Lebenden.	Fällig werdendes reines Kapital.	Abzug für die Verwaltung mit 5 Prozent.	Auszuzahlender Betrag.	Künftiger Werth des Kapitals bei 3 Prozent.	Gewinn gegen die Sparkasse.	Es gehen leer aus, auf 1000 Mitglieder:	Einzuzahlende Beträge für ältere Kinder gegen neugeborne.
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
0	1000	2.059431	2059.43	4.23751	0.21188	4.0256	1.8603	2.1653	514	1.000
1	750	1.989789	1492.34	3.07066	15353	2.9171	1.8061	1.1110	352	1.380
2	661	1.922501	1270.77	2.61475	13077	2.4840	1.7535	0.7305	265	1.621
3	618	1.857489	1147.93	2.36220	11811	2.2441	1.7024	0.5417	210	1.794
4	593	1.794676	1064.24	2.18980	10949	2.0803	1.6528	0.4275	180	1.935
5	579	1.733986	1003.98	2.06580	10329	1.9625	1.6047	0.3578	160	2.051
6	567	1.675439	949.923	1.95457	09773	1.8568	1.5580	0.2988	143	2.168
7	556	1.618695	899.994	1.85184	09259	1.7593	1.5126	0.2467	126	2.288
8	547	1.563956	855.484	1.76025	08801	1.6722	1.4685	0.2037	112	2.407
9	539	1.511069	814.466	1.67586	08379	1.5921	1.4258	0.1663	98	2.528
10	532	1.459970	776.704	1.59816	07991	1.5182	1.3842	0.1340	86	2.652
11	527	1.410599	743.386	1.52960	07648	1.4531	1.3439	0.1092	78	2.770
12	523	1.362897	712.795	1.46666	07333	1.3933	1.3048	0.0885	71	2.889
13	519	1.316809	683.424	1.40621	07031	1.3359	1.2668	0.0691	64	3.013
14	515	1.272279	655.224	1.34820	06741	1.2808	1.2229	0.0509	56	3.143
15	511	1.229255	628.149	1.29249	06462	1.2279	1.1941	0.0338	49	3.278
16	507	1.187686	602.157	1.23901	06185	1.1772	1.1593	0.0179	41	3.473
17	503	1.147523	577.204	1.18766	05938	1.1283	1.1255	0.0028	34	3.577
18	499	1.108718	553.250	1.13838	05696	1.0815	1.0927	– 0.0112	26	3.722

befinden sich Col. a die Lebenden nach Süßmilch für die Alter von Null bis zu achtzehn Jahren, in Col. b die Aufzinsungsfaktoren zu 3½% für die Dauer der Exspectanz, also vom einundzwanzigsten bis hinauf zum dritten Aufzinsungsfaktor; Col. c enthält die für die Dauer der Exspectanz aufgezinste Zahl der Lebenden, also die Produkte der Zahlen Col. a und b, Col. d die Quotienten dieser Produkte durch die Zahl 486 oder den zu erwartenden reinen Antheil, Col. e stehen die in Abzug zu bringenden 5% und Col. f enthält das zu erwartende Kapital nach vollendetem einundzwanzigsten Lebensjahre für Mitglieder, die bei ihrem Eintritt zwischen Null und achtzehn Jahr alt waren. In Col. g finden sich die Kapitalssummen verzeichnet, die eine reine Sparkasse bei drei Prozent Zinsen und Zinseszinsen und ohne einen besondern Abzug zahlen würde, und endlich steht in Col. h die Differenz der Colonnen f und g, also der Gewinn, den jedes zur Hebung gekommene Mitglied gegenüber der Betheiligung bei der Sparkasse gehabt hätte. Wie man sieht, ist dieser Gewinn für jüngere Kinder nicht unbeträchtlich, indem er für neugeborne das eingezahlte Kapital

noch um das Doppelte übertrifft; mit erhöhtem Aufnahmealter wird er jedoch immer geringer und für achtzehnjährige Individuen geht er sogar schon in Verlust über, weil nun die geringe Sterblichkeit bis zum einundzwanzigsten Lebensjahre und der um ½% höhere Zinsgenuß nicht mehr im Stande sind, die 5% Verwaltungskosten zu decken. Aus diesem Grunde pflegt man das zehnte Lebensjahr als höchstes Aufnahmealter festzusetzen; ich werde jedoch das achtzehnte beibehalten, weil sich bei Festhaltung dieser Annahme alle Consequenzen des Geschäfts um so klarer herausstellen.

Kann man solche Gelder zum Vortheil der Kinder anderweitig zu 3½% benutzen, so würde man für funfzehnjährige Kinder und darüber, und wenn es sogar gelänge, das Kapital zu 4% Zinseszinsen zu verwerthen, so würde man für achtjährige Kinder und darüber durch Selbstbewirthschaftung mehr herausschlagen, ohne alle Furcht vor Verlust durch den zu frühen Tod des Kindes. Col. k steht angegeben, wie viel von 1000 Kindern jedes Beitrittsalters leer ausgehen. Leben z. B. von 618 dreijährigen Kindern nur noch 486, so leben von 1000 noch 790, so daß 210 inzwischen verstorben sind. Man sieht, daß die größte Gefahr zu verlieren da vorwaltet, wo die größte Erwartung auf Gewinn war und daß beide mit einander abnehmen.

Zu bemerken bleibt noch, daß die Zahlen in Col. f mit denen in Col. i in genauer Verbindung stehen, indem die Abnahme der einen Zahl die der andern zur unmittelbaren Folge hat, weil der Werth $\frac{19}{20} \times \frac{532}{486} \times (1.035)^{11}$ nur dann größer werden kann, wenn sich der Bruch $\frac{532}{486}$ vergrößert. Da nun, wie schon Seite 170 bemerkt, die Süßmilch'sche Mortalität gerade für die ersten Lebensperioden aller Wahrscheinlichkeit nach eine zu große ist, so dürften die Col. f angegebenen Werthe so ziemlich die Grenzen dessen ausmachen, was man im Allgemeinen zu erwarten berechtigt ist, während eine Rechnung nach Kersseboom eine brauchbare Durchschnittsberechnung liefern möchte.

Weil es wohl selten der Fall sein dürfte, daß für ein Jahr die gehörige Anzahl Kinder der verschiedenen Aufnahmealter angemeldet werden, so pflegt man alle vorhandene Kinder in eine Klasse zu bringen und sich dafür von den älteren mehr zahlen zu lassen als von den jüngeren, weil so nun jene auch an dem Gewinne, den die überwiegend größere Sterblichkeit der jüngeren Kinder hervorbringt, theilnehmen. Die neugebornen Kinder werden dabei natürlich mit dem Normalbeitrage (beiläufig gesagt 10 Thlr.) als Maaßstab zu Grunde gelegt. Verschafft nun der Beitrag 1 den Neugebornen ein Kapital 40.256, den zehnjährigen Kindern dagegen nur 15.182, so haben diese $\frac{40.256}{15.185} = 2.652$ zu zahlen, um mit den neugebornen Kindern gleiche Ansprüche machen zu können, d. h.: **Es ist das Verhältniß der gegenseitigen Kapitalseinlagen für Kinder verschiedenen Aufnahmealters bei gleichen Anspruchsantheilen gleich dem umgekehrten Verhältniß der verschiedenen**

Anspruchsantheile bei gleicher Kapitalseinzahlung. Col. k enthält nun die Einlagekapitale für ältere Kinder im Verhältniß zu den neugebornen.

Es steht dem nichts im Wege, für ein Kind sowohl in einem und demselben Jahre mehrere Einlagen, als in verschiedenen Jahren verschiedene Einlagen zu machen. Legt man demnach für ein zehnjähriges Kind mehrere Jahre hinter einander je den Betrag 1 ein, so hat ein solches Kind die Aussicht, nach vollendetem einundzwanzigsten Lebensjahre den Antheil 1.3842 + 1.3439 + 1.3048 + ⋯ ausgezahlt zu erhalten. Auf diese Art gelangt man für den Fall der jährlichen einmaligen Pränumerandozahlung, von der Kapitalseinzahlung zur Beitragszahlung, indem man nur nöthig hat, für jedes beliebige Aufnahmealter so viele auf einander folgende Anspruchsantheile zu addiren, als Zahlungen gemacht werden sollen. Setzt man demnach fest, daß nach dem achtzehnten Lebensjahre, als entschieden unvortheilhaft, keine Einzahlungen mehr gemacht werden, so erhält man den Anspruchsantheil für Kinder jeden Alters dadurch, daß man die Zahlen der Col. f von unten auf successive addirt. Verfährt man auf gleiche Weise mit den Zahlen der Col. k, so erhält man den betreffenden Gewinn gegen Einlagen in eine Sparkasse bei 3% Verzinseszinsung. Dieses ist in der nun folgenden

Berechnung des zu erwartenden Kapitals bei Kinderversorgungs-Kassen für den jährlichen Betrag 1

Lebensalter.	Auszuzahlender Betrag.	Gewinn gegen eine Sparkasse bei 3%.	Aeltere Kinder haben zu zahlen gegen neugeborne.	Differenzen der Zahl 34.1902 und der übrigen Zahlen Col. f.	Nachzahlung für ältere Kinder bei gleichem Beitrage mit den Neugebornen.	Einmaliger	Jährlicher
						Beitrag für den versicherten Betrag 1.	
	f	h′	k′	l′	m′	n′	o′
0	34.1902	6.7443	1.000	0.0000	0.000	0.2484	0.0292
1	30.1646	4.5790	1.100	4.1256	1.380	3428	0331
2	27.2475	3.4680	1.292	6.9427	2.795	4026	0367
3	24.7635	2.7375	1.381	9.4267	4.201	4445	0408
4	22.5194	2.1958	1.518	11.6708	5.610	4807	0444
5	20.4391	1.7683	1.673	13.7511	7.007	5096	0489
6	18.4766	1.4105	1.850	15.7136	8.461	5380	0541
7	16.6192	1.1117	2.057	17.5704	9.987	5684	0602
8	14.8605	0.8650	2.301	19.3297	11.559	5980	0673
9	13.1883	0.6613	2.592	21.0019	13.191	6281	0758
10	11.5962	0.4950	2.948	22.5940	14.880	6587	0862
11	10.0780	0.3610	3.392	24.1122	16.594	6882	0992
12	8.6249	0.2518	3.964	25.5653	18.349	7177	1159
13	7.2316	0.1633	4.728	26.9586	20.080	7486	1383
14	5.8959	0.0942	5.800	28.2943	22.091	7808	1696
15	4.6149	0.0433	7.409	29.5753	24.086	8144	2167
16	3.3870	0.0095	10.096	30.8032	26.166	8495	2953
17	2.2098	— 0.0084	15.472	31.9804	28.344	8863	4520
18	1.0815	— 0.0112	32.375	33.1087	30.614	0.9246	0.9246

in Col. f′ und h′ geschehen und sieht man, daß dieser Gewinn schon für siebenzehnjährige Individuen in Verlust übergeht, weil der Gewinn aus dem ersten Jahre der Einzahlung durch den Verlust aus dem zweiten mehr als aufgehoben wird.

Sollen wiederum alle in einem und demselben Jahre angemeldete Kinder eine einzige Klasse ausmachen, so findet man das gegenseitige Verhältniß der bei gleicher Anspruchsberechtigung zu zahlenden Beiträge nach dem Verhältniß der verschiedenen Anspruchsberechtigungen bei gleichen Beiträgen, so daß z. B. zehnjährige Kinder mit neugebornen in einer Klasse nach dem Verhältniß $\frac{34.1902}{11.5962}$ d. h. 2.948 mal so viel als diese jährlich zu zahlen hätten. Col. k′ sind diese Verhältnisse für jedes Alter in Bezug auf die Neugebornen verzeichnet.

Sollen für Kinder jeden Alters trotz derselben Anspruchsberechtigung die jährlichen Beiträge dieselben sein, so kann dieses nur durch Erlegung eines Antrittsgeldes geschehen, das sich mit dem Alter der Kinder erhöht, und von mir demnach in dieser Qualität **Altersausgleichungsgeld** genannt werden wird.

Da nämlich die Neugebornen beim jährlichen Beitrage 1 die Zahlung 34.1902, die zehnjährigen Kinder dagegen nur 11.5962 zu erwarten haben, so bleiben für diese 34.1902 — 11.5962 = 22.5940 durch eine einmalige Abfindung zu decken, Col. l′, was vermittelst der Zahlen Col. f der vorhergehenden Rechnung geschehen kann. Weil nun nach dieser Colonne bei zehnjährigen Kindern z. B. der einmaligen Einlage 1 der Anspruchsantheil 1.5182 entspricht, so wird der zu deckende obige Betrag 1 durch $\frac{22.5940}{1.5182} = 14.880$ auszugleichen sein, wie solches für sämmtliche in Betracht gezogene Alter Col. m′ verzeichnet ist. Die Zahl derjenigen Mitglieder, die wegen früher eintretenden Todes leer ausgehen, sind wiederum die der Col. k der vorhergehenden Rechnung und stehen mit den Zahlen Col. f′ dieser Rechnung in der bereits für die Zahlen der Col. k und f angegebenen Wechselwirkung.

Man sieht, daß die Neugebornen, welche von der Geburt bis zum vollendeten achtzehnten Lebensjahre jährlich den Betrag 1 einzahlen, die Aussicht auf 34.1902 haben. Läßt man daher die Zahlung wirklich noch für die drei nächsten Jahre erfolgen, so erhöht sich dadurch die Erwartung auf

$$34.1902 + \frac{395 \times (1.035)^2}{486} + \frac{391 \times 1.035}{486} + 1 = 37.3269,$$

also für jährlich zehn Thaler auf 373.269 Thlr., welcher Betrag von mir, ich wiederhole es, nach der zu Grunde gelegten Mortalitäts-Tabelle für den größten gehalten wird, der im Allgemeinen zu erwarten steht. Was soll man nun aber davon halten, wenn Versicherungsgesellschaften in ihren Prospekten wollen glauben lassen, daß ein im ersten Lebensjahre eingeschriebenes Kind nach Erreichung des zwanzigsten Jahres

für je 10 Thlr. mindestens 1250 Thlr.

und nach Umständen selbst bedeutend mehr erhalten werde?

Um das völlig Ungereimte einer solchen Behauptung darzuthun, stelle man folgende Betrachtung an. Sollen von 486 Personen jede 373.269 Thlr. bekommen, so gehören dazu 181409 Thlr., und damit diese auf jeden gleichen Theil 1250 Thlr. ergeben, dürften nur 145 Theilnehmer vorhanden sein, d. h. von je 1000 neugebornen Kindern würden nur 145 das einundzwanzigste Lebensjahr vollenden dürfen, ganz abgesehen davon, daß die größere Sterblichkeit während der Dauer der Mitgliedschaft die Anzahl der Beiträge und somit das zur Vertheilung kommende Kapital verringert. So unwahrscheinlich dieses nun auch ist, so läßt sich dennoch das Gegentheil schwerlich direkt darthun, während ein indirekter Beweis leicht auf das evidenteste geführt werden kann. Setzen wir nämlich voraus, obiges Resultat sei richtig, so würden von 1000 neugebornen Knaben und eben so vielen Mädchen je 145 das einundzwanzigste Lebensjahr erreichen. Verheiratheten sich diese nun auch sofort, also noch bevor neue

Todesfälle eingetreten wären, so hätten sie, um die Volkszahl in gleicher Höhe zu erhalten, ihrerseits wiederum 2000 Kinder zu erzeugen, d. h. auf jede Ehe müßten durchschnittlich vierzehn Kinder kommen! — So weit dieses von der Wahrheit entfernt ist, so sehr übertrieben ist obiges Versprechen, wie es sich denn auch bei den französischen Kassen herausgestellt hat, daß ihre Auszahlungen die der Sparkassen nur wenig übersteigen.

Lassen wir bei den Kassen eine generelle Beerbung der inzwischen verstorbenen Kinder eintreten, so ist dieses nur dadurch zu bewirken, daß die Versicherungsvereine nach tauglichen Mortalitäts-Tabellen auf dem vorher betretenen oder einem noch in der Folge anzugebenden Wege den durchschnittlich zu erwartenden Anspruchsantheil berechnen, und diesen ihren Mitgliedern, unabhängig von jedem Zusammengreifen in eine Jahresgesellschaft, unbedingt zusichern. Bei einer derartigen Behandlung erhält das Geschäft wiederum den Charakter einer Versicherung und ist der Verein beim Ausgange mitbetheiligt. Er wird z. B. bei der Beitragszahlung den größten Gewinn davontragen, wenn in der ersten Zeit der Versicherung nur wenige Mitglieder und erst gegen das Ende deren viele sterben, dagegen den größten Nachtheil, wenn in erster Zeit verhältnißmäßig viele, hinterher aber nur wenige sterben. Obgleich sich der Verein hierfür das Risiko zahlen zu lassen hat, so wird er dennoch bei einem Abzuge von fünf Prozent des Kapitals und dem Zinsgewinne ein ganz gutes Geschäft machen, während für die Betheiligten der Vortheil daraus erwächst, daß dieselben bestimmt wissen, wofür sie ihr Geld hingeben, auch nicht Gefahr laufen, die eingezahlten Kapitalien, mit Verlust der Uebersendungs- und der fünf Prozent Verwaltungskosten, wegen nicht in gehöriger Anzahl eingegangener Meldungen zurückgesandt zu erhalten.

Soll demnach ermittelt werden, was die Mitglieder einzuzahlen haben, falls jedes lebende einundzwanzigjährige Mitglied den Betrag 1 ausgezahlt erhält, so ist die Rechnung sehr einfach. Vorausgesetzt nämlich, daß die beiden vorhergehenden Rechnungen nach einer passenden Mortalitäts-Tabelle geführt wären, hätte man nur zu schließen: 1) bei Kapitaleinzahlung: können die zehnjährigen Kinder für eine einmalige Einzahlung 1 den Betrag 1.5182 empfangen, so ist auf sie für den Betrag 1 die Einzahlung $\frac{1}{1.5182} = 0.6587$ zu machen; 2) bei jährlicher Beitragszahlung: entspricht dem Empfange 11.5962 der jährliche Beitrag 1, so wird der Empfang 1 durch eine jährliche Einzahlung $\frac{1}{11.5962} = 0.0862$ gedeckt werden, Col. n′ und o′ der nächstvorhergehenden Rechnung.

Will man für ein dreijähriges Kind ein Kapital von 100 Thlrn., das nach dem vollendeten funfzehnten Lebensjahre ausgezahlt werden soll, falls das Kind dieses Alter erlebt, gegen jährliche Beiträge, welche, im Fall das Kind vorher verstirbt, zurückzugeben sind, (Seite 214), versichern, so ist der baare Werth

dieser Versicherung (Seite 179), beim Zinsfuße von $3\frac{1}{2}\%$, $\frac{32799.1}{565.558}$ und der baare Werth der Rückzahlungen (Seite 215 und 184) $\frac{5425.14 - 3556.78 - 12 \times 124.596}{565.558}$mal, d. i. $\frac{373.210}{565.558}$mal der jährliche Beitrag, dagegen der baare Werth der Einzahlungen, (Seite 179) $\frac{12308.9 - 7107.8}{565.558}$mal, d. h. $\frac{52011.1}{565.558}$mal der jährliche Beitrag. Sollen nun diese Einnahmen jene Ausgaben decken, so muß, abgesehen von den Verwaltungskosten und nach Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners 565.558, der 5201.1. — 373.2malige, d. i. der 4827.9malige Jahresbeitrag dem baaren Werthe 32799.1 gleich, demnach der Jahresbeitrag gleich $\frac{32799.1}{4827.9} = 6.7937$ sein.

Sollen die Verwaltungskosten mit 5 Prozent veranschlagt werden, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Der erstere Fall ist der, in welchem der Versicherer die Verwaltungskosten nicht zurückverlangt, so daß dieselben nur dem gefundenen Betrage zuzuschlagen sind und (Seite 270) denselben in $\frac{20}{19} \times 6.7937$, d. i. 7.1513 übergehen lassen. Werden dagegen die Verwaltungskosten gleichfalls zurückerstattet, so hat man nach dem vorher Gesagten den $\frac{19}{20} \times 52011.1$ — 373.2maligen, d. h. den 4567.8maligen Jahresbeitrag, gleich 32799.1, also jenen Beitrag gleich 7.1804 zu setzen.

Verlangt man die Auszahlung nach zurückgelegtem einundzwanzigsten Lebensjahre nicht sofort, sondern in verschiedenen Raten zu verschiedenen Terminen, falls dieselbe der Anspruchsberechtigte erlebt: so hat man den baaren Werth dieser Auszahlungen in Bezug auf das einundzwanzigste Lebensjahr zu berechnen und die Capitals- oder Beitragszahlungen Col. n′ und o′ demselben proportional zu ändern. Fordert man z. B. für drei hinter einander folgende Jahre je den Betrag 1, so wäre der baare Werth in Bezug auf den ersten Fälligkeitstermin $1 + \frac{481}{486 \times 1.035} + \frac{476}{486 \times (1.035)^2} = 2.8512$ und hiermit die so eben genannten Zahlen zu multipliziren.

Sollen in beiden vorhergehenden Fällen die Beiträge in mehreren Terminalzahlungen während der Dauer eines Jahres gezahlt werden, so thut man am besten, die Rechnung nach baaren Werthen zu führen. Der baare Werth der Rückzahlung ist, mit Aufschlag der Verwaltungskosten, für zehnjährige Kinder $\frac{20}{19} \times \frac{532 \times (1.04)^{11}}{486}$, und den baaren Werth der Einzahlungen findet man nach den für die Berechnung der aufhörenden terminlichen Renten gegebenen Regeln, Seite 205, was hier jedoch auszuführen unterbleibt, weil dergleichen Rechnungen in der Folge für wichtigere Fälle vorkommen werden.

Bisher ist angenommen, daß die Auszahlungen durch Erreichung eines bestimmten Lebensalters des Versicherten bedingt seien und ist hiermit eine relativ sichere Grundlage für die Vorausberechnung gegeben. In neuerer Zeit hat man aber den Versuch gemacht, die Berechtigung zum Empfange des Kapitals von andern unbestimmten und zufälligen Ereignissen, wie z. B. das Heirathen, Etabliren, der Eintritt in den Staatsdienst, Avancement zum Offizier

u. dgl., abhängig zu machen, scheiterte aber daran, daß man bis zur Berechtigung auf einen Theil oder auf das volle ausbedungene Kapital nur eine verhältnißmäßig kurze Probezeit festsetzte (Seite 52) und so die Mitglieder durch den Gegensatz zwischen der Empfangnahme des Kapitals und dem fortwährenden Zahlen von Beiträgen, die auf die fernere Erhöhung jenes Kapitals ohne Einfluß waren, dahin brachte, ihrerseits alles Mögliche zu thun, um der Empfangsbedingung schleunigst Genüge zu leisten. Daß das Publikum die schwache Seite dieses Unternehmens bald auffand und auszubeuten willens war, habe ich schon anderweitig nachgewiesen. Bei Sistirung der gegenwärtig im Concurse befindlichen Aussteuer-, Sterbe- und Unterstützungs-Kassen-Gesellschaft, welche nur Töchter aufnahm und entweder eine funfzehnjährige Mitgliedschaft oder das Heirathen zu Empfangsbedingungen gemacht hatte, fanden sich im Juli 1852 noch versichert vorhanden:

aus dem Jahre 1845 für Personen über eilf Jahr:	364500 Thlr.,	unter eilf Jahr:	69500 Thlr.,	Verhältniß 5.3 : 1
" " " 1846 " " " " "	679600	" " " "	59700 "	" 7.6 : 1
" " " 1847 " " " " "	362700	" " " "	26900 "	" 13.5 : 1
" " " 1848 " " " " "	282000	" " " "	11300 "	" 25.0 : 1
" " " 1849 " " " " "	1040000	" " " "	34300 "	" 30.3 : 1
" " " 1850 " " " " "	1562500	" " " "	36200 "	" 43.2 : 1

woraus man sieht, daß mit jedem Jahre das Verhältniß zwischen Mädchen, die nach fünf Jahren heirathsfähig wurden, gegenüber den jüngeren Mädchen sich vergrößerte.

Will man dessen ungeachtet die Auszahlung des Kapitals von solchen unbestimmbaren Bedingungen abhängig machen, so muß man den Kassen das Spaarkassenprincip, so viel wie immer thunlich, zu Grunde legen und die Höhe der Empfangssumme mit der Dauer der Mitgliedschaft in Verhältniß setzen, so daß man es, wenn nicht außerfinanzielle Gründe dagegen sprechen, allenfalls den Betheiligten überlassen könnte, zu jeder beliebigen Zeit auszutreten und die Abfindung zu beanspruchen. Ist von obiger Gesellschaft, wie a. a. O. geschehen, die längste Dauer der Mitgliedschaft auf funfzehn Jahre festgesetzt, so kommt auf jedes volle Jahr $\frac{1}{15}$ des normalmäßigen Betrages, so daß, wenn überdies die beiden ersten Jahre als Probejahre zu gar keiner Abfindung berechtigen sollen, an die Abgehenden im Laufe des dritten, vierten, fünften Jahres ihrer Mitgliedschaft u. s. w. resp. $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{4}{15}$ u. s. w. bis $\frac{14}{15}$ des vollen Betrags, an die volle funfzehn Jahr verbliebenen Mitglieder aber die unverkürzten Beträge gezahlt werden.

Läßt man den Tab. 20 beispielsweise für die einzelnen Jahre der Mitgliedschaft angenommenen Prozentsatz der Abgehenden gelten und setzt, dem Spaarprincip nachkommend, monatliche Vorausbezahlungen fest, so erhält man die durchschnittliche Zahl der eingehenden Beiträge im Laufe eines jeden Jahres, wenn man die Hälfte der um 1 verringerten Zahl der Abgehenden von der am Anfange des Jahres vorhandenen Mitgliederzahl subtrahirt (Seite 14), was in der kommenden

Berechnung des jährlichen Beitrags für den versicherten Betrag 1 nach der fünfzehntel Scala

Geschäftsjahr.	Anfängliche Mitglieder.	Abgehende Mitglieder.	Durchschnittszahlen der beitragenden Mitglieder.	Baare Werthe der Einzahlungen à $3\frac{1}{2}$ %.	Baare Werthe der Einzahlungen à 4 %.	Auszahlungen während der fünfzehnjährigen Dauer.	Baare Werthe der Auszahlungen à $3\frac{1}{2}$ %.	Baare Werthe der Auszahlungen à 4 %.
	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1000	10	995.5	995.50	995.50	.	.	.
2	990	10	985.5	952.17	947.60	.	.	.
3	980	49	956.0	892.44	883.87	$\frac{1}{15}$ × 89	$\frac{1}{15}$ × 91.48	$\frac{1}{15}$ × 90.61
4	931	56	904.5	815.81	804.10	168	151.53	149.35
5	875	61	845.0	736.37	732.31	244	212.63	208.57
6	814	81	774.0	651.69	636.17	405	341.00	332.88
7	733	81	693.0	563.76	647.69	486	376.71	384.09
8	652	78	614.5	482.99	466.97	546	429.15	414.92
9	574	74	538.5	408.94	393.48	592	449.57	432.57
10	500	70	466.5	342.29	327.86	630	462.25	442.63
11	430	65	398.0	282.15	268.87	650	460.80	438.12
12	365	51	340.0	232.88	220.86	561	394.25	364.41
13	314	40	295.5	195.56	184.57	480	317.66	299.81
14	274	33	258.0	164.97	154.95	424	274.30	257.65
15	241	27	228.0	140.85	131.67	378	233.52	218.28
				7858.37	7796.47		$\frac{1}{15}$ × 4194.85	$\frac{1}{15}$ × 4033.89
							279.66	268.93

Col. a bis c geschehen. Stellt man sich vor, daß die Einzahlungen Col. c, so wie die Auszahlungen Col. f in der Mitte der Jahre geschehen und rechnet von Mitte zu Mitte, so sind die Zahlungen im Laufe des zweiten, dritten, vierten Jahres u. s. w. resp. um ein, zwei, drei Jahr u. s. w. abzuzinsen, um zu deren baaren Werthen zu gelangen, und dieselben zu addiren, wodurch sich laut nachfolgender Rechnung die sämmtlichen Werthe der baaren Einzahlungen für den jährlichen Beitrag 1

	bei $3\frac{1}{2}$%	bei 4%
zu	7858.37,	7786.47,
die der Auszahlungen im Laufe der funfzehn Jahre aber zu	279.66,	268.93
ergeben, wozu noch die Auszahlungen für die volle funfzehn Jahre bei der Kasse verbliebenen 214 Mitglieder kommen. Diese werden am Ende des funfzehnten Geschäftsjahres ausgezahlt, sind also auf die Mitte des ersten Jahres abzuzinsen und ergeben dafür	129.93,	121.16,
so daß der Werth sämmtlicher Auszahlungen	409.59,	390.09

ist, und da nun der baare Werth 7858.37 resp. 7786.47 durch die jährliche Zahlung 1 gedeckt ist, so erfordert das Gleichgewicht zwischen den jährlichen Einnahmen und Ausgaben den jährlichen Beitrag

$$\text{bei } 3\tfrac{1}{2}\% \quad \frac{409.59}{7858.37} = 0.052122$$

$$\text{bei } 4\% \quad \frac{390.09}{7786.47} = 0.050098$$

und dieser ändert sich wenig, wenn man für den Abgang einen andern Prozentsatz feststellt, so lange nur die $\frac{1}{15}$-Scala beibehalten wird.

Soll außer den Beiträgen noch ein Eintrittsgeld, z. B. ein Prozent des versicherten Betrages gezahlt werden, so ist dieses auf die Mitte des ersten Jahres aufgezinst vom baaren Werthe der Ausgaben für 1000 ursprüngliche Mitglieder mit resp. 10.35 und 10.20 in Abzug zu bringen, wodurch sich die jährlichen Beiträge

$$\text{bei } 3\tfrac{1}{2}\% \text{ auf } \frac{409.59 - 10.15}{7858.37} = 0.050830$$

$$\text{bei } 4\% \text{ auf } \frac{390.09 - 10.20}{7786.47} = 0.048789$$

ermäßigen.

Die Berechnung ist hier nach $3\frac{1}{2}$% und 4% zugleich angelegt, um den geringen Unterschied der Beiträge darzuthun. Ohne Antrittsgeld ist das Verhältniß derselben wie 52122 : 50098 = 1041 : 1000, d. h. so oft nach 4% 1000 einzuzahlen wären, sind nach $3\frac{1}{2}$% 1041 zu entrichten. Der Grund hiervon liegt in der kurzen Geschäftsdauer von funfzehn Jahren, während sich bei Sterbe- und Wittwen-Kassen ein viel bedeutenderer Unterschied ergeben wird (Seite 159).

Sollen schließlich das Risiko und die Verwaltungskosten durch einen Abzug von 10% der Beiträge gedeckt werden, so hat man sich hier, wie in allen anderen Fällen, nicht damit zu begnügen, diese dem gefundenen Beitrage hinzuzusetzen und also denselben von 1 auf $\frac{11}{10}$ zu erhöhen, denn der zehnte Theil ist $\frac{11}{100}$, und dieser von jenen $\frac{11}{10}$ in Abzug gebracht, ließe $\frac{99}{100}$ reinen Beitrag, wo-

gegen das Gleichgewicht 1 fordert. Man hat demnach den gefundenen Nettobeitrag von 1 auf $\frac{100}{90}$ oder $\frac{10}{9}$ zu steigern, da hiervon der zehnte Theil $\frac{1}{9}$ beträgt und nun $\frac{10}{9} - \frac{1}{9} = 1$ wird, wie es das Gleichgewicht verlangt.

II. Altersversorgungs- und Invaliden-Kassen.

Die Altersversorgungs-Kassen sind aus dem Wunsche hervorgegangen, dem Arbeiter, welcher in den Jahren seiner Thätigkeit nicht die Aussicht hat, so viel zu erspaaren, um der Zukunft, die ihn vielleicht hinfällig und arbeitsunfähig findet, mit Ruhe entgegen sehen zu können, Gelegenheit zu geben, für die Zeit eingetretener Arbeitsunfähigkeit die möglich wohlfeilste und sicherste Vorsorge treffen zu können. Bei der Verfolgung dieser Idee, mit der man sich in Berlin seit Eröffnung der großen Gewerbeausstellung hierselbst beschäftigt, fand sich aber, daß der Begriff des Invalideseins für die verschiedenen Berufsthätigkeiten ein zu verschiedener sei, als daß es gelingen könnte, allgemeine Normen dafür festzustellen, so wie, daß selbst für die einzelnen Geschäftsbranchen diejenigen statistischen Grundlagen fehlten, welche erforderlich wären, um eine Vorausberechnung mit einiger Sicherheit vornehmen zu können. Und dennoch lehrten die angestellten Rechnungsversuche, daß gerade hierfür der größtmöglichste Grad von Sicherheit wünschenswerth sei; denn es wird sich zeigen, daß dabei ein Unterschied weniger Jahre schon einen bedeutenden Ausschlag giebt. Aus dem Grunde sah man sich genöthigt, diese Idee in ihrer Allgemeinheit fallen zu lassen und sich mit einer bloßen Altersversorgungs-Anstalt zu begnügen, nebenbei aber dieser eine solche Einrichtung zu geben, daß auch für die früher Invalidgewordenen der Zweck möglichst thunlich erreicht werden könnte. Eine eigenthümliche, gewiß mehr als zufällige Erscheinung stellt sich dabei heraus, daß man in Berlin, Aachen, Brüssel und Paris, und späterhin bei allen neueren Anstalten der Art, erweislich ganz unabhängig von einander, das fünfundfunfzigste, sechzigste und fünfundsechzigste Lebensjahr als diejenigen Altersstufen festsetzte, von welchen ab eine Altersversorgung nach dem freien, aber vorher ausgesprochenen Willen eines jeden Betheiligten erkauft werden könnte.

Das Prinzip, worauf diese Anstalten beruhen, ist von dem den Kinderversorgungs-Anstalten zu Grunde liegenden gar nicht verschieden; denn der Umstand, daß die Rückzahlung nicht mit einem Male oder in wenigen Raten, sondern lebenslänglich erfolgen solle, bedingt hierbe keinen Unterschied (Seite 277).

Verlangt eine dreißigjährige Person nach vollendetem fünfundfunfzigsten Lebensjahre den Betrag 1 ausgezahlt zu erhalten, so ist der baare Werth dieser Zahlung nach dem Zinsfuß von 4% (Seite 176) $\frac{255}{(1.04)^{55}} : \frac{439}{(1.04)^{30}}$; wird demnach von da ab eine lebenslängliche jährliche Zahlung 1 in vierteljährlichen Vorausbezahlungen verlangt, so ist der baare Werth

$$\frac{255}{(1.04)^{55}} : \frac{439}{(1.04)^{30}} \times R^{\frac{4}{4}}(55),$$

so daß also die lebenslängliche Altersversorgung weiter nichts als eine aufgeschobene Lebensrente ist (Seite 177), wie sich das auch schon von selbst versteht.

In der nachfolgenden Rechnung sind nun die baaren Werthe dieser aufgeschobenen Lebensrenten für einige Alter unter der Voraussetzung berechnet, daß die Versorgung mit dem fünfundfunfzigsten, sechzigsten und fünfundsechzigsten Lebensjahre beginnen soll.

	Baare Werthe der einmaligen Zahlung 1, beginnend mit dem Lebensjahre			Baare Werthe der vierteljährlichen Zahlung 1, beginnend mit dem Lebensjahre			Für den einmaligen Betrag 1 wird gezahlt in vierteljährlichen Raten der vierte Theil von: Wenn die Zahlung beginnen soll mit dem Lebensjahre			Zahlungen nach der Mortalitäts-Tabelle von Brune. Die Zahlungen beginnen mit dem Lebensjahre		
	55	60	65	55	60	65	55	60	65	55	60	65
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m
	29.4923	19.9626	12.6576	10.3644	9.0672	7.7778						
20	0.13161	0.08985	0.05647	1.3641	0.8147	0.4392	0.733	1.227	2.277	1.8623 / 26.8 %	1.1637 / 30.0 %	0.6668 / 34.1 %
25	0.16872	0.11420	0.07241	1.7487	1.0355	0.5632	0.572	0.996	1.776	2.4175 / 27.7 %	1.5108 / 31.4 %	0.8656 / 34.9 %
30	0.21743	0.14749	0.09352	2.2534	1.3363	0.7273	0.444	0.748	1.375	3.1176 / 27.7 %	1.9483 / 31.4 %	1.1168 / 34.8 %
35	0.28394	0.19260	0.12212	2.9428	1.7463	0.9498	0.340	0.515	1.053	4.0265 / 26.9 %	2.5162 / 30.6 %	1.4417 / 34.1 %
40	0.37778	0.25626	0.16249	3.9155	2.2935	1.2638	0.255	0.436	0.791	5.2061 / 24.8 %	3.2535 / 29.5 %	1.8641 / 32.2 %
45	0.50709	0.34397	0.21810	5.2556	3.1088	1.6963	0.190	0.322	0.589	6.7241 / 21.9 %	14.2020 / 28.4 %	2.4077 / 29.5 %
50	0.69712	0.47289	0.29984	7.2252	4.2878	2.3321	0.138	0.233	0.429	8.7380 / 14.3 %	5.4604 / 21.5 %	3.1286 / 25.4 %
55	.	0.67832	0.43010	10.3644	6.1505	3.3452	.	0.163	0.299	.	7.2172 / 14.8 %	4.1352 / 16.7 %
60	.	.	0.63407	.	9.0672	4.9317	.	.	0.203	.	.	5.6256 / 12.3 %

Die Colonnen a bis c enthalten die Quotienten der abgezinsten Zahlen der Lebenden derjenigen Alter, mit welchen die Versorgung beginnen soll, durch die abgezinsten Zahlen der Lebenden für die am Rande bemerkten Aufnahmealter, während in den Colonnen d bis f jene Quotienten mit den baaren Werthen der Lebensrenten bei vierteljährlicher Vorausbezahlung

(terminlicher Abzug 0.375) für die dem Anfang der Versorgung entsprechenden Alter multiplicirt sind. Es sind demnach diese Zahlen die ein für allemal zu erlegenden Nettopreise für den jährlichen Pensionsgenuß 1. In den Colonnen k bis m sind dieselben Preise unter Zugrundelegung der Brune'schen Tabelle nebst ihren Prozentabweichungen von jenen Preisen angegeben und sieht man, daß die Preise nach der letztgenannten Mortalitäts-Tabelle jene früheren um so mehr übertreffen, je länger der Pensionsgenuß aufgeschoben werden soll und je jünger bis zum fünfundzwanzigsten Lebensjahre abwärts das Alter beim Einkaufe der Pension ist. Auch sind selbst die geringsten Abweichungen noch so bedeutend, daß man es nicht wagen kann, eine auf ihre eigene Hülfsmittel angewiesene Altersversorgungs-Anstalt nach den Preisen der Süßmilch'schen Tabelle zu errichten. Die Colonnen g bis i enthalten die reciproken Werthe der Zahlen in den Colonnen d bis f, also die Höhe der jährlich zu erwartenden Pension für den einmaligen Betrag 1.

Sämmtliche Altersversorgungs-Anstalten haben den Beitritt gegen Kapitaleinzahlungen eingeführt, verstehen aber unter Kapital verhältnißmäßig geringe Beträge, — Berlin 10 Sgr., Aachen 1 Thlr., Brüssel 12 Frcs. —, was aus dem Grunde geschehen ist, damit auch die ärmeren Arbeiter bei mangelndem Verdienste den Weiterkauf ungefährdet aussetzen und zur Zeit hinreichender Einnahmen wieder beginnen können, während die säumigen Mitglieder bei bestimmten, für eine festgesetzte jährliche Rente normirten Beitragszahlungen mit Verlust aller Ansprüche ausgeschlossen werden müßten.

Daß wirklich mit verhältnißmäßig geringen Opfern ein erklecklicher Lebensunterhalt gewonnen werden kann, lehren folgende Beispiele, wobei die Preise nach der Brune'schen Tabelle mit einem Aufschlage von 10% für Risiko und Verwaltungskosten, also so zu Grunde gelegt sind, wie sie die von dem Central-Verein für das Wohl der arbeitenden Klassen für Personen jeden Standes, jeder Religion und jeden Alters zwischen dem sechzehnten und sechzigsten Lebensjahre bis zur Höhe einer Pension von jährlich **fünfhundert Thalern** fordern will.

Zahlt eine Person vom siebzehnten bis einschließlich fünfunddreißigsten Lebensjahre jährlich 4 Thaler, so erhält sie dafür eine lebenslängliche jährliche Rente in vierteljährlicher Vorausbezahlung

wenn die Pension beginnen soll mit dem	55sten Lebensjahre:	27 Thlr.	22 Sgr.	
" " " " " " "	60sten "	44 "	16 "	
" " " " " " "	65sten "	78 "	1 "	;

zahlt dagegen eine achtundzwanzigjährige Person bis zum funfzigsten Lebensjahre einschließlich jährlich 6 Thaler, so erkauft sie sich dadurch die lebenslängliche jährliche Rente

wenn die Pension beginnen soll mit dem 55sten Lebensjahre:	26 Thlr.	4 Sgr.	6 Pf.
„ „ „ „ „ „ „ 60sten „	41 „	27 „	— „
„ „ „ „ „ „ „ 65sten „	73 „	22 „	6 „,

wobei noch zu bemerken, daß, wie schon erwähnt, die Zahlungen an keinen bestimmten Tag und Betrag gebunden sind und im Laufe des ganzen Jahres nach eigenem Belieben mit 10 Sgr., 20 Sgr., 30 Sgr., 40 Sgr. u. s. w. geleistet werden können; daß es gestattet sein soll, diese Zahlungen auf ein oder mehrere Jahre auszusetzen und später von neuem zu beginnen und daß der jedesmal zu erkaufende Rentenantheil geringer ausfällt, so oft die kaufende Person ein Jahr älter geworden ist. Hätte z. B. die achtundzwanzigjährige Person die 138 Thlr., statt dieselben auf dreiundzwanzig Jahre zu vertheilen, im ersten Jahre mit einem Male gezahlt, so würde die Pension betragen haben,

wenn sie beginnen soll mit dem 55sten Lebensjahre:	23 × 1 Thlr.	27 Sgr.	— Pf.
	= 43 „	21 „	— „
„ „ „ „ „ „ 60sten „	23 × 3 „	1 „	6 „
	= 70 „	4 „	6 „
„ „ „ „ „ „ 65sten „	23 × 5 „	9 „	— „
	= 121 „	27 „	— „

Dies darf nicht unbillig erscheinen, wenn man bedenkt, daß letzterenfalls die Anstalt sofort die 138 Thlr. empfängt, davon den Genuß der Zinsen und Zinseszinsen hat und, wenn die versicherte Person stirbt, das ganze Kapital erbt, während solches bei einer jährlichen Einzahlung nur nach und nach mit 6 Thlr., 12 Thlr., 18 Thlr. u. s. w. eintritt. Je größer daher der Betrag der Einzahlungen während eines und desselben Lebensjahres ist, desto größer ist einerseits die Hoffnung auf Gewinn, andrerseits aber auch die Gefahr des Verlustes, und dies entspricht eben den Anforderungen der Billigkeit.

Aus allen diesen Zahlen, namentlich aber aus der Vergleichung derselben in den Colonnen d bis f oder g bis i ersieht man, welchen Unterschied es ausmacht, ob die Verpflegung fünf Jahr früher oder später beginnen soll. Setzt man den Bedarf für den Anfang der Versorgung nach vollendetem fünfundsechzigsten Lebensjahre gleich 1, so findet man den für das sechzigste und fünfundfunfzigste Jahr bei sämmtlichen Altersjahren des Beitritts aus den Colonnen d bis f resp. zu 1.84 und 3.01 und hieraus folgt alsdann, daß es für eine allgemein zugängliche Versicherungs-Anstalt gefährlich wäre, nahebei gleiche Invaliden-Pensionen, für welche sich die Jahre des Eintritts nicht durchschnittlich feststellen lassen, zu gewähren.

Legt man dagegen das fünfundsechzigste Lebensjahr als normalmäßig für

den Beginn der Pension zu Grunde und dividirt die Zahlen der Col. f durch die der am Rande vermerkten baaren Werthe der Leibrenten bei vierteljährlicher Vorausbezahlung, so erhält man, mit Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners, folgende Scala:

für das Lebensalter		a	b	c
25 . . .	$\frac{0.5632}{16.6120} =$	339	— 12	0
30 . . .	$\frac{0.7273}{15.7097} =$	463	112	128
35 . . .	$\frac{0.9498}{14.7424} =$	644	293	316
40 . . .	$\frac{1.2638}{13.7815} =$	917	565	598
45 . . .	$\frac{1.6963}{12.6358} =$	1343	992	1039
50 . . .	$\frac{2.3321}{11.4211} =$	2042	1691	1763
55 . . .	$\frac{3.3452}{10.2644} =$	3259	2908	3023
60 . . .	$\frac{4.9317}{8.9672} =$	5500	5149	5342
65 . . .	$\frac{7.7778}{7.7778} =$	10000	10000	10000

welche man von Lebensalter zu Lebensalter, nach der Brune'schen Mortalitäts-Tabelle berechnet, als Grundlage einer Invaliden-Kasse annehmen kann, weil es gleichgültig ist, ob z. B. ein vierzigjähriger Mann 917 Antheile, oder ein fünfundsechzigjähriger 10000 empfängt.

Die jährlichen Beiträge oder die Gehaltsabzüge sind in Bezug auf dieses letztere Alter zu normiren und müßten von Lebensalter zu Lebensalter nach dem Tarife Col. f steigen. Da dieses aber große Unbequemlichkeiten mit sich führen würde, so hat man hierfür gleich bleibende jährliche Beiträge zu berechnen. Gesetzt bei einer Behörde wäre das Alter von fünfundzwanzig Jahren dasjenige, mit welchem der Dienst zu beginnen pflegt, so ist der baare Werth der Lebensrente zwischen dem fünfundzwanzigsten und fünfundsechzigsten Jahre (Seite 179)

$$16.6120 - \frac{12.0576 \times 7.7778}{174.801} = 16.0488,$$

folglich der jährliche Beitrag $\frac{0.5632}{16.0488} = 0.0351$.

Da hier vorausgesetzt worden, daß diese Beiträge bis zum vollendeten fünfundsechzigsten Lebensjahre gezahlt werden sollen, so sind sie auch bis dahin von der Pension zu kürzen und so lange nur die in obiger Rechnung unter b vermerkten Raten zu zahlen, so daß also die in den jüngeren Jahren invalid werdenden Beamten vor dem sechzigsten Lebensjahre auf keine Pension Anspruch machen könnten, vielmehr noch hinzuzuzahlen hätten, um ihren Pensionsanspruch von da ab aufrecht zu erhalten. Will man sich dieser Unbequemlichkeit entziehen, so ist der baare Werth des Abzugs auf den baaren Werth der ganzen Lebensrente zu vertheilen. Nun ist aber

$$R^{\frac{4}{4}}_{40}(25) = 16.6120 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{174.804} = 16.0488$$

$$R^{\frac{4}{4}}_{35}(30) = 15.7097 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{135.352} = 14.9823$$

$$R^{\frac{4}{4}}_{30}(35) = 14.7424 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{103.647} = 13.7925$$

$$R^{\frac{4}{4}}_{25}(40) = 13.7815 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{77.9001} = 12.5178$$

$$R^{\frac{4}{4}}_{20}(45) = 12.6358 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{58.0361} = 10.9395$$

$$R^{\frac{4}{4}}_{15}(50) = 11.4211 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{42.2139} = 9.0890$$

$$R^{\frac{4}{4}}_{10}(55) = 10.2644 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{29.4923} = 6.9263$$

$$R^{\frac{4}{4}}_{5}(60) = 8.9672 - \frac{12.6576 \times 7.7778}{19.9626} = 4.0858$$

Folglich sind

$$25 \ldots \frac{16.0488 \times 351}{16.6120} = 339$$

$$30 \ldots \frac{14.9823 \times 351}{15.7097} = 335$$

$$35 \ldots \frac{13.7925 \times 351}{14.7424} = 328$$

$$40 \ldots \frac{12.5178 \times 351}{13.7815} = 319$$

$$45 \ldots \frac{10.9395 \times 351}{12.6358} = 304$$

$$50 \ldots \frac{9.0890 \times 351}{11.4211} = 279$$

$$55 \ldots \frac{6.9263 \times 351}{10.2644} = 236$$

$$60 \ldots \frac{4.0858 \times 351}{8.9672} = 159,$$

wonach die zuvor unter c angegebenen Pensions-Raten zu zahlen wären.

Bei allen diesen Zahlen ist vorausgesetzt worden, daß die Beamten mit dem fünfundzwanzigsten Lebensjahre zu zahlen begännen; fänge demnach die Zahlung erst später an, so müßten für dieselben Pensionssätze verschiedene Beiträge gezahlt, oder wo dieses nicht stattfinden soll, der Unterschied durch Altersausgleichungsgelder gedeckt werden. Wäre der eintretende Beamte z. B. bereits vierzig Jahr, so hätte derselbe zu zahlen $\frac{1.2638}{13.7815} = 0.0932$; nun zahlt er indeß mit den übrigen Beamten nur 0.0351, so daß noch 0.0581 oder $\frac{581}{932}$ Antheile durch Ausgleichungsgelder zu decken sind, und da 10000 Theile die Nachzahlung 1.2638 erfordern würden, so sind $\frac{581}{932} \times 1.2638$, also 0.7878 ein für allemal nachzuzahlen. Eine ähnliche Ausgleichung muß für jede Gehaltszulage, welche die Pensionsansprüche erhöht, in Anschlag gebracht werden. Betrüge die Zulage z. B. den fünften Theil des bisherigen Gehalts, so wäre für den vierzigjährigen Beamten neben den erhöhten Pensionsbeiträgen dafür $\frac{1}{5} \times 0.7878 = 0.1576$ in die Kasse zu zahlen.

Dies ist die einzige Art und Weise, wie bei dem gegenwärtigen Mangel

aller dahin gehörigen statistischen Nachrichten eine Invaliden-Kasse, ohne Gefahr banquerutt zu werden, errichtet werden könnte und wäre daran nur das auszusetzen, daß die Beamten eine Reihe von Jahren zu dienen haben, bevor die Pension eine irgend beträchtliche Höhe erreicht. Auf welche Weise die Altersversorgungs-Anstalten ihren Zweck zu erreichen suchen, wird bei der Lehre von der Abfindung gezeigt werden.

III. Sterbekassen und Lebensversicherungs-Anstalten.

Will Jemand auf den Fall seines Todes zu seiner Beerdigung oder zur Unterstützung seiner Hinterbleibenden einen gewissen Betrag 1 versichern und die Versicherung durch Kapitalseinzahlung bewirken, so hat er dafür den baaren Werth des Sterbethalers mit Rücksicht auf die Verwaltungskosten und das Risiko einerseits und auf die etwaige Probezeit und den spätern Zahlungstermin andererseits, in einem Betrage zu entrichten, wenn eine einzige Zahlung gemacht werden soll. Wünscht der Beitretende dagegen mehrere unbedingte Zahlungen (Seite 150) zu leisten, so ist für die späteren Raten der Zinsverlust in Anschlag zu bringen und also, wenn die Zahlungen jedesmal am Anfange der Jahre geschehen sollen, die einzelne Rate so zu wählen, daß (vgl. Tab. VI) bei dem Zinsfuße von 4% z. B.

und einmaliger	Zahlung die	1.000000fache	Rate
= zwei	= =	1.961538	= =
= drei	= =	2.886095	= =
= vier	= =	3.775091	= =
= fünf	= =	4.629895	= =
u. s. w.		u. s. w.	

dem baaren Werthe des Sterbegeldes gleich sei. Der Einfachheit wegen und da die Nebenumstände bei den verschiedenen Kassen sehr verschieden sind, auch nach dem, was darüber Seite 208 gesagt worden, so oft es nöthig ist, leicht mit in Rechnung gesetzt werden können, werde ich immer das reine Sterbegeld, wie solches die Tab. VII aufführt, betrachten. Wäre demnach die eintretende Person fünfunddreißig Jahr alt, so wäre der baare Werth des Sterbethalers 0.4353 und demnach die Raten so abzumessen, daß dieselben in obiger Vervielfachung diesen Betrag decken, also

bei einmaliger Zahlung	. . . . . .	0.4353
„ zwei „ „		$\frac{0.4353}{1.961538} = 0.2214$
„ drei „ „		$\frac{0.4353}{2.886095} = 0.1508$
„ vier „ „		$\frac{0.4353}{3.775091} = 0.1153$
„ fünf „ „		$\frac{0.4353}{4.629895} = 0.0940$
u. s. w.		u. s. w.

zu entrichten ist (Seite 151).

Der zu stellenden Sicherheit wegen dürfte indeß diese Art des Einkaufs wohl nur selten vorkommen. Eher denkbar wäre dagegen die andere Art, daß der Beigetretene die ferneren Zahlungen nur für den Fall, daß er die Fälligkeitstermine noch erlebt, zu machen habe (Seite 129), weil gegenwärtig die Kasse dadurch gesichert ist, daß sie im Nichtzahlungsfalle die Ansprüche für erloschen erklärt. Bei dieser Art des Geschäfts sind die Wahrscheinlichkeiten, daß die einzelnen Zahlungstermine von den Versicherern erlebt werden, mit in Rechnung zu setzen, also ist für das gewählte Beispiel der Betrag so zu bemessen, daß

bei zweimaliger Zahlung sein	$(1 + \frac{402}{409 \times 1.04})$faches
„ drei „ „ „	$(1 + \frac{402}{409 \times 1.04} + \frac{395}{409 \times (1.04)^2})$faches
„ vier „ „ „	$(1 + \frac{402}{409 \times 1.04} + \frac{395}{409 \times (1.04)^2} + \frac{388}{409 \times (1.04)^3})$faches
u. s. w.	u. s. w.

dem baaren Werthe des Sterbethalers gleich werde. Mit Verwendung der Tab. VII kann man indeß diesen Ausdrücken eine Form geben, die eine viel schnellere Berechnung zuläßt, als solches durch Auswerthung der einzelnen Glieder geschehen könnte. Multiplicirt man nämlich beiderseits mit 409 und zinst noch auf fünfunddreißig Jahre ab, so geht der letzte Ausdruck in das

$$\left(\frac{409}{(1.04)^{35}} + \frac{402}{(1.04)^{36}} + \frac{395}{(1.04)^{37}} + \frac{388}{(1.04)^{38}}\right)\text{fache} = \frac{409}{(1.04)^{35}} \times 0.4353$$

über. Nun ist aber der links stehende Ausdruck die Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden für so viele Jahre, als gezahlt werden soll, 1566.88 — 1158.32, Tab. VII, Col. c, während $\frac{409}{(1.04)^{35}} \times 0.4353 = 45.1175$, Col. d, ist, so daß man die einfache Regel erhält: Soll ein Sterbegeld oder eine Lebensversicherung durch mehrere Zahlungen, die am Anfange der auf einander folgenden Jahre, so lange die versicherte Person noch lebt, in gleichen Raten erfolgen, erworben werden, so findet man den Betrag der einzelnen Rate, wenn man die Summe der abgezinsten Zahlen der Sterbenden vom Alter des Erwerbers und aller höheren Alter durch die Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden vom genannten Alter einschließlich

für so viele Jahre, als Zahlungen geleistet werden sollen, dividirt. Hiernach ist für das angeführte Beispiel der Beitrag

bei einmaliger Zahlung $\frac{45.1175}{1566.88 - 1463.23} = 0.4353$

" zwei " " $\frac{45.1175}{1566.88 - 1365.28} = 0.2238$

" drei " " $\frac{45.1175}{1566.88 - 1272.13} = 0.1534$

" vier " " $\frac{45.1175}{1566.88 - 1185.32} = 0.1153$

" fünf " " $\frac{45.1175}{1566.88 - 1102.79} = 0.0972$

und sieht man, daß in diesem Falle die Raten etwas höher sind als vorher, wegen der Unsicherheit, ob die späteren Zahlungen eingehen werden oder nicht.

Bringt man von dem Minuendus 1566.88 nichts in Abzug, so heißt dieses, die Zahlungen sollen lebenslänglich fortgesetzt werden, und erhält man demnach für den jährlichen Beitrag $\frac{45.1175}{1566.88}$. Diesem letzteren Bruche kann man indeß die Form geben

$$\frac{45.1175}{103.647} : \frac{1566.88}{103.647},$$

wo der Dividendus den baaren Werth des Sterbethalers, der Divisior den der Lebensrente angiebt, so daß man

$$B(35) = \frac{T(35)}{R(35)}$$

setzen kann. D. h.: Soll ein Sterbegeld oder eine Lebensversicherung durch lebenslängliche unveränderliche jährliche Vorausbezahlungen erworben werden, so erhält man den jährlichen Beitrag, wenn man den baaren Werth des Sterbethalers durch den baaren Werth der Lebensrente, oder auch, wenn man die Summe der abgezinsten Zahlen der Todten durch die Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden vom Beitritts- und aller höheren Alter dividirt.

Unter dieser Form ist der Satz nicht allein vonselbst verständlich, indem durchschnittlich jedes Mitglied während seiner Lebenszeit so viel einzuzahlen hat, als es nach seinem Tode beansprucht, sondern er fällt auch mit dem vorhergehenden zusammen, weil man es dort offenbar mit aufhörenden Lebensrenten zu thun hat. Setzt man indeß in die vorhergehende Formel den Seite 181 angegebenen Werth für T(35), so erhält man

$$B(35) = \frac{1 + 0.04 \{R(35) - 1\}}{R(35)},$$

wofür man aber auch

$$B(35) = \frac{1.04}{R(35)} - 0.04$$

schreiben kann und alsdann die einfache Regel erhält: Um für eine Person bestimmten Alters den lebenslänglichen jährlichen Pränumerando-

beitrag für ein versichertes Begräbnißgeld zu erhalten, dividire man den um die Jahreszinsen erhöhten Werth des Begräbnißgeldes durch den baaren Werth der Leibrente für die gegebene Person und verringere hinwiederum den Quotienten um die genannten Zinsen.

Nach dieser Regel findet man also den jährlichen Pränumerandobeitrag, ohne den baaren Werth für das Begräbnißgeld selbst zu kennen. Der nachfolgende

Tarif der Beiträge für das Begräbnißgeld 1

	Nach Süßmilch.						Nach Brune.
	3 %	A	3½ %	A	4 %	A	4 %
21	0.02065	100	0.01976	100	0.01895	110	0.01619
22	2119	110	2028	110	1947	110	1635
23	2175	110	2084	110	2002	120	1655
24	2235	110	2143	120	2061	120	1679
25	2298	120	2205	120	2122	130	1701
					(0.10027)		
26	2364	120	2272	130	2188	130	1739
27	2434	120	2342	130	2258	140	1774
28	2509	130	2416	140	2332	140	1811
29	2576	140	2482	140	2397	150	1849
30	2646	150	2551	150	2466	150	1890
					(0.11641)		
31	2720	150	2625	160	2539	160	1933
32	2798	160	2703	160	2616	170	1978
33	2882	160	2786	170	2698	170	2026
34	2970	170	2874	180	2786	180	2078
35	3063	180	2967	180	2879	190	2132
					(0.13518)		
36	3148	190	3051	190	2962	200	2190
37	3237	200	3140	200	3050	210	2253
38	3332	200	3233	210	3143	220	2319
39	3432	210	3333	220	3241	230	2391
40	3538	220	3439	230	3346	240	2468
					(0.15742)		
41	3651	240	3551	240	3459	250	2552
42	3771	250	3671	250	3578	260	2644
43	3900	270	3800	270	3707	280	2744
44	4037	280	3938	280	3845	290	2852
45	4185	290	4086	300	3993	310	2969
					(0.18582)		
46	4344	310	4246	320	4154	330	3094
47	4493	320	4395	340	4302	340	3228
48	4652	350	4553	350	4417	360	3371
49	4822	370	4724	370	4632	380	3525
50	5004	390	4907	400	4816	410	3692
					(0.22321)		
51	5173	410	5076	420	4985	430	3870
52	5353	430	5255	440	5164	460	4061
53	5543	450	5446	470	5354	480	4266
54	5747	490	5649	500	5558	510	4486
55	5964	520	5867	530	5775	540	4718
					(0.26836)		
56	6196	550	6009	560	6008	580	4961
57	6444	580	6349	600	6258	620	5218
58	6711	630	6617	650	6527	660	5489
59	6999	680	6907	690	6818	700	5777
60	0.07310	730	0.07219	750	0.07132	760	0.06090
					(0.32743)		

ist danach berechnet und giebt derselbe zu folgenden Bemerkungen Veranlassung:

1) Die Beiträge nehmen, wie sich nach der größer werdenden Sterblichkeit von selbst versteht, mit dem vorrückenden Alter zu. Schreibt man nun für die letzte Formel $B(35) + 0.04 = \frac{1.04}{R(35)}$, so sieht man, daß die Zunahme des um die Jahreszinsen des versicherten Begräbnißgeldes vermehrten Jahresbeitrags in demselben Verhältniß wächst, nach welchem der baare Werth der Leibrente der versicherten Person abnimmt.

2) Vergleicht man die nach der Süßmilch'schen Sterblichkeitstabelle bei Zugrundelegung der verschiedenen Zinsfüße berechneten Beiträge, so sieht man, daß dieselben bei gleichem Aufnahmealter um so größer ausfallen, je geringer der Zinsfuß ist, und zwar wiederum nach dem kurz zuvor angegebenen Gesetze; daß sie dagegen bei einer Zinsdifferenz von 1% pro anno

im einundzwanzigsten	Lebensjahre	dem	Altersunterschiede	von	3 Jahr,
= sechsundzwanzigsten	=	=	=	=	2½ =
= einunddreißigsten	=	=	=	=	2 =
= sechsunddreißigsten	=	=	=	=	2 =
= einundvierzigsten	=	=	=	=	1½ =
und zwischen dem sechsundvierzigsten und sechzigsten	=	=	=	=	1 =

entsprechen, wonach sich die nöthige Höhe der Beiträge beurtheilen läßt, ohne dieselben gerade für die einzelnen Zinsfüße besonders berechnen zu dürfen.

3) Vergleicht man dagegen die nach dem Zinsfuße von 4% unter Zugrundelegung der Süßmilch'schen Mortalitäts-Tabelle berechneten Beiträge mit denen nach Brune bei gleichen Zinsen, so entspricht

dem	Alter	von	21	Jahr	nach	Süßmilch,	das	von	30	Jahr	nach	Brune,
=	=	=	26	=	=	=	=	=	36	=	=	=
=	=	=	31	=	=	=	=	=	41	=	=	=
=	=	=	36	=	=	=	=	=	45	=	=	=
=	=	=	41	=	=	=	=	=	48½	=	=	=
=	=	=	46	=	=	=	=	=	52½	=	=	=
=	=	=	51	=	=	=	=	=	56	=	=	=
=	=	=	56	=	=	=	=	=	60	=	=	=

woraus man sieht, daß die Werthe nach Süßmilch so hoch ausfallen, daß bei mittelmäßiger Frequenz eine auf Beitragszahlung nach der Süßmilch'schen Tabelle gegründete Sterbekasse nicht Gefahr läuft, insolvent zu werden und man von einer besondern Veranschlagung des Risikos Abstand nehmen kann (Seite 228 und 230).

4) Vergleicht man die vierprozentigen Jahresbeiträge für die Aufnahmealter von fünfunddreißig und funfzig Jahren, so ist das Verhältniß der letztern

zu den ersteren 4816 : 2879, oder nahebei wie 5 : 3, so daß man gegen das Prinzip der Billigkeit verstoßen würde, wollte man solchen Mitgliedern dieselben Beiträge abfordern, noch mehr, wenn jüngere als fünfunddreißigjährige oder ältere als funfzigjährige Personen Aufnahme finden sollen. Sollen dennoch aus irgend welchen Rücksichten alle diese Mitglieder gleiche Beiträge zahlen, so kann dieses nur so geschehen, daß man den für die jüngsten aufnahmsfähigen Mitglieder als Normalbeitrag annimmt und die älteren das Fehlende durch ein Antrittsgeld decken ließe. Da nun im vorliegenden Falle die fünfunddreißigjährigen Personen 0.02879 zu zahlen haben, so würden durch diese Beiträge decken (Tab. VII C, Col. e),

die vierzigjährigen Personen:	0.02879 × 14.1565 = 0.4076
„ fünfundvierzigjährigen „	0.02879 × 13.0108 = 0.3746
„ funfzigjährigen „	0.02879 × 11.7961 = 0.3396,

so daß also als Antrittsgeld zu zahlen wäre (Col. f a. a. O.)

von vierzigjährigen Personen:	0.4737 — 0.4076 = 0.0661
„ fünfundvierzigjährigen „	0.5196 — 0.3746 = 0.1450
„ funfzigjährigen „	0.5682 — 0.3396 = 0.2286

und bleibt es dahin gestellt, ob namentlich ältere Personen geneigt sein möchten, so große und bei Zugrundelegung eines jüngern Normalalters noch höhere Summen mit einem Male einzuzahlen.

5) Die Lebensversicherungs-Anstalten genügen dem Prinzipe der Billigkeit am meisten, indem dieselben die Beiträge nach dem indvidueIlen Aufnahmealter normiren. Allerdings wird dadurch das Kassengeschäft erschwert; dieses ist aber da unvermeidlich, wo die zu versichernden Summen so sehr verschieden sind, daß dieselben vom einfachen bis zum hundertfachen Betrage (100 — 10000) zu steigen pflegen. Handelt es sich aber um eine und dieselbe nicht allzu bedeutende Versicherungssumme, so kann man sich das Geschäft dadurch erleichtern, daß man die Aufzunehmenden dem Alter nach von fünf zu fünf Jahren in verschiedene Klassen theilt und jeder einzelnen Klasse die entsprechenden mittleren Beiträge abfordert. Nach der Süßmilch'schen Tabelle und dem Zinsfuße von 4% hätten alsdann, gemäß der vorhergehenden Rechnung, die lebenslänglichen jährlichen Pränumerandobeiträge zu zahlen:

Personen, die sich bei ihrer Aufnahme befinden zwischen dem

21sten und 25sten Lebensjahre: $\frac{0.10027}{5} = 0.02005$

26sten „ 30sten „ $\frac{0.11641}{5} = 0.02328$

31sten „ 35sten „ $\frac{0.13518}{5} = 0.02704$

36sten „ 40sten „ $\frac{0.15742}{5} = 0.03148$

41sten „ 45sten „ $\frac{0.18582}{5} = 0.03716$

46sten „ 50sten „ $\frac{0.22321}{5} = 0.04464$

51sten „ 55sten „ $\frac{0.26836}{5} = 0.05367$

55sten „ 60sten „ $\frac{0.32743}{5} = 0.06549$

und sieht man, daß diese Beiträge zwar sämmtlich etwas höher ausfallen, als den Durchschnittsaltern resp. 23, 28, 33, 38 Jahr u. s. w. gemäß wäre, der Unterschied aber doch im Ganzen ein so geringer ist, daß man füglich jene Durchschnittsalter bei der Prüfung der Lebensfähigkeit als Normen annehmen kann.

6) Die vorhergehenden Durchschnittsbeiträge setzen indeß stillschweigend voraus, daß der Zutritt der Mitglieder innerhalb eines jeden Quinquenniums ein gleichmäßiger sei; sie schlagen zu Gunsten der Kasse aus, wenn innerhalb eines Quinquenniums mehr jüngere als ältere Personen eintreten sollten, zu Ungunsten im entgegengesetzten Falle. Sind verschiedene Versicherungsbeträge gestattet, so können diese es bewirken, daß selbst beim gleichmäßigen Personenzutritt, aber ungleichen Versicherungssummen die Kasse in Nachtheil gerathe. Man setze nur voraus, eine Sterbekasse versichere ein Begräbnißgeld vom einfachen bis fünffachen Betrage und lasse einmal die jüngeren Personen die höhern, die älteren die niederen Versicherungssummen wählen, im zweiten Falle aber das Entgegengesetzte eintreten, so würden sich, da jeder einfache Betrag als eine eigene Versicherung anzusehen ist (Seite 236), für Personen resp. zwischen dem einundzwanzigsten und fünfundzwanzigsten, so wie zwischen dem einundvierzigsten und fünfundvierzigsten Lebensjahre die Durchschnittsalter aus folgender Rechnung ergeben:

21—25		41—45	
im ersten Falle	im zweiten Falle	im ersten Falle	im zweiten Falle
5 × 21 = 105	1 × 21 = 21	5 × 41 = 205	1 × 41 = 41
4 × 22 = 88	2 × 22 = 44	4 × 42 = 168	2 × 42 = 84
3 × 23 = 69	3 × 23 = 69	3 × 43 = 129	3 × 43 = 129
2 × 24 = 48	4 × 24 = 96	2 × 44 = 88	4 × 44 = 176
1 × 25 = 25	5 × 25 = 125	1 × 45 = 45	5 × 45 = 225
15 335	355	635	655
$22\frac{1}{3}$	$23\frac{2}{3}$	$42\frac{1}{3}$	$43\frac{2}{3}$

woraus man sieht, daß das durchschnittliche Aufnahmealter zwischen $2\frac{1}{3}$ und $3\frac{2}{3}$ schwanken kann, welche Grenzen zwar für beide Aufnahmealter dieselben, aber für das höhere der Kasse nachtheiliger als für das niedere sind.

Hierbei ist noch der Personalzutritt als gleichmäßig vorausgesetzt. Steht aber zu befürchten, daß Leute, welche die höheren Summen versichern wollen, die äußerste Grenze ihrer Altersklasse abwarten werden, um bis dahin die Beiträge zu ersparen, so kann der Nachtheil für die Kasse, der aus dem erhöhten durchschnittlichen Aufnahmealter zu erwachsen droht, noch bedeutender und lebensgefährlich werden. Will man dennoch die Altersklassen beibehalten, so hat man für jede Klasse das jüngste Alter als Norm zu nehmen und den Ausfall die älteren Mitglieder als Antrittsgeld oder Altersausgleichung (Seite 274) zahlen zu lassen. Sollen demnach Personen zwischen dem sechsundvierzigsten und funfzigsten Lebensjahre den jährlichen Pränumerandobeitrag 0.4154 leisten, so decken dadurch

die siebenundvierzigjährigen Personen nur:	$0.4154 \times 12.5266 = 0.5204$
= achtundvierzig = = =	$0.4154 \times 12.2911 = 0.5106$
= neunundvierzig = = =	$0.4154 \times 12.0478 = 0.5005$
= funfzig = = =	$0.4154 \times 11.7961 = 0.4900$

so daß als Altersausgleichung zu zahlen wäre

von siebenundvierzigjährigen Personen:	$0.5389 - 0.5204 = 0.0185$
= achtundvierzig = =	$0.5484 - 0.5106 = 0.0378$
= neundvierzig = =	$0.5581 - 0.5005 = 0.0576$
= funfzig = =	$0.5682 - 0.4900 = 0.0782$

welche Beträge bedeutend kleiner als die früheren sind.

7) Sollen die Beiträge nicht lebenslänglich, sondern nur bis zu einem bestimmten Alter gezahlt werden, so tritt die Seite 289 entwickelte Formel in Kraft. Wählen wir als Grenze der Zahlung resp. das vollendete fünfundsechzigste und das vollendete siebenzigste Lebensjahr, so sind die baaren Werthe der aufhörenden Einzahlungen sämmtlicher Personen der Mortalitäts-Tabelle:

für 21jährige Personen:	$3762.51 - \left\{\begin{matrix}101.93\\50.28\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3660.58\\3712.23\end{matrix}\right\}$
= 26 = =	$2794.60 - \left\{\begin{matrix}101.93\\50.28\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2692.67\\2744.32\end{matrix}\right\}$
= 31 = =	$2041.73 - \left\{\begin{matrix}101.93\\50.28\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1939.80\\1991.45\end{matrix}\right\}$
= 36 = =	$1463.23 - \left\{\begin{matrix}101.93\\50.28\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1361.30\\1412.95\end{matrix}\right\}$
= 41 = =	$1024.89 - \left\{\begin{matrix}101.93\\50.28\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}922.96\\974.61\end{matrix}\right\}$
= 46 = =	$697.061 - \left\{\begin{matrix}101.928\\50.277\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}595.133\\646.784\end{matrix}\right\}$
= 51 = =	$455.744 - \left\{\begin{matrix}101.928\\50.277\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}353.816\\405.467\end{matrix}\right\}$

Es haben demnach an jährlichen Pränumerandobeiträgen zu zahlen:

wenn die Zahlungen aufhören sollen mit dem vollendeten

	65sten Lebensjahre:	70sten Lebensjahre:
die 21jährigen Personen:	$\frac{71.3035}{3660.58} = 0.01948$	$\frac{71.3035}{3722.23} = 0.01915$
„ 26 „ „	$\frac{61.1447}{2692.67} = 0.02271$	$\frac{61.1447}{2744.32} = 0.02228$
„ 31 „ „	$\frac{51.8325}{1939.80} = 0.02672$	$\frac{51.8325}{1991.45} = 0.02603$
„ 36 „ „	$\frac{43.3436}{1361.30} = 0.03184$	$\frac{43.3436}{1412.95} = 0.03069$
„ 41 „ „	$\frac{35.4464}{922.96} = 0.03804$	$\frac{35.4464}{974.61} = 0.03637$
„ 46 „ „	$\frac{28.9556}{595.133} = 0.04866$	$\frac{28.9556}{646.784} = 0.04475$
„ 51 „ „	$\frac{22.7177}{353.816} = 0.06421$	$\frac{22.7177}{405.467} = 0.05603.$

Vergleicht man diese Werthe unter sich, so sieht man, daß dieselben für die jüngeren Alter wenig, aber für die höheren mehr und mehr von einander abweichen, je nachdem die Zahlung bis zum vollendeten siebenzigsten oder nur bis zum fünfundsechzigsten Lebensjahre fortgesetzt werden soll. Vergleicht man dagegen diese Werthe mit den lebenslänglichen Beiträgen, so finden sich die Unterschiede zwischen jenen noch größer als zwischen diesen, so daß von einem Durchschnittsbeitrage für Mitglieder jedes Beitragsalters noch weniger die Rede sein kann.

8) Wird festgestellt, daß die Beitragszahlung nicht mit einem und demselben höchsten Lebensalter der Mitglieder, sondern nach Beendigung derselben Zahlungsperiode aufhören solle, so beruht die Berechnung der Beiträge auf demselben Principe, indem sich aus dem Beitrittsalter und der Dauer der Zahlung das Alter beim Einstellen der Zahlung von selbst ergiebt. Dasselbe wird bald niedriger bald höher sein, als im vorhergehenden Falle, je nach dem Alter beim Eintritt und der Dauer der Zahlung. Setzt man letztere zu dreißig Jahren voraus, so ist der baare Werth für sämmtliche Eintretende der Mortalitäts-Tabelle

bei 21jährigen Personen:	3762.51	— 455.74	= 3306.77
„ 26 „ „	2794.60	— 284.29	= 2510.31
„ 31 „ „	2041.73	— 166.53	= 1875.20
„ 36 „ „	1463.23	— 89.27	= 1373.96
„ 41 „ „	1024.89	— 43.084	= 971.806
„ 46 „ „	697.061	— 18.421	= 678.640
„ 51 „ „	455.744	— 6.746	= 448.998

Demnach haben während der ersten dreißig Jahre der Mitgliedschaft jährlich zum voraus zu zahlen:

21jährige Personen:	$\frac{71.3035}{3306.77}$	= 0.02156
26 " "	$\frac{61.1447}{2510.31}$	= 0.02436
31 " "	$\frac{51.8325}{1875.20}$	= 0.02764
36 " "	$\frac{43.3436}{1373.96}$	= 0.03155
41 " "	$\frac{35.4464}{971.806}$	= 0.03647
46 " "	$\frac{28.9556}{678.640}$	= 0.04267
51 " "	$\frac{22.7177}{448.998}$	= 0.05055.

Diese Beiträge sind natürlich sämmtlich größer, als die bei lebenslänglicher Zahlung, jedoch die für ältere Personen weniger, als die für jüngere, weil die Abweichung von der lebenslänglichen Zahlung für jene Personen kleiner ist, als für diese.

9) Die letztere Bemerkung führt dahin, die Frage zu beantworten, ob es nicht möglich sei, der Anforderung der Billigkeit bei gleichmäßigen Beiträgen für Personen verschiedener Aufnahmealter durch Feststellung ungleicher Beitragsdauern zu genügen und wie diese Dauern zu bestimmen seien? Ist das höchste zum Beitritt berechtigte Alter das funfzigste Lebensjahr, so wären 46 Jahr die höchstmöglichste Beitragsdauer dieser Personen, während welcher dieselben nach dem Tarife jährlich 0.04816 voraus zu bezahlen hätten. Sollen nun z. B. fünfunddreißigjährige Personen denselben jährlichen Beitrag entrichten, so hätten sie diesen nur so lange zu zahlen, daß der Quotient 45.1175 (vgl. Tab. VII C Col. d) durch den baaren Werth sämmtlicher Einzahlungen jenem Beitrage gleich, oder mit andern Worten, daß $\frac{45.1175}{0.04816}$ = 936.8 dem baaren Werthe sämmtlicher Einzahlungen gleich werde. Nun ist aber der baare Werth der Einzahlungen der fünfunddreißigjährigen Personen 1566.9 (vgl. Col. c a. a. O.), folglich ist davon 1566.9 — 936.8 = 630.1 in Abzug zu bringen, was ein Aufhören der Zahlungen nach dem siebenundvierzigsten Lebensjahre bedingt. Auf dieselbe Weise läßt sich die Rechnung für jedes andere Aufnahmealter führen und so der Billigkeit bei demselben Beitrage, aber ungleichen Zahlungsdauern, genügen. Soll die Rechnung genauer geführt werden, so sagt man, der baare Werth der ersten siebzehn Zahlungen (bis zum vollendeten sechsundvierzigsten Lebensjahr) beträgt 1566.9 — 642.4 = 924.5, so daß noch 936.8 — 924.5 = 12.3 zu decken bleiben, was dadurch geschieht, daß die Mitglieder entweder noch in demselben Jahre (vgl. Col. a a. a. O.) den $\frac{123}{513}$, oder im nächstfolgenden Jahre den $\frac{123}{481}$ Theil eines Jahresbeitrages entrichten.

10) Soll die Beitragszahlung so eingerichtet werden, daß kein Mitglied mehr zu zahlen habe, als das versicherte Begräbnißgeld selbst beträgt, so ist, um das Gleichgewicht zwischen Einnahmen und Ausgaben herzustellen, der Bei-

trag so abzumessen, daß der Quotient der Summe der abgezinsten Zahlen der Sterbenden vom Aufnahme- und aller höheren Alter, dividirt durch die Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden während der Dauer der Zahlungen, der umgekehrten Anzahl der Jahre gleich, mit andern Worten, daß der vorhergehende Quotient mit der Anzahl der Jahre multiplicirt, den Betrag des versicherten Sterbegeldes oder 1 gebe. Handelt es sich z. B. um fünfunddreißigjährige Personen, so hat man beim Zinsfuße von 4% (vgl. Tab. VII C) den Beitrag so zu wählen, daß einer der Quotienten

$$\frac{45.1175}{103.647}$$

$$\frac{2 \times 45.1175}{103.647 + 97.9549}$$

$$\frac{3 \times 45.1175}{103.647 + 97.9549 + 92.5473}$$

$$\frac{4 \times 45.1175}{103.647 + 97.9549 + 92.5473 + 87.4106}$$

u. s. w. u. s. w.

gleich 1 werde, und ist zuvörderst die Möglichkeit hiervon nachzuweisen. Daß der erste Quotient kleiner sein müsse als 1, erhellt daraus, daß im Zähler die abgezinste Zahl der Sterbenden, im Nenner dagegen die abgezinste Zahl der Lebenden desselben Alters steht; daß ferner jeder folgende Quotient größer als der nächstvorhergehende sei, läßt sich eben so wie Seite 37 beweisen. Betrachtet man nun den letzten Quotienten, so ist derselbe gleich dem Produkte aus der Altersergänzung der aufzunehmenden Person (Seite 22), multiplicirt mit dem Quotienten aus der Summe der abgezinsten Zahlen der Sterbenden durch die Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden. Dieser letztere Quotient ist aber der lebenslängliche jährliche Beitrag für das versicherte Begräbnißgeld 1, und zeigt der obige Tarif, daß für die gewöhnlichen Zinsfüße, die mit der Altersergänzung multiplicirten Beiträge Produkte liefern, welche jedesmal größer sind als 1. So ist z. B. beim Zinsfuße von 4% für das Alter von einundzwanzig Jahr 0.01895 × 75 = 1.42125 und für das Alter von sechzig Jahr 0.01732 × 36 = 2.56752; für geringere Zinsfüße wird dies noch mehr, für höhere Zinsfüße dagegen weniger der Fall sein. So würde der Zinsfuß von 5% beim erstern Alter das Produkt 1.31925, beim letztern Alter aber das Produkt 2.50956 liefern; d. h. wählte man nur den Zinsfuß hoch genug, so hätten auch von den ältesten Personen bei der Versicherung eines Sterbegeldes selbst die am längsten lebenden weniger einzuzahlen, als das Sterbegeld beträgt. Man sieht daraus, daß für die gewöhnlichen Zinsfüße die obigen Quotienten anfänglich kleiner sind als 1, jedoch nach und nach wachsen und späterhin die Einheit übertreffen, weshalb einer von ihnen gleich, oder wenigstens nahebei gleich 1 werden wird und es demnach nur noch darauf ankommt, für jedes gegebene Aufnahmealter den betreffenden Quotienten zu ermitteln. Läßt man die Mitglieder sich früher auszahlen, so hat man zu viel, und bei späterer

Auszahlung zu wenig verlangt. Wollte man gar keine Zinsen vergütigen, so beständen die Zähler der obigen Quotienten aus der Summe der Zahlen der Sterbenden, d. h. aus den Lebenden des Aufnahmealters, die Nenner aber aus der Summe der Zahlen der Lebenden dieses und der höheren Alter, so daß schon der erste Quotient gleich 1 wäre, d. h. die Mitglieder hätten alsdann schon beim Eintritte das ganze Sterbegeld einzuzahlen, wie sich das von selbst versteht.

Es ist im Allgemeinen einleuchtend, daß selbst von den in späteren Altern beigetretenen die am längsten lebenden Mitglieder nur wenig mehr, als das versicherte Begräbnißgeld beträgt, einzahlen werden, indem die Ausfälle an die früher verstorbenen durch die Zinsen der Ueberschüsse gedeckt werden. So sollen z. B. sechsundfunfzigjährige Personen nach dem Tarif den jährlichen Beitrag 0.06008 leisten, wonach sie etwa in siebzehn Jahren das volle Sterbegeld entrichtet haben, während zu dieser Zeit von 246 aufgenommenen Mitgliedern nur noch 85 leben, welche 1.030 eingezahlt haben; im nächsten Jahre haben 77 Mitglieder je 1.090, im darauf folgenden 71 Mitglieder 1.150, ein Jahr später 69 Mitglieder 1.210 gezahlt u. s. w. Man wird daher mit derjenigen Anzahl der Jahre beginnen, welche sich ergiebt, wenn man mit den lebenslänglichen jährlichen Beiträgen in 1 dividirt und alsdann, wenn das betreffende Vielfache der Summe der abgezinsten Zahlen der Todten größer sein sollte, als die entsprechende Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden, einerseits die Summe der abgezinsten Zahlen der Todten, andrerseits von hinten anfangend, die abgezinste Zahl der Lebenden so lange subtrahiren, bis man auf ein solches Vielfache kommt, das der betreffenden Summe gleich, oder doch zunächst kleiner als dieselbe wird. Hat man auf diese Weise die Anzahl der Jahre für die Beitragszeit gefunden, so dividirt man damit in 1, um den zugehörigen Beitrag zu erhalten. Hiernach wird die nachstehende Berechnung von selbst verständlich sein, wenn man dabei nur Tab. VII C, Col. c und d zu Hülfe nimmt, sich auch erinnert, daß man die Summe einer beliebigen Menge der abgezinsten Zahlen der Lebenden am einfachsten durch Subtraktion zweier bis zu Ende gehenden Summen findet.

Berechnung der Beiträge für den Fall, daß kein Mitglied mehr, als das volle Sterbegeld zu zahlen habe.

Aufnahmealter.	Reciproke Werthe der der lebenslänglichen Beiträge.	Entsprechende Vielfache der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.	Entsprechende Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Dauer der Beitragszeit. Jahre:	Beiträge.
	52	71.3035	3762.51		
21	(73)	× 52	— 31.14		
		3707.78	3731.37	52	0.01923
	45	61.1447	2794.60		
26	(71)	× 45	— 43.08		
		2751.51	2751.52	45	0.02222
	39	51.8325	2041.73		
	(70)	× 39	— 50.28		
31		2021.47	1941.45		
		— 51.83	— 8.15	(39)	
		1969.64	1933.30	38	0.02632
	33	43.3436	1463.23		
	(69)	× 33	— 58.42		
36		1430.34	1405.81	(33)	
		— 43.34	— 9.17		
		1387.00	1396.64	32	0.03125
	28	35.4464	1024.89		
	(69)	× 38	— 58.42		
41		992.50	966.47	(28)	
		— 35.44	— 9.17		
		957.06	957.30	27	0.03704
	24	28.9556	697.06		
	(70)	× 24	— 50.28		
		694.93	646.78	(24)	
		— 28.96	— 8.15		
46		665.97	638.63	(23)	
		— 28.96	— 9.17		
		637.01	629.46	(22)	
		— 28.96	— 10.26		
		608.05	619.20	21	0.04752
	20	22.7177	455.74		
	(71)	× 20	— 43.08		
		454.35	412.66	(20)	
		— 22.72	— 7.19		
51		431.63	405.47	(19)	
		— 22.72	— 8.15		
		408.91	397.32	(18)	
		— 22.72	— 9.17		
		368.19	388.15	17	0.05882

Sollen Verwaltungskosten oder Risiko mit eingerechnet werden, so ist die Summe der baaren Werthe der Sterbenden nach dem dafür veranschlagten Prozentsatze zu erhöhen. Rechnet man darauf 5%, so ist statt der oben genannten Summe z. B. für sechsundvierzigjährige Personen (Seite 280) $\frac{20}{19} \times 28.9556 = 30.4796$ zu setzen und die vorstehende Rechnung hat folgenden Fortgang:

30.4796	. . .	
× 21		
640.07	619.20	(21)
— 30.48	— 11.42	
609.59	607.78	(20)
— 30.48	— 12.66	
579.11	595.12	(19)

so daß der Beitrag 0.05263 neunzehnmal zu zahlen wäre, während es vorher 0.04752 einundzwanzigmal war.

11) Will man endlich eine Beitragszahlung nach fallender Scala einführen (Seite 152), so daß z. B. in den ersten zehn Jahren der Mitgliedschaft der dreifache Betrag, in den folgenden zehn Jahren der doppelte Betrag und in den dritten und letzten zehn Jahren der einfache Betrag zu zahlen ist, so zerfällt die Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden in drei Abschnitte: vom Aufnahmealter an zehn Glieder, welche dreimal, darauf zehn Glieder, welche doppelt und endlich zehn Glieder, welche einfach in Rechnung zu setzen sind. Führt man indeß statt der Summe von je zehn Gliedern die betreffenden Differenzen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden bis zum höchsten Alter hinauf ein, so ist der Subtrahendus der ersten Differenz der Minuendus der zweiten, so wie der Subtrahendus der zweiten der Minuendus der dritten Differenz und der baare Werth der Einzahlungen besteht aus der dreifachen Summe der abgezinsten Zahlen der Lebenden für das Aufnahmealter, weniger den drei einfachen Summen für die je um zehn, zwanzig und dreißig Jahr höheren Alter. Man erhält also z. B. als baaren Werth des einfachen Beitrags 1 von Personen

vom Aufnahmealter

21 Jahr: $3 \times 3762.51 - (2041.73 + 1024.89 + 455.74) = 7765.17$

26 „ $3 \times 2794.60 - (1463.23 + 697.06 + 284.29) = 5939.22$

31 „ $3 \times 2041.73 - (1024.89 + 455.74 + 166.53) = 4978.03$

36 Jahre	3 × 1463.23 — (697.06 + 284.29 + 89.27)	= 3319.07
41 "	3 × 1024.89 — (455.74 + 166.53 + 43.08)	= 2409.32
46 "	3 × 697.06 — (284.29 + 89.27 + 18.42)	= 1699.20
51 "	3 × 455.74 — (166.53 + 43.08 + 6.75)	= 1150.86.

Dividirt man mit diesen baaren Werthen der Einzahlungen in die betreffenden Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden, so findet man die Beiträge für Personen

vom Aufnahmealter	im 3ten Decennium	im 2ten Decennium	im 1sten Decennium
21 Jahr:	0.00918	0.01836	0.02754
26 "	0.01029	0.02058	0.03089
31 "	0.01118	0.02236	0.03354
36 "	0.01359	0.02718	0.04077
41 "	0.01471	0.02942	0.04413
46 "	0.01704	0.03408	0.05112
51 "	0.01974	0.03948	0.05922,

12) Wollte man dagegen eine steigende Beitrags-Scala einführen, z. B. der Art, daß in den ersten zehn Jahren der Mitgliedschaft der einfache, in den darauf folgenden zehn Jahren der doppelte und in den letzten zehn Jahren der dreifache Beitrag zu zahlen wäre: so besteht der baare Werth der Einzahlungen aus der Summe der baaren Werthe der abgezinsten Zahlen der Lebenden für das Aufnahmealter, so wie für die resp. um zehn und zwanzig Jahr höheren Alter, weniger dem dreifachen Werthe der abgezinsten Zahl der Lebenden für das um dreißig Jahr höhere Alter. Man findet alsdann die baaren Werthe der Einzahlungen für den einfachen Beitrag 1, bei Personen

vom Aufnahmealter

21 Jahr:	3762.51 + 2041.73 + 1024.89 — 3 × 445.74	= 4461.91
26 "	2794.60 + 1463.23 + 697.06 — 3 × 284.29	= 4108.02
31 "	2041.73 + 1024.89 + 455.74 — 3 × 166.53	= 3022.77
36 "	1463.23 + 697.06 + 284.29 — 3 × 89.27	= 2176.77
41 "	1024.89 + 455.74 + 166.53 — 3 × 43.08	= 1517.92
46 "	697.06 + 284.29 + 89.27 — 3 × 18.42	= 1015.36
51 "	455.74 + 166.53 + 43.08 — 3 × 6.75	= 645.10

und hiernach ergeben sich die Beiträge für Personen

vom Aufnahmealter:	im 1sten Decennium	im 2ten Decennium	im 3ten Decennium
21 Jahr:	0.01598	0.03196	0.04794
26 "	0.01490	0.02980	0.04470
31 "	0.01656	0.03312	0.04968
36 "	0.01991	0.03982	0.05973
41 "	0.02348	0.04696	0.07044
46 "	0.02458	0.04916	0.07374
51 "	0.03522	0.07044	0.10526,

welche Beiträge natürlich höher als die vorhergehenden sind, weil gegenwärtig viele Mitglieder die geringen und wenige die höheren Sätze zahlen sollen, während vorher der umgekehrte Fall stattfand. Ich habe bereits (Seite 152) auf die Unbilligkeit dieser Einrichtung hingewiesen; glaubt man dieselbe aber dennoch aus dem Grunde einführen zu sollen, weil es den Mitgliedern in den spätern Jahren leichter werden würde, höhere Beiträge zu zahlen, so hat man wenigstens die Scala so einzurichten, daß alle Mitglieder am Ende einer jeden Periode beträchtlich mehr als den jedesmaligen Bedarf eingezahlt haben, weil entgegengesetzten Falles zu befürchten steht, daß diejenigen Mitglieder, die noch ihren guten Gesundheitszustand nachzuweisen vermögen, um deren Erhaltung der Kasse also am meisten zu thun sein muß, bei nachheriger Erhöhung der Beiträge, nachdem sie den Vortheil der Versicherung gegen ein geringes Entgelt genossen, bei einer anders eingerichteten Kasse die Versicherung wohlfeiler fortsetzen werden, jene Kasse also aufhören kann, lebensfähig zu sein.

Bisher ist überall festgesetzt werden, daß die Beiträge am Anfange der Jahre eingezahlt werden; sollen dagegen die Zahlungen halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich erfolgen, so werden die Beiträge um so höher ausfallen, weil sich dadurch die baaren Werthe der Einzahlungen desto mehr verringern. Bei lebenslänglicher halbjährlicher Einzahlung geht z. B. $\frac{T}{R}$ in $\frac{T}{R-\frac{1}{4}}$ über und wird größer als $\frac{T}{R}$ sein. Nimmt man dessenungeachtet dafür zunächst B an, so wird der Rest $\frac{1}{4}$B verbleiben, der noch durch R — $\frac{1}{4}$ zu dividiren wäre, so daß

$$B^{\frac{2}{2}} = B + \frac{B}{R-\frac{1}{4}},\quad B^{\frac{4}{4}} = B + \frac{\frac{3}{8}\times B}{R-\frac{3}{8}},\quad B^{\frac{12}{12}} = B + \frac{\frac{15}{32}\times B}{R-\frac{15}{32}}$$ wird.

Will man in den vorhergehenden Quotienten $\frac{T}{R-\frac{1}{4}}$ statt der baaren Werthe der Sterbethaler und der Leibrenten die abgezinsten Zahlen der Lebenden und der Sterbenden einführen, so hat man Zähler und Nenner mit der abgezinsten Zahl der Lebenden des Aufnahmealters zu multipliciren, wodurch $\frac{1}{4}$ diese Zahl als Faktor bekommt und z. B.

$$B^{\frac{2}{2}}(21) = \frac{3762.51}{71.3035 - \frac{1}{4} \times 213.273}$$

ist. Sollen demnach die Beiträge nicht lebenslänglich, sondern nur entweder bis zum fünfundsechzigsten Lebensjahre oder dreißig Jahre lang gezahlt werden, so erhält man resp.

$$\frac{71.3035}{3762.51 - 101.93 - \frac{1}{4} \times (213.27 - 12.66)}$$

und

$$\frac{71.3035}{3762.51 - 455.74 - \frac{1}{4} \times (213.27 - 39.39)}$$

und bei der früher fallenden oder steigenden Scala

$$\frac{71.3035}{3 \times 3762.51 - 2041.73 - 1024.89 - 455.74 - \frac{1}{4} \times (3 \times 213.27 - 128.37 - 73.50 - 39.39)}$$

$$\frac{71.3035}{3762.51 + 2041.73 + 1024.89 - 455.74 - \frac{1}{4} \times (213.27 + 128.37 + 73.50 - 3 \times 39.37)}$$

welche Ausdrücke sich unter Umständen noch abkürzen lassen. In den Quotienten $\frac{1}{4} \times \frac{B}{R - \frac{1}{4}}$, $\frac{3}{8} \times \frac{B}{R - \frac{3}{8}}$, $\frac{15}{32} \times \frac{B}{R - \frac{15}{32}}$ sind die Werthe $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ und $\frac{15}{32}$ im Allgemeinen gegen R sehr klein, so daß dieselben weggelassen und kürzer

$$B^{\frac{2}{2}} = B + \frac{1}{4} \times \frac{B}{R},\ B^{\frac{4}{4}} = B + \frac{3}{8} \times \frac{B}{R} \text{ und } B^{\frac{12}{12}} = B + \frac{15}{32} \times \frac{B}{R}$$

gesetzt werden können. Man hat demnach nur B noch einmal durch R zu dividiren, um mit ziemlicher Genauigkeit beliebige Terminalbeiträge bestimmen zu können. Um über den Grad der Genauigkeit ein Urtheil zu gewinnen, nehme man den monatlichen Beitrag einer sechzigjährigen Person, bei welcher der Fehler am größten werden muß. Der genaue Beitrag ist $0.07310 + \frac{15}{32} \times \frac{0.07310}{9.9905 - \frac{15}{32}} = 0.07672$, während man nach den im obigen Tarife Col. A angegebenen Aufschlägen $0.07310 + \frac{15}{32} \times 0.00730 = 0.07652$, mithin 0.00020 zu wenig erhalten würde, d. h. nicht ganz 3 auf 1000. Dieser Fehler wegen war es nur nöthig, die Aufschläge in den beiden ersten Ziffern genau zu berechnen, so daß der passende Zuschlag im Kopf gefunden werden kann:

$$\frac{73}{32} = 2\frac{1}{4};\ 2\frac{1}{4} \times 15 = 34, \text{ d. i. } 340 \text{ der drei letzten Decimalen.}$$

Es kommt bei Lebensversicherungs-Anstalten häufig der Fall vor, daß die versicherte Summe nicht lebenslänglich, sondern nur, wenn der Tod während einer vorher festgesetzten Anzahl von Jahren eintritt, gezahlt werden soll. Der baare Werth dieses aufhörenden Sterbethalers ist z. B. bei 4% Zinsen

$$\underset{10}{T}(35) = T(35) - \frac{58.0361}{103.647} \times T(45)$$

(Seite 179), abgesehen vom Zahlungstermine. Der baare Werth der jährlichen Einzahlung 1 während dieser Zeit ist

$$R_{10}(35) = R(35) - \frac{58.0361}{103.647} \times R(45),$$

folglich der Beitrag

$$\frac{T(35) - \frac{58.0361}{103.647} \times T(45)}{R(35) - \frac{58.0361}{103.647} \times R(45)}$$

d. i.

$$\frac{T(35)}{R(35)} - \frac{\frac{58.0361}{103.647} \times \left\{\frac{T(35) \times R(45)}{R(35)} - T(45)\right\}}{R(35) - \frac{58.0361}{103.647} \times R(45)},$$

oder auch, wenn man den Zähler mit R(45) multiplicirt und dadurch dividirt

$$\frac{T(35)}{R(35)} - \frac{\frac{58.0361}{103.647} \times R(45) \times \left\{\frac{T(45)}{R(45)} - \frac{T(35)}{R(35)}\right\}}{R(35) - \frac{58.0361}{103.647} \times R(45)}$$

also:

$$B(35) - \frac{\frac{58.0361}{103.647} \times R(45) \times \left\{B(45) - B(35)\right\}}{R(35) - \frac{58.0361}{103.647} \times R(45)}$$

Setzt man B(35), B(45), R(35), R(45) $\frac{58.0361}{103.647}$ die betreffenden Werthe, so erhält man

$$0.02879 - \frac{0.55994 \times 13.0108 \times 0.03993 - 0.2879}{15.1175 - 0.55994 \times 13.0108} = 0.01842.$$

Diese Formel ist allerdings theoretisch wichtig, weil man daraus sieht, daß der baare Werth sämmtlicher Mehrzahlungen

$$\frac{58.0361}{103.647} \times R(45) \times \left\{B(45) - B(35)\right\}$$

ist; praktisch kommt man indeß leichter zum Ziele, wenn man sich der Colonnen c und d aus Tab. VII bedient, wodurch man sofort

$$\frac{45.1175 - 30.1540}{1566.68 - 755.10} = 0.0184$$

erhält.

Auf diese Art ist der nachstehende

Tarif für die jährlichen Beiträge bei zeitweiser Lebensversicherung

Aufnahmealter.	Dauer der Versicherung.							
	5	10	15	20	25	30	35	40
20	0.0104	0.0111	0.0118	0.0127	0.0134	0.0142	0.0151	0.0159
25	0.0118	0.0128	0.0140	0.0148	0.0158	0.0169	0.0179	.
30	0.0140	0.0156	0.0166	0.0177	0.0191	0.0202	.	.
35	0.0177	0.0184	0.0198	0.0215	0.0231	.	.	.
40	0.0194	0.0214	0.0238	0.0258	.	.	.	.
45	0.0240	0.0272	0.0296	.	.	.	.	.
50	0.0318	0.0343	.	.	.	.	.	.

berechnet, aus welchen man sieht, daß dieselben um so höher ausfallen, je länger die Versicherung gültig sein soll, daß also auch eine auf Beiträge eingerichtete Sterbekasse aus dem freiwilligen Abgang der Mitglieder im Allgemeinen nur Vortheil zu erwarten hat, weil dieselben allemal mehr eingezahlt haben, als für die Dauer ihrer Mitgliedschaft eigentlich erforderlich gewesen wäre.

Sollen die Zahlungen terminlich geleistet werden, so hat man im Nenner die früheren Correkturen anzubringen.

Alle bisher entwickelten Berechnungen gelten endlich nur für den Fall, daß das Sterbegeld am Anfange der Sterbejahre ausgezahlt würde, während für spätere Zahlungen dieselben Abzinsungen anzubringen sind, wie Seite 197 bei den baaren Werthen der Sterbethaler; denn aus der Formel $B = \frac{T}{R}$ ergiebt sich, daß es ganz dasselbe ist, ob man zuvor diese baaren Werthe oder erst jene Beiträge abzinst.

IV. Wittwen- und Waisen-Kassen.

Unter Wittwenkassen kann man im weitern Sinne des Wortes solche Vereine verstehen, welche einer bestimmten Person auf den Fall des Ablebens einer andern bestimmten Person Zahlungen irgend welcher Art versichern, und

gehören alsdann auch die Wittwenkassen im engern Sinne des Wortes, welche solche Zahlungen nur der überlebenden Ehegattin zusichern, dazu. Für solche Versicherungsanstalten lassen sich eine Menge Spielarten, sowohl im Betreff der Auszahlung als der Einzahlungen, erdenken und sollen die gebräuchlichsten hier durchgenommen werden.

1) Es versichert eine fünfunddreißigjährige Person ihr Leben zu Gunsten einer dreißigjährigen, d. h. falls diese Person die erstere überlebt, hat sie sofort nach dem Tode der andern den einmaligen Betrag 1 zu empfangen; wie solche Art von Versicherungen bei Lebensversicherungs-Anstalten so häufig vorkommen.

Würde das Kapital 1 am Anfange des betreffenden Sterbejahres herausgezahlt, so wäre der baare Werth der Versicherung bei 4% Zinsen (Seite 193) 0.2988. Die Zahlung soll und kann aber erst nach wirklich eingetretenem Todesfalle geschehen, folglich ist ihr baarer Werth (Seite 197) $\frac{0.2988}{1.02} = 0.2929$. Sollte dagegen die Versicherung seitens der dreißigjährigen Person zu Gunsten der fünfunddreißigjährigen geschehen, so wäre der baare Werth derselben nur $\frac{0.2409}{1.02} = 0.2362$. — Wird ausgemacht, daß die Zahlungen erst am Ende des Sterbejahres geschehen, aber gleichviel, ob die empfangsberechtigte Person alsdann noch lebe oder nicht, *wenn sie nur den Tod der andern Person erlebt hatte*, so sind die baaren Werthe derselben

$$\frac{0.2988}{1.04} = 0.2873 \text{ und resp. } \frac{0.2409}{1.04} = 0.2316.$$

Sollen endlich die Zahlungen am Ende des Sterbejahres der versichernden Person nur alsdann erfolgen, wenn die versicherte Person diesen Zeitpunkt gleichfalls erlebt, so kann man die baaren Werthe der Versicherung (Seite 195) durch

$$\frac{0.2988 - \frac{1}{2} \times 0.0077}{1.04} = 0.2836 \text{ und } \frac{0.2409 - \frac{1}{2} \times 0.0077}{1.04} = 0.2279$$

nahe genug ausdrücken, indem dabei nur die Voraussetzung zu Grunde liegt, daß, falls beide Personen im Laufe eines und desselben Jahres absterben, jede von ihnen mit gleicher Wahrscheinlichkeit zuerst sterben könne.

2) Diese baaren Werthe nebst den Verwaltungskosten und dem Aufschlage für das Risiko sind nun sofort einzuzahlen, wenn die Zahlung mit einem einzigen Male abgemacht sein soll; wünscht die versichernde Person dagegen jährliche Vorausbezahlungen zu leisten, so kann der Versicherungsverein mit Gewißheit nur so lange auf Zahlung rechnen, als auch die versicherte Person noch lebt, hat also den baaren Werth der Einzahlungen als Verbindungsrente, für das vorliegende Beispiel zu 12.3250, zu veranschlagen, so daß der jährliche Beitrag

bei Auszahlung unmittelbar nach dem Tode

$$(1)\quad \frac{0.2929}{12.3250} = 0.0238 \text{ und } \frac{0.2362}{12.3250} = 0.0192,$$

bei unbedingter Auszahlung am Ende des Sterbejahres der versichernden Person

$$(2)\quad \frac{0.2873}{12.3250} = 0.0233 \text{ und } \frac{0.2316}{12.3250} = 0.0188,$$

und bei bedingter Auszahlung am Ende des Sterbejahres der versichernden Person

$$(3)\quad \frac{0.2836}{12.3250} = 0.0230 \text{ und } \frac{0.2279}{12.3250} = 0.0185,$$

ist.

Die baaren Werthe des Sterbegeldes einer fünfunddreißigjährigen Person, unmittelbar nach eingetretenem Todesfalle zahlbar, sind

$$\frac{0.4353}{1.02} = 0.4268 \text{ und } \frac{0.3966}{1.02} = 0.3888;$$

die baaren Werthe der Lebensrenten resp.

$$15.1171 \quad \text{und} \quad 16.0846,$$

demnach der jährliche Beitrag

$$\frac{0.4268}{15.1171} = 0.0282 \text{ und } \frac{0.3888}{16.0846} = 0.0242,$$

so daß diese Beiträge für die unbedingte Versicherung die obigen für die Versicherung zu Gunsten einer bestimmten Person nicht allzusehr übertreffen, nur daß sie lebenslänglich zu zahlen sind.

3) Eine fünfunddreißigjährige Person will einer dreißigjährigen auf den Fall ihres Absterbens eine lebenslängliche jährliche Rente zum Betrage 1 durch Beiträge versichern; man verlangt die Höhe derselben zu wissen.

Der baare Werth der versicherten Pension ist (Seite 196) $R\binom{30}{35} = R(30) - R(35,30)$, der baare Werth der Verbindungsrente dagegen $R(35,30)$ folglich der jährliche Pränumerandobeitrag

$$B\binom{30}{35} = \frac{R(30)}{R(35,30)} - 1,$$

d. h. man erhält den jährlichen Pränumerandobeitrag für eine versicherte Wittwenpension, wenn man den baaren Werth der Lebensrente der Frau durch den baaren Werth der Verbindungsrente beider Personen dividirt und vom Quotienten 1 subtrahirt.

Statt der vorhergehenden Form läßt sich auch schreiben:

$$B\binom{30}{35} + 1 = \frac{R(30)}{R(35,30)},$$

so daß der um 1 vergrößerte jährliche Pränumerandobeitrag für

eine versicherte Wittwenpension mit dem baaren Werthe der Lebensrente der versicherten Person zunimmt, jedoch auch um eben so viel wächst, als die Verbindungsrente beider Personen fällt.

Hieraus sieht man denn auch, warum bei gleichem Altersunterschiede beider Personen der Beitrag um so höher ausfällt, je älter die Personen bereits geworden sind, aber auch um so höher, je mehr das Alter der versichernden Person das der versicherten Person übertrifft.

Nach der vorstehenden Regel ist der

Tarif der jährlichen Pränumerandobeiträge für die lebenslängliche jährliche Wittwenpension 1

Alter der Frau.	Alter des Mannes. 3 %	3½ %	4 %	Brune 4 %
	21			
16	0.2737	0.2524	0.2334	0.176
21	2490	2312	2151	163
26	2243	2101	1967	148
31	2016	1895	1858	133
36	0.1790	0.1693	0.1604	0.118
	26			
16	0.3261	0.3005	0.2784	0.215
21	2972	2755	2560	199
26	2685	2506	2344	181
31	2406	2268	2126	162
36	2136	2019	1911	143
41	0.1876	0.1783	0.1697	0.124
	31			
16	0.3908	0.3598	0.3323	0.296
21	3569	3309	3071	250
26	3229	3011	2814	229
31	2896	2717	2554	205
36	2572	2427	2295	181
41	2256	2143	2038	157
46	0.1957	0.1869	0.1787	0.134

Alter der Frau.	Alter des Mannes. 3 %	3½ %	4 %	Brune 4 %
	36			
16	0.4708	0.4332	0.3999	0.339
21	4310	3990	3704	318
26	3902	3642	3408	293
31	3511	3222	3092	264
36	3126	2942	2783	233
41	2736	2511	2468	202
46	2371	2263	2163	172
51	0.2034	0.1952	0.1874	0.144
	41			
16	0.5662	0.5205	0.4801	0.428
21	5197	4806	4456	405
26	4725	4399	4098	375
31	4251	3979	3732	341
36	3778	3559	3357	303
41	3312	3138	2978	263
46	2863	2729	2603	223
51	2447	2345	2249	186
56	0.2061	0.1984	0.1911	0.152

Alter der Frau.	Alter des Mannes. 3 %	3½ %	4 %	Brune 4 %
	46			
21	0.6484	0.5998	0.5565	0.521
26	5921	5510	5140	486
31	5352	5010	4699	445
36	4778	4500	4243	399
41	4204	3983	3778	348
46	3645	3473	3315	296
51	3123	2991	2869	246
56	0.2634	0.2536	0.2443	0.201
	51			
26	0.7372	0.6860	0.6399	0·637
31	6692	6263	5873	589
36	5999	5647	5325	532
41	5297	5015	4756	469
46	4614	4384	4180	402
51	3950	3783	3624	335
56	0.3332	0.3207	0.3089	0.274
	56			
31	0.8369	0.7712	0.7339	0.795
36	7532	7086	6678	726
41	6675	6321	5983	646
46	5818	5535	5272	559
51	5000	4782	4579	470
56	0.4217	0.4054	0.3901	0.386

Die Beiträge nach Brune sind sogenannte mittlere Beiträge, d. h. solche, bei welchen man sich vorstellt, daß sowohl die Einzahlungen als die Rückzahlungen ununterbrochen vor sich gehen (Seite 201), z. B. $B(\frac{16}{21}) = \frac{2.706}{15.373} = 0.176$. Will man Pränumerandobeiträge haben, so ist der Nenner (a. a. O.) noch um 0.500 zu erhöhen, so daß man $\frac{2.706}{15.873} = 0.171$, also noch etwas kleinere Werthe erhält.

berechnet.

Aus der Vergleichung der berechneten Preise nach Süßmilch und nach Brune sieht man, daß eine Witwenkasse, die ihre Beiträge nach Süßmilch berechnet, selbst einen etwas hohen Zinsfuß zu Grunde gelegt und bei einiger Frequenz für das Risiko nichts in Anschlag gebracht hat, dennoch wohl wird bestehen können, so daß in dieser Beziehung der Vorwurf der Gefahr bei den Wittwenkassen eben so unbegründet ist, wie bei den Sterbekassen.

4) Soll die Frau im ersten Jahre nach dem Tode des Mannes nicht zur Hebung kommen, so ist statt $R\binom{30}{35}$ (Seite 213)

$$\overset{1}{R}\binom{30}{35} = \frac{433}{439} \times \frac{R\binom{31}{35}}{1.04}$$

zu setzen. Nun ist aber nach Tab. VII C

$$R(31,35) = 12.3250 - 0.2 \times 0.4674 = 12.2315,$$

$$\text{also } R\binom{31}{35} = 15.9054 - 12.2315 = 3.6739$$

und

$$\frac{433}{429} \times \frac{R\binom{31}{35}}{1.04} = 3.4843,$$

folglich der jährliche Pränumerandobeitrag

$$(5) \quad \frac{3.4843}{12.3250} = 0.2827,$$

während er ohne das Carenzjahr

$$(4) \quad \frac{16.0846}{12.3250} - 1 = 0.3051$$

wäre.

5) Schließt man das Carenzjahr aus und substituirt statt dessen eine Probezeit, so ist (Seite 210) der jährliche Pränumerandobeitrag:

wenn die Frau gar nichts erhält, falls der Mann im ersten Jahre der Versicherung verstirbt, später aber sofort die volle versicherte Pension,

$$(6) \quad \frac{16.0846 - 0.2685}{12.3250} - 1 = 0.2833;$$

wenn die Frau nichts, die Hälfte und resp. die ganze Pension bezieht, je nachdem der Mann bereits im ersten, im zweiten Jahre der Versicherung, oder erst später verstirbt,

$$(7) \quad \frac{16.0846 - 0.3943}{12.3250} - 1 = 0.2730;$$

wenn die Frau nichts, ein Drittheil, zwei Drittheile, oder die volle Pension empfängt, je nachdem der Mann im ersten, zweiten, dritten Jahre der gemachten Versicherung oder später mit Tode abgeht

$$(8) \quad \frac{16.0846 - 0.5147}{12.3250} - 1 = 0.2633,$$

und endlich bei fünf Probejahren mit nichts, einem, zwei, drei, vier Fünftheilen und voll,

$$(9) \quad \frac{16.0846 - 0.7405}{12.3250} - 1 = 0.2449.$$

6) Soll neben der Probezeit auch das Carenzjahr beibehalten werden, so sind die so eben für die Probezeit gemachten Abzüge zu groß, weil dieselben nur für den Bezug der Pension unmittelbar nach dem Tode des Mannes richtig sind. Man erhält indeß für diesen Fall die richtigen Abzüge, wenn man in die Formel Seite 210 für jeden baaren Werth der Rente den auf ein Jahr abgezinsten Werth der um ein Jahr ältern Rente, multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, dieses Alter zu erreichen, also

statt $R(31) \ldots \frac{427}{433} \times \frac{R(32)}{1.04}$

" $R(32) \ldots \frac{421}{427} \times \frac{R(33)}{1.04}$

" $R(33) \ldots \frac{415}{421} \times \frac{R(34)}{1.04}$

u. s. w.

setzt, wodurch der genannte Werth in

$$\frac{427 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{R(32)}{1.04} + \frac{421 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{R(33)}{(1.04)^2} + \frac{415 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{R(34)}{(1.04)^3} + \cdots$$

übergeht, somit gerade um ein Jahr vorrückt. Da nun außer den a. a. O. bereits aufgeführten Zahlenwerthen noch

$$\frac{402 \times 7}{439 \times 409} \times \frac{14.9379}{(1.04)^5} = 0.1924$$

ist, so sind die Abzüge für die oben näher bedingten Probezeiten

auf 1 Jahr . . . 0.2516,
" 2 " . . . 0.3694,
" 3 " . . . 0.4821,
" 5 " . . . 0.6932,

die jährlichen Pränumerandobeiträge demnach

bei einjähriger Probezeit: $\frac{3.4843 - 0.2516}{12.3250} = 0.2623,$

" zwei " " $\frac{3.4843 - 0.3694}{12.3250} = 0.2527,$

" drei " " $\frac{3.4843 - 0.4821}{12.3250} = 0.2436,$

" fünf " " $\frac{3.4843 - 0.6932}{12.3250} = 0.2265.$

7) Soll außer den jährlichen Beiträgen noch ein Antrittsgeld als unzurückzahlbares Eigenthum der Kasse entrichtet werden, so ist dasselbe vom baaren Werthe der Ueberlebensrente resp. der Leibrente der versicherten Person zum vollen Betrage in Abzug zu bringen. Giebt indessen die Kasse das Antrittsgeld entweder beim Tode des Mannes oder der Frau zurück, so hat man

dasselbe zwar auch vom baaren Werthe der versicherten Pension zu subtrahiren, die Differenz aber wiederum nach den Seite 193 aufgestellten Formeln zu erhöhen. Ist demnach das Antrittsgeld der einjährigen Pension gleich und soll dasselbe entweder beim Tode des Mannes oder der Frau, aber nicht im entgegengesetzten Falle, zurückgezahlt werden, so beträgt die Erhöhung resp.

$$\frac{0.2988}{1.02} = 2929 \text{ und } \frac{0.2409}{1.02} = 0.2362;$$

folglich ist der jährliche Pränumerandobeitrag

beim unbedingten Verfall des Antrittsgeldes:

$$(11) \quad \frac{3.7596 - 1}{12.3250} = 0.2239,$$

falls das Antrittsgeld unmittelbar nach dem Tode des Mannes zurückgezahlt wird:

$$(12) \quad \frac{2.7596 + 0.2929}{12.3250} = 0.2477,$$

und endlich, wenn das Antrittsgeld beim Tode der Frau zurückgezahlt werden soll:

$$(13) \quad \frac{2.7596 + 0.2362}{12.3250} = 0.2431.$$

Die Berliner Allgemeine Wittwen-Pensions- und Unterstützungskasse zahlt beim Tode des Mannes den vierten Theil der versicherten Pension als Begräbnißgeld (ohne Erhebung eines Antrittgeldes); der baare Werth dieser Zahlung ist daher mit $\frac{1}{4} \times 0.2929 = 0.0732$ in Anschlag zu bringen, so daß sich der früher berechnete jährliche Pränumerandobeitrag auf

$$(14) \quad \frac{3.7596 + 0.0732}{12.3250} = 0.3110$$

steigert. Sollte dieses Begräbnißgeld beim Tode des von beiden Ehegatten zuerst sterbenden gezahlt werden, so fände man den baaren Werth dieser Zahlung

$$\frac{1}{4} \times \left\{0.2929 + 0.2362\right\} = 0.1323,$$

und der jährliche Pränumerandobeitrag betrüge

$$\frac{3.7596 + 0.1323}{12.3250} = 0.3158.$$

Die Königliche Preußische Allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt ließ sich von denjenigen Personen, die bei ihrer Aufnahme länger als ein Jahr verheirathet waren, neben dem Antrittsgelde und den sonstigen, dem A u f n a h m e-alter beider Ehegatten entsprechenden Beiträgen, noch sogenannte Retardatzinsen zahlen, die für jede 100 Thaler jährlicher versicherter Wittwenpension und jedes volle halbe Jahr seit der Verheirathung resp. 3 Thlr. 6 Sgr. und 4 Thlr. betrugen, je nachdem die Ehe seit länger als einem Jahr oder schon seit länger als fünf Jahren abgeschlossen war. Das Unbillige, was in dieser Forderung lag, leuchtet ein; denn bezahlt das Ehepaar die von ihm zu befürchtende Gefahr zum vollen

Betrage, so hat es nicht nöthig, für eine Vergangenheit nachzuzahlen, während welcher es der Kasse noch keine Gefahr bereitet hat. Auch hat meines Wissens nur eine einzige neuere Kasse diese Einrichtung nachgeahmt und die genannte Königliche Kasse dieselbe gegenwärtig aufgehoben, was gewiß schon längst geschehen wäre, wenn sich nicht gefunden, daß die Begründer der Anstalt trotz dieser Retardatzinsen den Tarif dennoch viel zu niedrig gestellt hatten.

8) Bis jetzt ist angenommen, daß die Beiträge während der ganzen Dauer der Verbindung zum unveränderlichen Betrage eingezahlt werden; jedoch lassen sich auch hierbei verschiedenartige Abänderungen anbringen.

Die Berliner Allgemeine Wittwen-Pensions- und Unterstützungs-Kasse verlangt die Beiträge nur bis zum vollendeten achtzigsten Lebensjahre des Mannes, so daß für das Paar (35,30) der baare Werth der aufhörenden Verbindungsrente (Seite 186) nur

$$12.3250 - \frac{69 \times 37}{439 \times 409} \times \frac{3.6249}{(1.04)^{45}},$$

oder, wenn man statt der lebenden Frauen die abgezinsten Werthe derselben setzt (Seite 226):

$$12.3250 - \frac{3.6421 \times 37}{135.352 \times 409} \times 3.6429,$$

d. i.

$$12.3250 - 0.002434 \times 3.6429 = 12.2368$$

ist, welcher Werth indeß von dem vollen so wenig abweicht, daß sich dadurch die Beiträge nur um ein Unbedeutendes erhöhen. In der That findet man statt der vorher unter den verschiedenen Nummern angegebenen Jahresbeiträge

$$(1)\ \frac{0.2929}{12.2368} = 0,0239, \quad \frac{0.2362}{12.2368} = 0.0193;$$

$$(2)\ \frac{0.2873}{12.2368} = 0.0235, \quad \frac{0.2316}{12.2368} = 0.0189;$$

$$(3)\ \frac{0.2836}{12.2368} = 0.0232, \quad \frac{0.2279}{12.2368} = 0.0186;$$

$$(4)\ \frac{3.7596}{12.2368} = 0.3072, \quad (5)\ \frac{3.4843}{12.2368} = 0.2847;$$

$$(6)\ \frac{3.4911}{12.2368} = 0.2853, \quad (7)\ \frac{3.3653}{12.2368} = 0.2750;$$

$$(8)\ \frac{3.2449}{12.2368} = 0.2653, \quad (9)\ \frac{3.0191}{12.2368} = 0.2467;$$

$$(10)\ \frac{3.2327}{12.2368} = 0.2642, \quad \frac{3.1149}{12.2368} = 0.2546;$$

$$\frac{3.0022}{12.2368} = 0.2453, \quad \frac{2.7911}{12.2368} = 0.2281;$$

$$(11)\ \frac{2.7596}{12.2368} = 0.2255;$$

$$(12)\ \frac{3.0525}{12.2368} = 0.2495, \quad (13)\ \frac{2.9958}{12.2368} = 0.2448;$$

$$(14)\ \frac{3.8187}{12.2368} = 0.3121, \quad (15)\ \frac{3.8919}{12.2368} = 0.3180.$$

9) Die hierselbst beabsichtigt gewesene Schreiber'sche Wittwenkasse wollte ihren Interessenten, für den Fall, daß die versicherte Ehefrau so lange

lebt, den festgesetzten Jahresbeitrag in allen Fällen funfzehn Jahre hindurch abfordern, so daß sich bis dahin, falls der Ehemann früher mit Tode abgegangen wäre, die Wittwe diesen Beitrag von der Pension kürzen lassen sollte. Es bestanden demnach die Einzahlungen aus der funfzehnjährigen Lebensrente der Frau und der funfzehn Jahr hindurch aufgeschobenen Verbindungsrente beider Ehegatten. Für das Paar (35,30) ist der baare Werth der erstern, wenn man des Folgenden wegen die indirekte Berechnung vorzieht,

$$16.0846 - \frac{58.0361}{135.352} \times 13.0108 = 16.0846 - 0.492518 \times 13.0108 = 10.5058$$

und der baare Werth der letztern

$$\frac{58.0361 \times 300}{135.362 \times 409} \times 9.2166 = 0.300400 \times 9.2166 = 2.7687,$$

folglich der baare Werth der ganzen Zahlung 13.2737 und offenbar größer als der baare Werth der bloßen Verbindungsrente, weil diejenigen lebenden Wittwen, deren Männer vor dem sechzehnten Jahre nach der Aufnahme gestorben sind, bis dahin noch die Beiträge fortzahlen, was bei der einfachen Verbindungsrente unterbleibt.

Hiernach findet man statt der vorher berechneten Beiträge

(4) 0.2832; (5) 0.2625; (6) 0.2630;
(7) 0.2535; (8) 0.2445; (8) 0.2274;
(10) 0.2435, 0.2354, 0.2262, 0.2103;
(11) 0.2079; (12) 0.2300; (13) 0.2257; (14) 0.2877; (15) 0.2932,

während auf die drei ersten Beispiele diese Art der Einzahlung nicht angewandt werden kann, da mit einer einzigen Rückzahlung das ganze Geschäft beendigt ist.

10) Die fallenden Beiträge werden sich bei Wittwenkassen noch wirksamer erweisen, als bei Sterbekassen (Seite 302), weil bei jenen das Ausscheiden der Mitglieder noch schneller vor sich geht, als bei diesen. (Vgl. die Tab. 3 und 30), und werden sich die Zahlen hier auf dieselbe Weise aus den Verbindungsrenten zusammensetzen, wie es a. a. O. aus den Lebensrenten der Fall war. — Setzt man daher fest, daß für das Paar (35,30) erst zehn Jahre hindurch der dreifache, sodann eben so lange der doppelte und endlich zehn Jahre hindurch der einfache Beitrag gezahlt, sodann aber gänzliche Befreiung vom Beitrage eintreten solle, so ist

$$R(35,30) = 12.3250$$

$$\underset{10}{R}(35,30) = \frac{77.9001 \times 339}{135.352 \times 409} \times 10.3517 = 0.477034 \times 10.3517 = 4.9382,$$

$$\underset{20}{R}(35,30) = \frac{42.2139 \times 255}{135.352 \times 409} \times 8.1437 = 0.194449 \times 8.1437 = 1.5835,$$

$$\underset{30}{R}(35,30) = \frac{19.9626 \times 162}{135.352 \times 409} \times 5.9459 = \underline{0.058413} \times 5.9458 = \underline{0.3437},$$

$$0.72990 \qquad\qquad 6.8654$$

folglich der baare Werth aller Einzahlungen

$$3 \times 12.3250 - 6.8654 = 30.1096,$$

und der einfache Beitrag

(1) 0.00973, 0.00784; (2) 0.00954, 0.00769; (3) 0.00942, 0.00756;
(4) 0.1245; (5) 0.1157; (6) 0.1159; (7) 0.1118; (8) 0.1078; (9) 0.1003;
(10) 0.1079, 0.1034, 0.0997, 0.0903;
(11) 0.0917; (12) 0.1014; (13) 0.0995; (14) 0.1268; (15) 0.1293.

Der dreifache Beitrag unter (4), nämlich 0.3735, ist nur um 21.60% größer, als der lebenslängliche Beitrag 0.3072, so daß sich diese Art der Beitragszahlung besonders solchen Ehemännern empfehlen dürfte, die zu besorgen haben, in den späteren Jahren ihr Einkommen geschmälert zu sehen; wohingegen die Zahlung der Beiträge nach einer steigenden Scala für Wittwenkassen noch weniger am Platze sein möchte, als für Sterbekassen.

11) Sollen die Beitrage nicht jährlich, sondern halbjährlich oder vierteljährlich zum voraus entrichtet werden, so ist in den Nennern von allen baaren Werthen der Renten resp. $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{8}$ zu subtrahiren.

Hierdurch erhält man resp. die Nenner:

bei Zahlung während der ganzen Dauer der Verbindung

$$12.3250 - 0.2500 = 12.0750;$$

und $12.3250 - 0.3750 = 11.9500;$

bei Zahlung bis zum vollendeten achtzigsten Lebensjahre des Ehemannes (Seite 314)

$$12.2368 - \frac{1}{4} \times (1 - 0.002434) = 11.9874$$

und $12.2368 - \frac{3}{8} \times (1 - 0.002434) = 11.8627;$

bei Zahlungen nach Art der Schreiber'schen Wittwenkasse

$$13.2737 - \frac{1}{4} \times (1 - 0.49252 - 0.30040) = 13.0755$$

und $13.2737 - \frac{3}{8} \times (1 - 0.49252 - 0.30040) = 12.9764;$

bei der fallenden Scala der Beiträge

$$30.1906 - \frac{1}{4} \times (3 - 0.72990) = 29.6228$$

und $30.1906 - \frac{3}{8} \times (3 - 0.72990) = 29.3389,$

woraus sich alsdann die Beiträge leicht finden lassen.

Bisher ist bei der jährlichen Verpflegung der Ueberlebenden eine lebenslängliche Verpflichtung seitens der Versicherungsanstalten vorausgesetzt worden; die *Waisenkassen* geben aber Gelegenheit, von einer nur *zeitweisen* Unterstützung zu sprechen. Hier ließen sich die jährlichen Ausgaben der Kassen als aufhörende Ueberlebensrenten, die Einnahmen dagegen als aufhörende Verbindungsrenten behandeln. In den meisten Fällen wird man indessen kürzer und übersichtlicher verfahren, wenn man die Berechnung ganz von neuem beginnt.

Will z. B. ein funfzigjähriger Mann für den Fall seines Absterbens einem neugebornen Kinde bis zum vollendeten zwanzigsten Lebensjahre den jährlichen Betrag 1 versichern, so sind dazu, Seite 117, Tab. 45 in Col. a die jährlichen Einzahlungen, in Col. b die jährlichen Ausgaben berechnet. Multiplicirt man dieselben vom zweiten Jahre ab mit den auf einander folgenden Abzinsungsfaktoren, so enthält, beim Zinsfuße von 4 °/₀ die nachfolgende

Berechnung zur Verpflegung eines neugebornen Kindes bis zum vollendeten zwanzigsten Lebensjahre

	Abgezinste Zahlen.				Abgezinste Zahlen.		
	Tab. 45, Col. a.	Tab. 45, Col. b.	Tab. 47, Col. b.		Tab. 45, Col. a.	Tab. 45, Col. b.	Tab. 47, Col. b.
	a	b	c		a	b	c
				Transport	1473789	223205	9291459
1	300000	6750	40500	11	75474	34638	2537726
2	209856	11440	137285	12	68848	36691	2898583
3	172339	15427	277689	13	62719	38253	3289634
4	149986	18978	455479	14	56729	39530	3676268
5	135821	22292	668157	15	51153	40722	4072238
6	121353	25166	931133	16	45966	41665	4458140
7	110235	27682	1217988	17	41607	42909	4934495
8	100136	29929	1526357	18	36668	43037	5293562
9	91129	31901	1850268	19	32514	43824	5653230
10	82934	33640	2186603	20	28664	43813	6090042
Latus	1473789	223205	9291459	Summa	1974131	628287	52195377

resp. in den Colonnen a und b die baaren Werthe dieser Einnahmen und Ausgaben. Soll daher nur eine einmalige Kapitalseinzahlung geleistet werden, so beträgt dieselbe

$$\frac{628287}{300000} = 2.0934;$$

werden dagegen jährliche Pränumerandobeiträge geleistet, so sind solche zu

$$\frac{628287}{1974131} = 0.3183$$

zu veranschlagen.

Verlangt man die jährliche Verpflegung des Kindes nur für den Fall, daß auch noch eine andere dreißigjährige Person (die Mutter) gestorben sei, die Beitragszahlung aber schon beim Tode des Mannes aufhöre, so sind die jährlichen Einnahmen und Ausgaben Tab. 47, resp. Col. a und b verzeichnet. Wie man sieht, sind die Einnahmen das 439fache der früheren und bedürfen daher keiner neuen Berechnung; die baaren Werthe der Ausgaben befinden sich dagegen in der vorhergehenden Berechnung Col. c. Aus denselben geht hervor, daß in diesem Falle die einmalige Einzahlung

$$\frac{52195377}{300000 \times 439} = 0.3963$$

der jährliche Pränumerandobeitrag aber

$$\frac{52195377}{1974131 \times 439} = 0.0602$$

betragen würde.

Hätte das Kind bereits das Alter von zwölf Jahren erreicht und sollte nach dem Absterben des fünfzigjährigen Mannes bis zum vollendeten zwanzigsten Lebensjahre mit dem jährlichen Betrage 1 erhalten werden, so sind die jährlichen Einnahmen und Ausgaben in Tab. 46, Col. a und b enthalten, deren baare Werthe sich in der nachfolgenden

Berechnung zur Verpflegung eines zwölfjährigen Kindes bis zum vollendeten zwanzigsten Lebensjahre

	Abgezinste Zahlen der Tab. 47	
	Col. a	Col. b
1	156900	4671
2	145580	8680
3	134273	12756
4	123573	16226
5	114414	19348
6	105424	22148
7	97014	24646
8	89150	26925
9	81799	28764
	1048127	144164

befinden, welche darthut, daß gegenwärtig die einmalige Einzahlung

$$\frac{144164}{156900} = 0.9188,$$

der jährliche Pränumerandobeitrag aber

$$\frac{144164}{1048127} = 0.1375$$

ausmachen würde und dürften sich diese Beträge nur wenig ändern, wenn das Kind einige Jahre jünger oder älter wäre, dagegen die Verpflegung um eben so viele Jahre früher aufhören oder länger fortgesetzt werden sollte.

Uebrigens bemerke ich nochmals, daß hier nur der bessern Vergleichung wegen die vollständigen Zahlen hingeschrieben sind, während man in der Praxis mit den fünf höchsten Ziffern vollkommen ausreicht. (Seite 120.)

Zieht man es vor, statt der jährlichen Speisung dem Kinde beim Tode des fünfzigjährigen Versicherers den Betrag 1 einmal auszahlen zu lassen, so bleiben die jährlichen Einzahlungen dieselben wie vorher, wogegen sich die Auszahlungen ergeben, wenn man Seite 67 die lebenden Kinder mit den sterbenden Männern multiplicirt und die Produkte gehörig abzinst. Bei der Gleichartigkeit im Absterben der Männer läßt sich die Rechnung indeß mit Zuhülfenahme der Tab VII auf folgende Weise kürzer ausführen. Da in den ersten zwölf Jahren jährlich 9, dann aber 10 Männer sterben, so beträgt für neugeborne Kinder der baare Werth der Abfindung (vgl. Col c in Tab. VII C):

$$9 \times (12431.5 - 6216.3) = 55937$$
$$10 \times (6216.3 - 3986.6) = 22297$$
$$\overline{78234}$$

demnach die einmalige Einzahlung

$$\frac{78234}{300000} = 0.2608$$

und der jährliche Pränumerandobeitrag

$$\frac{78234}{1964131} = 0.0396.$$

Für die zwölfjährigen Kinder beträgt daher der baare Werth der Abfindung

$$10 \times (62163 - 3986.6) = 22297,$$

also die einmalige Einzahlung

$$\frac{22297}{156900} = 0.1211$$

und der jährliche Pränumerandobeitrag

$$\frac{22297}{1048127} = 0.0213$$

Es wurde jedoch vorausgesetzt, daß die Beitragszahlung jährlich pränumerando geschähe; sie kann aber auch halbjährlich und vierteljährlich geleistet werden und lassen sich für diesen Fall die Beiträge leicht berechnen. Subtrahirt

man z. B. nach Seite 204 bei halbjährlicher Vorausbezahlung für 300000 ursprüngliche Mitglieder von dem baaren Werthe der Einnahme $\frac{1}{4} \times 300000 = 75000$, so würde dies heißen, daß von den 60390 anfänglichen Mitgliedern des letzten Jahres in der Mitte desselben nur noch 30195 Mitglieder beisteuern. Nun sind aber nach der Mortalitäts-Tabelle am Ende des zwanzigsten Geschäftsjahres noch $112 \times 491 = 54992$ verbundene Paare vorhanden, so daß im Laufe dieses Jahres nur 5398 ausscheiden und in der Mitte des Jahres noch $60390 - 2699 = 57691$ Beitragende, also $57691 - 30195 = 27496$ mehr vorhanden sind (Seite 205), welche 13748 Jahresbeiträge entrichten, deren baarer Werth am Anfange des neunzehnten Geschäftsjahres $\frac{13748}{1.02} = 13478.4$, demnach am Anfange des ersten Jahres $13478.4 \times 0.474642 = 6397$ ist, so daß nur $75000 - 6397 = 68603$ in Abzug zu bringen sind und der baare Werth der Einnahmen bei halbjährlicher Vorausbezahlung $1974131 - 68603 = 1905528$ beträgt. Demnach ist halbjährlich zu zahlen, wenn die Verpflegung des Kindes vom Absterben der funfzigjährigen Person allein abhängig sein soll:

$$\frac{628284}{2 \times 1905528} = 0.1648;$$

wenn die Verpflegung des Kindes vom Absterben beider Personen abhängen soll:

$$\frac{51295377}{2 \times 1905528 \times 439} = 0.0312.$$

Bringt man ferner bei vierteljährlicher Vorausbezahlung $\frac{3}{8} \times 300000 = 112500$ in Abzug, so setzt dies am Anfange der drei Quartale

resp. 45292.5, 30195.0, 15097.5

Zahler voraus, während es deren

resp. 59040.5, 57691.0, 56341.5

also

resp. 13748, 27496, 41244

mehr giebt. Der baare Werth dieser Mehrzahlungen beträgt

$$\frac{1}{4} \times \left\{\frac{13748}{1.01} + \frac{27496}{1.02} + \frac{41244}{1.03}\right\} \times 0.474642 = 9482,$$

der richtige Abzug also

$$112500 - 9482 = 103018,$$

und der baare Werth sämmtlicher Einzahlungen

$$1974131 - 103018 = 1871113;$$

demnach ist vierteljährlich zum Voraus zu bezahlen:

im erstern Falle

$$\frac{628284}{4 \times 1871113} = 0.0839$$

und im andern Falle

$$\frac{52195377}{4 \times 1871113 \times 439} = 0.0159.$$

Von der Bilanz, Vertheilung des Ausfalls und der Abfindung.

Wie bei jedem größern kaufmännischen Geschäfte ist es auch bei den nach richtigen Grundsätzen verwalteten Versicherungs-Anstalten erforderlich, von Zeit zu Zeit die Bilanz zwischen dem Soll und dem Haben aufzustellen, und ist diese nicht schwieriger, vielmehr sicherer und nach bestimmteren Grundlagen zu ziehen, als in vielen Verkaufsgeschäften anderer Art, bei welchen man der Abnutzung, so wie den zeitigen Verhältnissen und dem vermehrten oder verminderten Begehr des Publikums Rechnung zu tragen hat. Eine solche Bilanz ist aber alsdann unbedingt nothwendig, wenn bei einem Versicherungsverein der bisherige Tarif verändert werden soll, weil es sich dabei als erstes Erforderniß immer darum handelt, das richtige Gleichgewicht zwischen dem Soll und dem Haben (Seite 5) festzustellen.

Das Haben besteht nun 1) aus dem von den bisherigen Einzahlungen herrührenden Ueberschüssen angesammelten Vermögen des Betriebsfonds (S. 146), und, wo ein solcher vorhanden ist, des Reservefonds, so wie den noch offen stehenden Resteinnahmen und 2) bei Versicherungen auf Beitragszahlungen aus dem baaren Werthe der von den gegenwärtigen Mitgliedern noch zu erwartenden Beiträge; während das Soll aus den etwa vorliegenden Restausgaben und aufgenommenen Darlehnen, so wie aus dem baaren Werthe aller, an die gegenwärtigen Mitglieder noch fällig werdenden Auszahlungen besteht, mögen dieselben schon theilweise fällig geworden sein, oder erst späterhin fällig werden.

Die Bestände im Betriebs- und Reservefonds werden sich, wenn das Geschäft nur einigermaßen ordnungsmäßig geführt wird, immer mit Sicherheit aus den Büchern entnehmen lassen und sind dabei natürlich die vorhandenen Werthpapiere nach dem zeitigen Mittelcourse in ihrem Silberbetrage anzusetzen, die sonstigen ausstehenden Hypotheken- und andere Forderungen aber nach der

wahrscheinlichen Größe des wirklich eingehenden Betrages auszutaxiren. Da das erstere sehr einfach ist, das letztere aber von so individuellen Verhältnissen abhängt, daß sich dafür keine allgemeine Regeln aufstellen lassen, so werde ich immer den reellen Werth der vorhandenen Fonds ihrem Nominalwerthe gleich setzen, was bei gehöriger Vorsicht in der Anlegung der disponiblen Gelder auch meistentheils in der That der Fall sein wird.

Haben die vorhanden gewesenen Bestände begonnen abzunehmen, so fangen auch wohl die minder Kundigen an, an ihrer Hinlänglichkeit zu zweifeln; vermehren sich dieselben hingegen von Jahr zu Jahr durch Ueberschüsse der Einnahmen aller Art gegen die fällig gewordenen Ausgaben, so pflegen auch Personen von reiferem Urtheile den Verein als gesichert zu betrachten, und dennoch kann beides unrichtig sein. Für die Kapitalseinzahlungen bei Sterbekassen zeigt z. B. die, Seite 240 mitgetheilte Probe, daß der Betriebsfonds für neugeborne Kinder anfänglich rasch abnimmt, wiederum wächst, um hinterher abermals abzunehmen; oft nur, trotz dem, daß von 1000 solcher Kinder ausgegangen war, ganz unbedeutende Ueberschüsse aufweist, und dennoch am Ende ausreicht, auch für das letzte Mitglied das Sterbegeld auszuzahlen. Der Grund hiervon liegt offenbar darin, daß für die neugebornen Kinder der Bedarf anfänglich am größten ist, rasch abnimmt, mit dem zwanzigsten Lebensjahre wiederum zu steigen anfängt, um schließlich vom siebzigsten Lebensjahre ab ununterbrochen geringer zu werden. Dieselbe Ursache des veränderlichen Bedarfs kann nun bei der Versicherung auf Beitragszahlung noch auffallendere Erscheinungen hervorbringen. Der baare Werth der Lebensrente bei jährlicher Vorausbezahlung und dem Zinsfuße von 4% für neugeborne Kinder ist 12.4315, der eines Sterbegeldes von 100 Thlr. aber 54.27, folglich der jährliche Beitrag $\frac{54.27}{12.4315}$, d. i. etwas weniger als 4.366. Hiernach würden auf 1000 Neugeborne im Anfange des ersten Jahres 4366 eingezahlt werden, während die 250 im Laufe dieses Jahres Sterbenden schon 25000 Sterbegeld beanspruchen, so daß der Verein gleich vom Anfange an eine Schuldenlast von 20634 haben würde. Setzt man indeß die Rechnung fort, so ergiebt die nachfolgende

Probe für die Richtigkeit der Jahresbeiträge bei Sterbekassen.

Geschäftsjahr.	Jährliche Beiträge.	Jährliche Sterbegelder.	Jährliche Bestände nach Hinzutritt der Beiträge vor der Auszahlung der Sterbegelder.	Jährliche Bestände nach Hinzutritt der Beiträge nach der Auszahlung der Sterbegelder.	Jahreszinsen der Bestände à 4 %.	Zusammen.
	a	b	c	d	e	f
						Schulden.
0	4366	25000	(4366)	20634	825	21459
1	3274	8900	18185	27085	1083	28168
2	2886	4300	25282	29582	1183	30765
3	2698	2500	28067	30567	1223	31790
4	2589	1400	29201	30601	1224	31825
5	2528	1200	29297	30497	1220	31717
6	2475	1100	29242	30342	1214	31556
7	2427	900	29129	30029	1201	31230
8	2388	800	28842	29642	1186	30828
9	2353	700	28475	29175	1167	30342
10	2323	500	28019	28519	1141	29660
11	2301	400	27359	27759	1110	28869
12	2283	400	26586	26986	1079	28065
13	2266	400	25799	26199	1048	27247
14	2248	400	24999	25399	1016	26415
15	2231	400	24184	24584	983	25567
16	2214	400	23353	23753	950	24703
17	2196	400	22507	22907	916	23823
18	2179	400	21644	22044	882	22926
19	2161	400	20765	21165	846	22011
20	2144	500	19867	20367	814	21181
21	2122	500	19059	19559	782	20341
22	2100	500	18241	18741	750	19491
23	2078	500	17413	17913	717	18630
24	2056	500	16574	17074	683	17757
25	2035	500	15722	16222	649	16871
26	2013	500	14858	15358	614	15972
27	1991	500	13981	14481	579	15060
28	1969	600	13091	13691	548	14239
29	1943	600	12296	12896	516	13412
30	1918	600	11494	12094	484	12578

Geschäftsjahr.	Jährliche Beiträge.	Jährliche Sterbegelder.	Jährliche Bestände nach Hinzutritt der Beiträge vor der Auszahlung der Sterbegelder.	nach der Auszahlung der Sterbegelder.	Jahreszinsen der Bestände à 4%.	Zusammen.
	a	b	c	d	e	f
31	1890	600	10688	11288	451	11739
32	1864	600	9875	10475	419	10894
33	1838	600	9056	9656	386	10042
34	1812	600	8230	8830	353	9138
35	1786	700	7397	8097	324	8421
36	1755	700	6666	7366	295	7661
37	1725	700	5936	6636	265	6901
38	1694	700	5205	5905	236	6141
39	1663	700	4478	5178	207	5385
40	1633	700	3752	4452	178	4630
41	1602	700	3028	3728	149	3877
42	1572	700	2305	3005	120	3125
43	1541	700	1584	2284	92	2375
44	1511	700	864	1564	63	1627
45	1480	700	147	847	34	881
46	1449	800	(568)	232	9	241
						Vermögen.
47	1415	800	1174	374	15	389
48	1380	800	1769	969	39	1008
49	1345	800	2353	1553	62	1615
50	1310	900	2925	2025	81	2106
51	1270	900	3376	2476	99	2575
52	1231	900	3806	2906	116	3022
53	1192	900	4214	3314	132	3446
54	1153	900	4599	3699	148	3847
55	1113	900	4960	4060	162	4222
56	1074	900	5296	4396	176	4572
57	1035	900	5607	4707	188	4895
58	995	900	5890	4990	199	5189
59	956	900	6145	5245	209	5454
60	917	900	6371	5471	219	5690
61	878	900	6568	5668	227	5895
62	838	1000	6733	5733	229	5962
63	795	1000	6757	5757	230	5987

Geschäftsjahr.	Jährliche Beiträge.	Jährliche Sterbegelder.	Jährliche Bestände nach Hinzutritt der Beiträge vor der Auszahlung der Sterbegelder.	nach der Auszahlung der Sterbegelder.	Jahreszinsen der Bestände à 4%.	Zusammen.
	a	b	c	d	e	f
64	751	1000	6738	5738	229	5967
65	707	1000	6674	5674	227	5901
66	664	1000	6565	5565	222	5787
67	620	1000	6407	5407	216	5623
68	576	1000	6199	5199	208	5407
69	533	1000	5940	4940	198	5138
70	489	900	5627	4727	189	4916
71	450	900	5366	4466	178	4644
72	410	900	5054	4154	166	4320
73	371	800	4691	3891	156	4047
74	336	800	4383	3583	143	3726
75	301	700	4027	3327	133	3460
76	271	700	3731	3031	121	3152
77	240	600	3392	2792	112	2904
78	214	600	3118	2518	101	2619
79	188	600	2807	2207	88	2295
80	161	500	2456	1956	78	2034
81	140	400	2174	1774	71	1845
82	122	400	1967	1567	63	1630
83	105	400	1735	1335	53	1388
84	87	300	1475	1175	47	1222
85	74	300	1296	996	40	1036
86	61	200	1097	897	36	933
87	52	200	985	785	31	816
88	44	200	860	660	26	686
89	35	200	721	521	21	542
90	26	100	568	468	18	486
91	22	100	508	408	16	424
92	17	100	441	341	13	354
93	13	100	367	267	10	277
94	9	100	286	186	7	193
95	4	100	197	97		

daß sich zwar durch die Jahreszinsen und das Fälligwerden neuer Sterbegelder die Schulden in den ersten fünf Geschäftsjahren vermehren, von da ab indessen

wiederum die erforderlichen Jahresausgaben von den Einnahmen übertroffen werden, die Schuld ununterbrochen abnimmt und sich am Ende des siebenundvierzigsten Geschäftsjahres in Vermögen verwandelt.

Aus dieser Probe folgt zugleich, daß es kein Verein übernehmen kann, für allzu junge Kinder (bis zum neunten Lebensjahre) Sterbegelder gegen jährliche Beitragszahlung zu versichern, weil zu befürchten stände, daß, nachdem die Vorschüsse gemacht worden, die noch vorhandenen Mitglieder ausscheiden, um ihren Zweck bei einer andern Kasse wohlfeiler zu erreichen (vgl. Seite 39).

Die entgegengesetzten Ursachen werden natürlich entgegengesetzte Wirkungen hervorbringen. Ist der Bedarf nämlich anfänglich gering und wird nach und nach größer, so werden die durchschnittlichen Beiträge den anfänglichen Bedarf um so mehr übersteigen, je größer die Steigerung wird, im Allgemeinen also bei Waisenkassen mehr als bei Wittwenkassen (Seite 117) und hinwiederum bei diesen mehr als bei Sterbekassen (Seite 72), woraus denn folgt, daß sich selbst bei einem zu geringen Beitrage, falls er nur den Bedarf der ersten Jahre übersteigt, Bestände ansammeln werden. Gesetzt, eine Sterbekasse wollte an fünfunddreißigjährige Personen das Sterbegeld 100 gegen ein Antrittsgeld 1 und vierteljährliche Beiträge versichern. Da der baare Werth des Sterbegeldes, beim Zinsfuße von 4% und sofort nach erfolgtem Todesfalle fällig werdender Zahlung $\frac{43.5300}{1.02} = 42.6765$, der der Lebensrente bei vierteljährlicher Vorausbezahlung dagegen $15.1175 - 0.3750 = 14.7425$ (Seite 204) ist, so beträgt der Jahresbeitrag, unter Anrechnung des Antrittsgeldes 1, genau $\frac{41.6765}{14.7425} = 2.8270$. — Sind nun 818 solcher Personen in die Kasse eingetreten, so sterben davon in den ersten eilf Jahren jährlich 14, darauf vier Jahre hindurch je 16 und alsdann jährlich 18, und die Kasse würde, so lange die Zahl der Mitglieder multiplicirt mit 2.8270, größer ist als resp. 1400, 1600 und 1800, aus den eingehenden Jahresbeiträgen, nach Abzug der fällig werdenden Sterbegelder, Ueberschüsse ansammeln, wozu noch die Zinsen der bereits vorhandenen Bestände hinzukämen. Forderte man dagegen nur den jährlichen Beitrag 2 ab, so erfolgten die Ueberschüsse aus den Beiträgen nur, bis die Zahl der Mitglieder auf 900 gefallen wäre, welche überhaupt nicht vorhanden sind; alsdann, bis dieselbe auf 800 gefallen wäre, was nur im ersten Jahre der Fall sein würde, wenn nicht alsdann nur 14 Personen stürben, so daß sich schließlich Ueberschüsse ergeben werden, bis die Zahl der Mitglieder auf 700 gesunken ist; das will sagen, in den ersten acht Geschäftsjahren. Läßt man die Gesellschaft nicht sofort aussterben, so kann unter gleichen Bedingungen der Betriebsfonds durch Ueberschüsse der Beiträge über die Ausgaben noch längere Zeit hindurch wachsen, um sich am Ende um so unzureichender zu erweisen. Ist der Beitritt z. B. ein gleichmäßiger, so besteht der Verein nach eilf Jahren aus $818 + 804 + 790 + \cdots + 678$, d. h. $(818 + 678) \times \frac{11}{2} = 8228$ lebenden Mitgliedern

(Seite 14) und 14 × 11 = 154 Todesfällen, so daß der Betriebsfonds noch im Wachsthum begriffen ist. In den nächsten vier Jahren vermehrt sich der Verein um 664 + 648 + 632 + 616, d. f. (664 + 616) × $\frac{4}{2}$ = 2560 Mitglieder mit 64 Todesfällen, so daß derselbe am Anfange des funfzehnten Jahres aus 10788 Mitgliedern besteht, die 218 Todesfälle ergeben und den Betriebsfonds noch ferner wachsen lassen. In dem darauf folgenden Jahre würde der Verein endlich aus 11388 Mitgliedern mit 236 Todesfällen bestehen, und da nun durchschnittlich nur, wie sofort nachgewiesen werden wird, 11388 — $\frac{3}{8}$ × 236 = 11300.5 Beiträge à 2, d. f. 22601 eingehen, während 23600 auszuzahlen sind, so würde der Betriebsfonds von jetzt an abnehmen, wenn er nicht noch durch die Zinsen der bereits angesammelten Bestände eine Zeit lang, jedoch immer schwächer, nachwüchse, bis er endlich in raschere und raschere Abnahme geräth.

Es soll nun zunächst der Bestand des Betriebsfonds nach funfzehn Jahren des Bestehens der Kasse, unter Voraussetzung des gleichmäßigen Beitretens von jährlich 818 fünfunddreißigjährigen Personen und der angegebenen Mortalität berechnet werden. Will man sich hier der Wirklichkeit so viel wie möglich anschließen, so ist es, ohne sich allzu sehr zu zersplittern, unthunlich, bei mehrmaligen Einzahlungen und Auszahlungen im Laufe eines Jahres dieselben von Termin zu Termin gegenseitig aufzurechnen, wie solches in der Tab. 51 und 52 bei jährlicher Zahlung geschehen konnte; man hat vielmehr Ausgaben und Einnahmen getrennt zu berechnen. Hinsichtlich der Ausgaben für die Sterbegelder ist bereits Seite 197 bemerkt, daß die Zahlungen unmittelbar nach den eingetretenen Todesfällen der Zahlung in der Mitte des Jahres gleich kommen, so daß man diese Sterbegelder nur unter Hinzuschlag der Zinsen von der Mitte des einen Jahres bis zur Mitte des nächstfolgenden aufzurechnen und zum Betrage für das Jahr der Bilanzziehung noch die halbjährlichen Zinsen hinzuzufügen hat, wie solches in der nachfolgenden

Berechnung des baaren Bestandes bei einer Sterbekasse

Geschäftsjahr.	Lebende nach Süßmilch.	Sterbende nach Süßmilch.	Lebende bei der Sterbekasse.	Sterbende bei der Sterbekasse.	Ausgabebestände des laufenden und aller vorhergehenden Jahre.	Jahreszinsen der Bestände.	Durchschnittliche Einzahlungen im Laufe der Jahre.	Stückzinsen im Laufe der Jahre.	Die Einzahlungen betragen am Ende der Jahre.	Bestände aus dem laufenden und allen vorhergehenden Jahren.	Jahreszinsen der Bestände.
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
1	818	14	818	14	1400.0	56.0	812.8	20.3	833.1	833.1	33.3
2	804	14	1622	28	4256.0	170.2	1611.5	40.3	1651.8	2518.2	100.7
3	790	14	2412	42	8626.2	345.0	2396.3	60.0	2456.3	5075.2	203.0
4	776	14	3188	56	14571.2	582.9	3167.0	79.4	3246.4	8524.6	341.0
5	762	14	3950	70	22154.1	886.2	3923.8	98.3	4022.1	12887.7	515.5
6	748	14	4698	84	31440.3	1257.6	4666.5	116.9	4783.4	18186.6	727.5
7	734	14	5432	98	42497.9	1699.9	5395.3	135.2	5530.5	24444.6	977.8
8	720	14	6152	112	55397.8	2215.9	6110.0	153.1	6263.1	31685.5	1267.4
9	706	14	6858	126	70213.7	2808.5	6810.8	170.6	6981.4	39934.3	1597.4
10	692	14	7550	140	87022.2	3480.9	7497.5	182.8	7680.3	49212.0	1968.5
11	678	14	8228	154	105903.1	4236.1	8170.3	204.7	8375.0	59555.5	2382.2
12	664	16	8892	170	127139.2	5085.6	8828.3	221.2	9049.5	70987.2	2839.5
13	648	16	9540	186	150824.8	6033.0	9470.3	237.3	9707.6	83534.3	3341.4
14	632	16	10172	202	177057.8	7082.3	10096.3	253.0	10349.3	97225.0	3882.0
15	616	16	10788	218	205940.1	4118.8	10706.3	268.0	10974.6	112089.	.
16	600			1700	210059.	40058.9	89663.0	2241.4	91904.4		20184.2

Col. e und f geschehen. Die Berechnung der Einnahmen ist, der Abzüge für die Verstorbenen und der Stückzinsen wegen, verwickelter. In ersterer Beziehung fallen im zweiten Quartale ein Viertheil der im Laufe eines Jahres Sterbenden, im dritten Quartale zwei Viertheile und im vierten Quartale drei Viertheile, zusammen sechs Viertheile der Sterbenden mit dem Vierteljahrsbeitrage, d. i. drei Achtel der Sterbenden mit dem jährlichen Beitrage aus, so daß die am Anfange eines jeden Jahres vorhandene Zahl der Mitglieder um diese drei Achtel der Sterbenden zu kürzen ist, Col. g. An Stückzinsen wird für die Zahl der Mitglieder am Anfange eines jeden Jahres der erste Beitrag mit 4%, der zweite mit 3%, der dritte mit 2% und der vierte mit 1%, zusammen also die vier Quartal-Jahresbeiträge mit 10% verzinst, so daß man in dieser Beziehung die Stückzinsen erhält, wenn man die anfängliche Zahl der Mitglieder durch 40 dividirt. Hiervon gehen indessen noch ab, die Zinsen für die Vierteljahrsbeiträge im zweiten Quartal von einem Viertheil der Sterbenden mit 3%, im dritten Quartale von zwei Viertheilen mit 2% und im vierten Quartale von drei Viertheilen mit 1%, zusammen $\frac{10}{4}$%, so daß der Abzug $\frac{1}{160}$ der Sterbenden beträgt, der seiner Geringfügigkeit wegen allenfalls weggelassen werden könnte, in Col. h jedoch mit veranschlagt worden ist. Diese Stückzinsen,

zusammengenommen mit den Beträgen Col. g, geben dann in Col. i den Austrag der Beiträge am Ende eines jeden Jahres, welche nun Col. k und l, unter Hinzufügung der Zinsen vom Ende des einen Jahres bis zu dem des nächstfolgenden, zusammengerechnet werden können, da der Austrag der wirklichen Jahresbeiträge in allen Theilen den bisherigen Zahlen proportional ist.

Von der Richtigkeit dieses Ganges der Rechnung kann man sich auch durch die Probe überzeugen. Sterben nämlich von 818 Mitgliedern im Laufe eines Jahres 14, so kommen auf das Quartal 3.5 Todesfälle und es zahlen

im 1sten Quartal	818.0	macht	à 4% . . .	$\frac{1}{4} \times 850.72$
= 2ten	= 814.5	=	à 3% . . .	$\frac{1}{4} \times 838.93$
= 3ten	= 811.0	=	à 2% . . .	$\frac{1}{4} \times 827.22$
= 4ten	= 807.5	=	à 1% . . .	$\frac{1}{4} \times 815.57$
				$\frac{1}{4} \times 3332.44$
				833.1,

wie in der Berechnung Col. k.

Uebrigens versteht es sich vonselbst, daß man jede Gelegenheit benutzt, die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, weshalb überall die Summen der reinen Kapitale, so wie die der reinen Zinsen angegeben sind, um beide mit den Endresultaten vergleichen zu können.

Jedes neu beitretende Mitglied hat sofort 1 beim Eintritt zu zahlen und da funfzehn Jahre hintereinander 818 Mitglieder hinzugetreten sind, so ist der baare Werth der im voraus zu entrichtenden Zeitrente

$$818 \times 11.563123 = 9458.63,$$

folglich der funfzehn Jahre hindurch durch Zinsen angewachsene Werth derselben (Seite 166):

$$9458.63 \times 1.800944 = 17034.$$

Nach diesen Ermittelungen sind wir nun im Stande, den Kapitalbestand der Sterbekasse am Ende des funfzehnten Geschäftsjahres sowohl für den jährlichen Beitrag 2, als auch für den Beitrag 2.8270 anzugeben.

Für den jährlichen Beitrag 2 betragen

I. die Einnahmen:	1) aus den Antrittsgeldern nebst Zinsen und Zinseszinsen	17034
	2) aus den Beiträgen nebst Zinsen und Zinseszinsen 2 × 112089	224178
	zusammen	241212
II. die Ausgaben:	an Sterbegeldern nebst deren Zinsen und Zinseszinsen	210059
	bleibt Bestand	31153

Für den jährlichen Beitrag 2.8270 betragen

I. die Einnahmen:	1) an Antrittsgeldern nebst Zinsen und Zinseszinsen (wie vorher)	17034
	2) an Beiträgen nebst Zinsen und Zinseszinsen 2.8270 × 112089	316876
	zusammen	333910
II. die Ausgaben:	an Sterbegeldern nebst deren Zinsen und Zinseszinsen (wie vorher)	210059
	bleibt Bestand	123851

Dabei sind 15 × 818 = 12270 fünfunddreißigjährige Mitglieder aufgenommen, 1700 durch Tod ausgeschieden, so daß die Sterbekasse noch 10570 Mitglieder zählen wird, wenn nicht inzwischen andere freiwillig oder durch Exclusion ausgeschieden sind.

Das Durchschnittsalter der Mitglieder ist $35 + \frac{80520}{10570} = 42.6$, indem (vgl. Seite 34) die Summe der Summen der Lebenden, Tab. I, Col. f, für die doppelte Anfangszahl

$$2 \times (173859 - 59589 - 5 \times 4934) = 80520$$

ist, wie sich solches aus der später folgenden Vertheilung des Deficits Col. b direkt ergiebt.

Der Kapitalbestand sollte noch höher ausgefallen sein, wenn das durchschnittliche Aufnahmealter der Mitglieder größer als fünfunddreißig Jahr und die Zahlen der jährlich Aufgenommenen fallend gewesen wären; darf dagegen geringer sein, falls jenes Aufnahmealter unter fünfunddreißig Jahren gewesen wäre und das Eintreten neuer Mitglieder zugenommen hätte.

Ferner hat die Kasse beim jährlichen Beitrage 2.8270 in den abgelaufenen funfzehn Jahren an Zinsen erübrigt

von 253477	Beiträgen: 265634 — 253477 =	12157
12270	Eintrittsgeldern: 17034 — 12270 =	4764
von 265747	an baarem Gelde also	16921
	davon sind zurückzurechnen die Zinsen der fällig gewordenen Sterbegelder mit 20184 — 17000	3184
	bleiben	13737,

also fast den zwanzigsten Theil der baaren Einnahme.

Stellen wir uns vor, beide Kassen seien uns übergeben, um auf Grund der dargelegten persönlichen und finanziellen Verhältnisse die Bilanz für dieselben aufzustellen und, wenn nöthig, die geeigneten Abänderungen zur Herbeiführung der Lebensfähigkeit zu treffen. In der nachfolgenden

Berechnung der wahrscheinlichen Ausgaben und Einnahmen einer bereits bestehenden Sterbekasse

Alter der vorhandenen Mitglieder.	Anzahl der vorhandenen Mitglieder.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Baare Werthe der zu erwartenden Ausgaben.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Baare Werthe der zu hoffenden Einnahmen.
	a	b	c	d	e
50	600	0.5682	34092	11.4211	6853
49	616	5581	34379	11.6728	7190
48	632	5484	34659	11.9161	7531
47	648	5389	34921	12.1516	7874
46	664	5298	35179	12.3796	8220
45	678	5196	35229	12.6358	8567
44	692	5097	35271	12.8823	8915
43	706	5002	35314	13.1196	9262
42	720	4911	35359	13.3483	9611
41	734	4823	35401	13.5687	9959
40	748	4737	35433	13.7815	10309
39	762	4655	35471	13.9869	10658
38	776	4576	35510	14.1854	11008
37	790	4499	35542	14.3773	11358
36	804	4425	35577	14.5628	11808
	10570		527337		139123

sind Col. a die Zahlen der noch vorhandenen Mitglieder nach ihren verschiedenen Lebensaltern aufgeführt, Col. d die entsprechenden baaren Werthe der Lebensrenten bei vierteljährlicher Vorausbezahlung, und Col. e die Produkte der Zahlen in beiden vorhergehenden Colonnen, d. h. die baaren Werthe der wahrscheinlichen Einnahmen, in Summa 139123, für den jährlichen Beitrag 1, also für den Beitrag 2 278246
und für den jährlichen Beitrag 2.8270 . . . . 398301.

In der Col. b befinden sich die baaren Werthe der Sterbethaler für die am Rande genannten Alter und in der Col. c die hundertfachen Werthe dieser Produkte mit der entsprechenden Anzahl der Mitglieder Col. a, d. h. die baaren Werthe der wahrscheinlichen Ausgaben für Sterbegelder mit überhaupt 527337. Da indessen jene baaren Werthe für die Vorausbezahlung gelten, so sind die wirklichen Ausgaben nur zu $\frac{527337}{1.02} = 516997$ zu veranschlagen.

Beginnen wir daher mit der Sterbekasse nach richtigen Beiträgen, so ergiebt sich die

Bilanz für die Sterbekasse mit dem Beitrage 2.8270.

Soll.		Haben.	
an wahrscheinlichen Ausgaben für Sterbegelder	516997	1) an Bestand in Kassa . .	123851
		2) an wahrscheinlichen Einnahmen aus den Beiträgen	393301
			517152
			516997
		Bilanz:	155,

so daß der Ueberschuß etwa 3 auf 10000 beträgt und die Kasse in dieser Beziehung nichts zu wünschen übrig läßt.

Kommt es nicht darauf an, die genaue Bilanz zu ziehen, sondern nur den jährlichen Ueberschlag zu machen, so kann man dazu das durchschnittliche Alter der Mitglieder benutzen und 42.6 entweder für 43 rechnen, oder sich der Interpolation bedienen (Seite 29). Wählen wir das Letztere, so ist der baare Werthe der Lebensrente in vierteljährlicher Vorausbezahlung $13.3483 - 0.6 \times (13.3483 - 13.1196) = 13.2111$; demnach der baare Werth der wahrscheinlichen Einnahmen:

$13.2111 \times 10570 \times 2.8270 =$	394766
dazu der Bestand von	123851
giebt Aktiva	518617

der baare Werth des Sterbegeldes bei Vorausbezahlung beträgt: $0.4911 + 0.6 \times (0.5002 - 0.4911) = 0.4966$; demnach bei Bezahlung von 100 unmittelbar nach eingetretenem Todesfalle $\frac{4966}{1{,}02} = 48.69$,

also die Passiva: $48.69 \times 10570 =$	514653
Ueberschuß	3964

oder etwa 8 pro mille, so daß sich dieser Ueberschlag nicht allzusehr von der Wahrheit entfernt.

Wir gehen zunächst an die Aufstellung der

Bilanz für die Sterbekasse mit dem Beitrage 2.

Soll.		Haben.	
an wahrscheinlichen Ausgaben für Sterbegelder	516997	1) an Bestand in Kassa . .	31153
		2) an wahrscheinlichen Einnahmen aus den Beiträgen	278246
	309399		309399
Bilanz:	207598,		

so daß sich aus diesem Ausfalle die Lebensunfähigkeit des Geschäfts unzweifelhaft herausstellt.

Es fragt sich also, auf welche Weise dieser Ausfall zu decken sei? Das Erste, was sich hierfür darböte, wäre die Maßregel, die Beiträge sämmtlicher Mitglieder so weit zu erhöhen, daß das Gleichgewicht zwischen den Ausgaben und den Einnahmen hergestellt wird und ließe sich diese Art der Ausgleichung allenfalls damit rechtfertigen, daß sich die Mitglieder bei ihrer Aufnahme zu gleichmäßigen Beiträgen verpflichtet haben.

Es sind also zu Ausgaben erforderlich	516997
dazu findet sich ein Bestand vor von	31153
bleiben noch durch Beiträge zu decken	485844

und da nun der Beitrag 1 dem baaren Werthe 139123 entspricht, so hätte jedes Mitglied jährlich zu zahlen

$$\frac{485844}{139123} = 3.4922.$$

Jedes Mitglied hatte bei seiner Aufnahme 1 Eintrittsgeld gezahlt; diejenigen Mitglieder nun, welche den gegenwärtigen Beitrag zu hoch finden, werden sich nach einer Sterbekasse umthun, bei welcher sie kein weiteres Eintrittsgeld zu entrichten haben und dennoch wohlfeiler ihren Zweck erreichen. Aus den der nachfolgenden Vertheilung Col. i hinzugefügten Beiträgen sieht man, daß dies sämmtliche Mitglieder vom sechsunddreißigsten bis einschließlich sechsundvierzigsten Lebensjahre sind. Scheiden diese nun mit Verzichtleistung auf ihre Ansprüche an den Kassenbestand aus, so vermindert sich dadurch der baare Werth der Ausgaben, Col. c, auf

$\frac{314403}{1.02}$ = ...	308238
und bleiben nach Abzug des Kassenbestandes	31153
noch durch Beiträge zu decken	277085.

Da sich nun aber der baare Werth der Einnahmen, Col. e, gleichfalls auf 74023 vermindert, so hätten die noch zurückgebliebenen Mitglieder gegenwärtig jährlich zu zahlen

$$\frac{277085}{74023} = 3.7432,$$

demnach noch mehr als zuvor, ungeachtet ihnen der ganze Kassenbestand überlassen worden, und werden sich deshalb die Mitglieder im zweiundvierzigsten und dreiundvierzigsten Lebensjahre gleichfalls bewogen fühlen, auszuscheiden, so daß sich die Ausgaben abermals auf

$\frac{243730}{1.02}$ = ...	238951
ermäßigen und nach Abzug des Bestandes von	31153
nur noch zu decken bleiben	207798.

Da indeß der baare Werth der Einnahme gleichfalls auf 55150 herabsinkt, so würden die jährlichen Beiträge auf

$$\frac{207798}{55150} = 3.7679,$$

also zwar noch etwas höher als vorher, indeß doch so zu stehen kommen, daß die noch zurückbleibenden Mitglieder dafür bei keiner andern Sterbekasse Aufnahme fänden. Um indeß das Sachverhältniß allseitig zu erforschen, setzen wir voraus, daß die vierundvierzigjährigen und fünfundvierzigjährigen Mitglieder sich dennoch für den Austritt erklärten. Alsdann verringert sich der baare Werth der Ausgaben auf

$\frac{173230}{1.02} =$ 169833,
ab der Bestand von 31153
bleiben noch zu decken 138680,

und da der baare Werth der Einnahmen für den jährlichen Betrag 1 auf 37668 fällt, so ist der Jahresbeitrag nur

$$\frac{138680}{37668} = 3.6816,$$

also kleiner als vorher. Daß es einmal dahin kommen mußte, leuchtet ein; denn sobald die jüngsten Mitglieder weniger zu zahlen haben als den normalmäßigen Beitrag, so kann dieses nur von einem gewissen Antheil an dem vorhandenen Kassenbestande herrühren und dieser Antheil geht beim Austritte der jüngeren Mitglieder auf die älteren über, wodurch sich deren Zahlungsverbindlichkeit verringert. Gerade umgekehrt verhält es sich dagegen, so lange die jüngeren Mitglieder noch mehr als den ihrem gegenwärtigen Alter angemessenen Beitrag zahlen sollen; trotz des Antheils an dem vorhandenen Kassenbestande übernehmen sie noch einen Theil der Verpflichtungen für die älteren Mitglieder, wogegen sie sich als unbillig sträuben und durch ihren Austritt die Last für die älteren Mitglieder vergrößern.

Hieraus ergiebt sich, daß man im Falle der Unzulänglichkeit einer solchen Kasse eben sowohl praktisch unrichtig als theoretisch unbillig handeln würde, wollte man den Ausfall unter alle Mitglieder gleich vertheilen.

Dennoch läßt es sich nicht leugnen, daß das Grundprincip der Kasse eine gleiche Beitragsleistung war, welche man, ohne daß die Kasse geschlossen und ein völlig neuer Verein constituirt werden soll, um so weniger gänzlich verwerfen kann, als alle Mitglieder, der Voraussetzung nach, bei ihrem Eintritte gleichen Alters waren. Man wird demnach damit beginnen, allen Mitgliedern von jetzt ab den normalmäßigen Beitrag nach dem Aufnahmealter, 2.8270 abzufordern, und erhält alsdann als

baaren Werth der Ausgaben 516997,
baaren Werth der Einnahmen 1) an Bestand 31153
2) an Beiträgen 393301
424454
Ausfall 92543,
welcher nun der Billigkeit gemäß unter die gegenwärtigen Mitglieder zu vertheilen ist. Den nächsten Theilungsgrund würde die Dauer der Mitgliedschaft abgeben, weil während derselben alle Mitglieder zu wenig eingezahlt haben, also verhältnißmäßig um so viel weniger, als dieselben längere Zeit hindurch der Sterbekasse angehören.

Zu dem Ende sind in der nächstfolgenden

Vertheilung des Deficits unter die Mitglieder nach der Dauer der Mitgliedschaft

Dauer der Mitgliedschaft.	Zahl der Mitglieder.	Gesammtdauer der Mitgliedschaft.	Baare Werthe der Nachzahlungen.	Baare Werthe der Lebensrenten, vierteljährlich voraus.	Nachzuzahlende Beiträge.	Stammbeitrag.	Die Mitglieder haben überhaupt zu zahlen:	Baare Werthe der Einnahmen.	Normal-Beiträge.	Sterbegelder für den ferneren Beitrag 2.
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
15	600	9000	17.2410	11.4211	1.5097	2.8270	4.3367	29719	4.877	46.121
14	616	8624	16.0916	11.6728	1.3786		4.2056	30238	4.687	47.556
13	632	8216	14.9422	11.9161	1.2540		4.0810	30734	4.512	49.008
12	648	7776	13.7928	12.1516	1.1351		3.9621	31197	4.348	50.478
11	664	7304	12.6434	12.3796	1.0213		3.8488	31637	4.196	51.964
10	678	6780	11.4940	12.6358	0.9096		3.7366	32011	4.031	53.257
9	692	6228	10.3446	12.8823	0.8030		3.6300	32361	3.879	55.096
8	706	5648	9.1952	13.1196	0.7008		3.5278	32675	3.738	56.610
7	720	5040	8.0458	13.3483	0.6098		3.4298	32964	3.607	58.313
6	734	4404	6.8964	13.5687	0.5083		3.3353	33216	3.485	59.964
5	748	3740	5.7470	13.7815	0.4170		3.2440	33442	3.370	61.671
4	762	3048	4.5976	13.9869	0.3287		3.1557	33633	3.263	63.377
3	776	2328	3.4482	14.1854	0.2431		3.0701	33795	3.163	65.148
2	790	1580	2.2988	14.3773	0.1529		2.9799	33847	3.068	67.116
1	804	804	1.1494	14.5628	0.0789		2.9059	34313	2.979	68.803
		80520						485782		

die aus jedem Jahrgange noch vorhandenen Mitglieder Col. a mit der Dauer der Mitgliedschaft multiplizirt und die Produkte Col. b addirt, wodurch sich die Summe 80520 ergab, so daß der Betrag der Nachzahlung der Mitglieder für jedes Jahr der Mitgliedschaft $\frac{92543}{80520} = 1.1494$ ist und die einzelnen Beträge in Col. c zu sofortiger Nachzahlung außer dem künftigen Beitrage 2.8270 verzeichnet stehen. Will man den Mitgliedern diese Nachnahme nicht auferlegen, so kann

man auch den betreffenden Zuschlag zu den Beiträgen hinzufügen und hat zu dem Ende die Nachschüsse nur durch die baaren Werthe der Lebensrenten bei vierteljährlicher Vorausbezahlung, Col. d, zu dividiren. Fügt man diesen Zuschlägen, Col. e, den Hauptbeitrag 2.8270 hinzu, so erhält man Col. g die Beiträge, welche die Mitglieder je nach der Dauer ihrer Mitgliedschaft von jetzt ab zu zahlen haben würden. Um die Richtigkeit und Nothwendigkeit dieser erhöhten Beiträge durch die Probe darzuthun, sind dieselben wiederum mit den baaren Werthen der Einnahmen, Col. e der vorhergehenden Rechnung, multiplizirt, wodurch sich die baaren Werthe der wahrscheinlichen Einnahmen im Gesammtbetrage 485782
ergeben, die mit dem Bestande 31153
516935
ausmachen, was sehr wenig von dem baaren Werthe der wahrscheinlichen Ausgaben abweicht.

Wollen endlich die Mitglieder auf eine Erhöhung der Beiträge über 2 hinaus nicht eingehen, so haben sie sich eine verhältnißmäßige Kürzung des Sterbegeldes, z. B. die ältesten nach dem Verhältniß $4.3367 : 2 = 100 : x = 46.121$ gefallen zu lassen und sind diese Beträge Col. k aufgeführt; auch steht bei der größeren Frequenz der Sterbekasse dem nichts entgegen, den einzelnen Mitgliedern selbst die Wahl zu überlassen, ob sie die einmalige Nachzahlung leisten, in die Erhöhung der Beiträge willigen oder auf eine verhältnißmäßige Kürzung des versicherten Sterbegeldes eingehen wollen.

Vergleicht man die Col. g von jetzt ab geforderten Beiträge mit den normalmäßigen Beiträgen Col. i, die die Mitglieder ohne Einzahlung eines Antrittsgeldes nach ihrem gegenwärtigen Alter vierteljährlich zu pränumeriren hätten, so sieht man, daß jene Abforderungen durchweg geringer ausfallen als diese Beiträge und daher ein Mitglied, welches das Sterbegeld von 100 aufrecht zu erhalten entschlossen ist, keinen Grund hat, der reorganisirten Kasse eine andere vorzuziehen. Dennoch sind die Mitglieder noch nicht mit gleicher Billigkeit behandelt worden.

Die am Anfange des funfzehnten Geschäftsjahres eingetretenen Personen z. B. haben während der Dauer eines einzigen Jahres 2 statt 2.8270, also 0.8270 zu wenig gezahlt und sollen dafür 1.1494 nachzahlen, was gegen die Billigkeit verstößt, so daß noch zu ermitteln bleibt, wie viel eigentlich nachzuzahlen wäre.

Sämmtliche noch bei der Kasse befindliche Mitglieder haben im Laufe jedes Geschäftsjahres in jedem der vier Quartale $\frac{0.8270}{4}$ zu wenig gezahlt; dies beträgt am Ende des Jahres

$$\frac{0.8270}{4} \times (1.04 + 1.03 + 1.02 + 1.01) = 0.8270 \times 1.025 = 0.8477,$$

haben aber auch noch ihren verhältnißmäßigen Antheil für das, was die verstorbenen Mitglieder zu wenig gezahlt haben, da sie möglicherweise selbst dazu gehören konnten, zu entrichten. Ganz scharf sollten diese Personen eigentlich mit sämmtlichen gleichzeitig beigetretenen nur für diejenigen beisteuern, welche aus ihrer eigenen Mitte gestorben sind; da indessen der Unterschied nicht beträchtlich ist, kann man es wohl zugeben, daß sämmtliche zurückgebliebene Mitglieder für sämmtliche im Laufe eines Jahres verstorbene zu gleichen Theilen beitragen, jedoch immer nur während der Dauer der Mitgliedschaft, weil man vorauszusetzen hat, daß jedes Mitglied nur in dem guten Glauben an die Solvenz der Kasse beigetreten. Nun haben von den verstorbenen Mitgliedern jeden Jahrganges $\frac{0.8270}{4}$ zu wenig gezahlt: im ersten Quartale sämmtliche, im zweiten, dritten und vierten resp. drei, zwei und ein Viertel der Verstorbenen, macht für jedes derselben am Ende des Jahres

$$\frac{0.8270}{4} \times \frac{1}{4} \times (4.16 + 3.09 + 2.04 + 1.01) = 0.5324,$$

welcher Betrag noch bis zum Ende des funfzehnten Geschäftsjahres aufzuzinsen ist. Da nun im funfzehnten Geschäftsjahre auf 218 Verstorbene 10570 Mitglieder zurückgeblieben sind, so hätten die am Anfange des genannten Jahres eingetretenen Personen für die verstorbenen $\frac{0.5324 \times 218}{10570} = 0.0110$, im Ganzen also $0.8477 + 0.0110 = 0.8587$, nicht aber 1.1494 zu zahlen. — Sollten die Mitglieder nur das decken, was die Verstorbenen ihres eigenen Jahrganges zu wenig eingezahlt haben, so würde dies $\frac{0.5324 \times 14}{804} = 0.0093$ betragen, was von 0.0110 nur um 0.0017 abweicht.

Nach der vorhergehenden Probe kommen auf die lebenden Mitglieder beim

Beitrage 2	1666.2
dazu ihr eigener Zuschuß $0.8477 \times 804 =$	681.6
und der für die Verstorbenen $0.0093 \times 804 =$	7.4
zusammen	2355.2

was gerade 2.8270×833.1 ausmacht.

Auf dieselbe Weise ist für alle früheren Mitglieder während der ganzen Dauer ihrer Mitgliedschaft das zu wenig Eingezahlte zu berechnen, indem man zuerst vom Aufnahmejahre beginnt, den betreffenden Ausfall um ein Jahr aufzinst und das Resultat zu dem Ausfalle der im nächstfolgenden Jahre aufgenommenen Personen addirt. Man gelangt indeß noch kürzer zum Resultate, wenn man in der früheren Berechnung des finanziellen Zustandes die Zahlen Col. i, welche den Ertrag der Einnahme 1 am Ende eines jeden Jahres ergeben, mit dem Beitragsausfalle 0.8270 multiplizirt, wie solches in der nachfolgenden

Vertheilung des Deficits nach Verhältniß der bisherigen Mindereinzahlungen

Dauer der Mitgliedschaft.	Zahl der aus jedem Jahrgange zurückgebliebenen Mitglieder.	Zahl der aus dem Schlusse jedes Jahres vorhanden gewesenen und zurückgebliebenen Mitglieder.	Ausfall der Beiträge am Ende der Jahre.	Nachzahlungsbetrag für jedes Mitglied am Ende des betreffenden Jahres.	Aufzinsungsfaktoren.	Betrag am Ende des fünfzehnten Geschäftsjahres.	Die Mitglieder haben überhaupt nachzuzahlen.	Oder die Mitglieder haben Beiträge zu zahlen.	Baare Werthe der zu hoffenden Einnahmen.	Gesammtbeträge der Nachzahlungen.
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
15	600	600	689.0	1.1483	1.73168	1.9825	20.2097	4.5965	31500	12126
14	616	1216	1366.0	1.1234	1.66507	1.8705	18.2272	4.3885	31553	11228
13	632	1848	2031.4	1.0990	1.60103	1.7595	16.3567	4.1997	31628	10337
12	648	2496	2684.8	1.0756	1.53945	1.6558	14.5972	4.0283	31719	9459
11	664	3160	3326.3	1.0526	1.48024	1.5581	12.9414	3.8724	31831	8593
10	678	3838	3955.9	1.0307	1.42331	1.4670	11.3833	3.7279	31937	7718
9	692	4530	4573.7	1.0096	1.36857	1.3817	9.9163	3.5968	32065	6862
8	706	5236	5179.6	0.9873	1.31593	1.2992	8.5346	3.4775	32129	6025
7	720	5956	5773.6	0.9694	1.26532	1.2266	7.2354	3.3690	32379	5209
6	734	6690	6351.6	0.9494	1.21665	1.1551	6.0088	3.2698	32564	4410
5	748	7438	6926.1	0.9312	1.16986	1.0894	4.8537	3.1937	32924	3631
4	762	8200	7483.9	0.9127	1.12486	1.0267	3.7648	3.0961	32998	2868
3	776	8976	8028.2	0.8944	1.08160	0.9674	2.7376	3.0201	33245	2124
2	790	9766	8558.9	0.8764	1.04000	0.9115	1.7702	2.9501	33507	1398
1	804	10570	9076.0	0.8587	1.00000	0.8587	0.8587	2.8860	34078	690
									486057	92678

Col. c geschehen, so daß diese Zahlungen mit einem Schlage den ganzen Ausfall eines jeden Jahres angeben, welcher von sämmtlichen im Laufe desselben betheiligt gewesenen und zur Zeit der Bilanzziehung zurückgebliebenen Mitgliedern zu decken ist. Zu dem Ende sind Col. a die zurückgebliebenen Mitglieder aus jedem Jahrgange aufgeführt und in Col. b von oben herunter addirt, so daß diese Zahlen die bei jeder Jahresnachzahlung betheiligten Personen bedeuten; die Quotienten der Zahlen Col. c und b befinden sich in Col. d und bilden die Beträge, die von jedem Mitgliede für das Ende des betreffenden Jahres nachzuzahlen gewesen wären. Zinst man dieselben durch die Faktoren in Col. e auf den Termin der Bilanzziehung auf, so erhält man die einzelnen Beträge, die gegenwärtig jedes Mitglied für die ganze Dauer der Mitgliedschaft nachzuzahlen hat, während man die Hauptbeträge durch successives Addiren jener einzelnen Beträge von unten auf in Col. g findet. Man sieht daraus, daß nach dieser Art der Vertheilung für das vorliegende Beispiel die in den ersten fünf Jahren beigetretenen Mitglieder mehr, die übrigen weniger zu zahlen haben werden, als vorher. Sollen die erforderlichen Nachschüsse durch Beiträge ge-

deckt werden, so hat man dieselben durch die betreffenden baaren Werthe der Lebensrenten bei vierteljährlicher Zahlung zu dividiren und erhält alsdann, mit Hinzufügung des Stammbeitrags 2.8270 die, für die in den einzelnen Jahrgängen aufgenommenen Mitglieder erforderlichen Beiträge, Col. h. Multiplizirt man endlich diese letztern mit den baaren Werthen der Lebensrenten für sämmtliche, Col. a aufgeführte, noch vorhandene Mitglieder, wie dieselben in der Berechnung des finanziellen Zustandes Col. c angegeben sind, so erhält man Col. i die baaren Werthe der zu erwartenden Einnahmen im Gesammtbetrage 486057

dazu der Bestand	31153
giebt als Haben	517210
dagegen das Soll	516977
läßt den Ueberschuß	233

der etwa 25 auf 100000 ausmacht.

Man kann sich von der Richtigkeit der berechneten Zuschüsse auch auf die Weise überzeugen, daß man die sofort zu entrichtenden Beträge, Col. g, mit der Anzahl der zur Nachzahlung vorhandenen Mitglieder, Col. a, multiplizirt, und die Produkte der baaren Werthe sämmtlicher Nachzahlungen, Col. k, addirt, wodurch sich der Gesammtbetrag . . . . 92678 ergiebt, der das früher berechnete Defizit . . . . 92543 nur um 135 übertrifft.

Die vorstehende Art der Ausgleichung ziehe ich jeder andern vor und habe dieselbe besonders alsdann für die einzig billige erkannt, wenn die Mitglieder verschiedener Altersklassen verschiedene Beiträge zahlen, die aber alle oder größtentheils zu gering normirt waren. Jede andere Grundlage würde in diesem Falle den einen oder den andern Theil zu ungebührlichen Zahlungen heranziehen.

Hat man es mit einer Wittwenkasse zu thun, so wird die Bilanz auf dieselbe Weise gefunden, nur daß man bei den baaren Werthen der wahrscheinlichen Ausgaben die bereits fällig gewordenen Pensionen als Lebensrenten in Bezug auf die berechtigten Wittwen, die noch zu erwartenden Pensionen aber als Ueberlebensrenten in Bezug auf die betreffenden Ehepaare berechnet.

Findet sich eine Insolvenz vor, so wendet man, sowohl was die noch vorhandenen Ehepaare als die bereits entstandenen Wittwen betrifft, den Grundsatz der Vertheilung des Defizits nach Verhältniß der Mindereinzahlungen gleichmäßig an; denn was man auch von Seiten der Humanität dagegen einzuwenden vermöchte, *keine Wittwe kann im Falle einer Insuffizienz aus Gründen der Billigkeit mehr beanspruchen, als diejenige Höhe der Pension, die ihr nach richtiger Berechnung gewährt werden durfte.* Nur auf diesen Umstand allein, nicht aber darauf, wie lange

der verstorbene Ehemann den Beitrag gezahlt hat, kommt es an; denn wären von Hause aus Beitrag und Höhe der Pension in richtigem Verhältniß gewesen, so konnte letztere ohne Gefahr für die Kasse auch theilweise nach noch so kurzer Dauer der Mitgliedschaft gezahlt werden.

Um das Gesagte an einem Beispiele zu erläutern und zu vervollständigen, nehmen wir an, 409 × 439 d. s. 179551 fünfunddreißigjährige Männer haben ihren dreißigjährigen Ehefrauen eine Wittwenpension versichern lassen, dafür den Betrag der jährlichen Pension als Eintrittsgeld und 20% derselben als jährlichen Pränumerandobeitrag gezahlt und es würde verlangt, die Bilanz dieser Kasse nach dem vollendeten funfzehnten Geschäftsjahre zu ziehen.

Damit dafür wiederum eine bestimmte Unterlage gewonnen werde, setzen wir voraus, das Absterben sei bisher genau nach der Süßmilch'schen Mortalitäts-Tabelle erfolgt und berechnen danach zunächst den Bestand. Zur Vermeidung allzugroßer Zahlen bezeichnen wir den Betrag der jährlichen Pension durch 1. Für diesen Fall sind 179551 als Eintrittsgeld gezahlt, welche im Verlauf der funfzehn Geschäftsjahre durch Verzinseszinsung auf

179551 × 1.800944 = ... 323361

angewachsen sind. Da der Bestand der Kasse nach Verlauf von funfzehn Jahren gefunden werden soll, so hätte man zunächst die baaren Werthe der Ausgaben und Einnahmen zu berechnen und solche alsdann funfzehn Jahr aufzuzinsen. Man erlangt aber offenbar dasselbe Resultat auf kürzerem Wege, wenn man die baaren Werthe für 323361 beigetretene Ehepaare berechnet, weil diese die Aufzinsung schon mit enthalten.

Der baare Werth der funfzehn Jahre hindurch gezahlten Verbindungsrente für das Paar (35,30) ist (Seite 186):

$$12.3250 - \frac{58.0361 \times 300}{135.352 \times 409} \times 9.2166 = 9.4263,$$

folglich der baare Werth der Einnahmen seitens der Kasse am Ende des funfzehnten Geschäftsjahres

9.4263 × 323361 × 0.2 = ... 609618

wozu die obigen 323361

kommen, was zusammen giebt an Einnahmen 932979

Dagegen ist der baare Werth einer funfzehn Jahre hindurch gezahlten Lebensrente für eine dreißigjährige Person

$$\frac{2177.08 - 755.097}{135.352} = 10.5058,$$

und subtrahirt man hiervon den Werth für die aufhörende Verbindungsrente 9.4263, so bleibt der baare Werth für die in den ersten funfzehn Jahren gezahlten Wittwenpensionen 1.0795, so daß die während dieser Zeit gezahlten Pensionen zur Zeit der Bilanzziehung auf

1.0795 × 323361 = ... 349068

zu veranschlagen sind. Läßt man nun der Einfachheit wegen das Eintrittsgeld für der Kasse verfallenes Eigenthum gelten, so hat die letztere keine weiteren Ausgaben zu machen gehabt, so daß sich gegen die vorhergehenden Einnahmen 932979

der Bestand 583911

vorfindet.

Hätte sich eine andere Kasse unter sonst ganz gleichen Bedingungen den jährlichen Beitrag 0.2239 zahlen lassen, so ergäbe sich

Einnahmen:	an Antrittsgeld (wie vorher)	323361
	an Beiträgen: ⅕ × 2.2390 × 609618 =	682468
		1005829
Ausgaben:	an gezahlten Wittwenpensionen (wie vorher)	349068
Bestand:	= = = =	656761

Dabei waren in beiden Kassen noch

300 × 339 = 101700 Ehepaare von resp. funfzig und fünfundvierzig Jahren

und 109 × 339 = 36951 Wittwen von fünfundvierzig Jahren

betheiligt.

Nach diesen Unterlagen soll nun zuvörderst die Bilanz für beide Kassen gezogen werden.

Der baare Werth der Lebensrente für die fünfundvierzigjährigen Wittwen ist 13.0108, folglich der baare Werth der an die bereits vorhandenen Wittwen zu zahlenden Pensionen

13.0108 × 36951 = ... 480762

Der baare Werth der Ueberlebensrente für ein Ehepaar von resp. funfzig und fünfundvierzig Jahren ist 3.7942, folglich der baare Werth der aus den gegenwärtigen Ehepaaren noch hervorgehenden Wittwenpensionen

3.7942 × 101700 = ... 385870.

Andern Falls ist der baare Werth der Verbindungsrente für die vorhandenen Ehepaare 9.2166, also der baare Werth der noch zu erwartenden Beiträge

für den jährlichen Beitrag 0.2:

9.2166 × 101700 × 0.2 = ... 187466

und für den jährlichen Beitrag 0.2239:

⅕ × 187466 × 2.239 = ... 209868.

Hiernach ergiebt sich die

Bilanz der Wittwenkasse für den Beitrag 0.2239.

Soll.		Haben.	
1) an die gegenwärtigen Wittwen	480762	1) an Bestand	656761
2) an die künftigen Wittwen	385870	2) an zu erwartenden Beiträgen	209868
	866632		866629

balancirt.

Daß sich in diesem Falle die Ausgaben und Einnahmen gegenseitig decken würden, war vorauszusehen, indem für die ursprünglich beigetretenen Ehepaare der baare Werth der Wittwenrente 3.7596, der Eherente 12.3250, folglich der jährliche Beitrag, unter Berücksichtigung des Eintrittsgeldes 1 gerade $\frac{2\ 7596}{12.3250}$ = 0.2239 ist, wie vorausgesetzt worden.

Wären die Ehepaare nicht alle von gleichen Altersverbindungen, gleicher Beitrittszeit und gleichen Versicherungssummen gewesen, so würde das Geschäft der Bilanzziehung kein wesentlich anderes, sondern nur weitläuftiger geworden sein. In Bezug auf die versicherten Summen hätte man die geringste als Einheit genommen und statt jedes Ehepaar mit höherer Summe so viel Ehepaare mit geringster Summe gesetzt, als der Quotient der in Frage stehenden Summe durch die geringste anzeigte (Seite 236). Die verschiedenen Zeiten des Beitritts üben gar keinen Einfluß auf die Bilanz aus, da hierbei der Bestand, das Alter der bereits vorhandenen Wittwen und das gegenseitige Altersverhältniß der noch vorhandenen Ehepaare allein maßgebend sind. Die baaren Werthe der künftigen Zahlungen an die vorhandenen Wittwen hätte man entweder für jedes Alter besonders, nach dem Gesammtbetrage der auf dasselbe fallenden Wittwenpensionen, oder allenfalls nach nicht zu entfernt von einander liegenden Durchschnittsaltern berechnet. Eben so hätte man die baaren Werthe der noch zu erwartenden Beiträge und der noch bevorstehenden Wittwenpensionen für jede einzelne Altersverbindung der noch vorhandenen Ehepaare mit dem Gesammtbetrage der auf dieselbe fallenden versicherten Summen, oder auch nach Durchschnitten nicht allzu entfernt liegender Altersverbindungen gleicher Altersunterschiede ermittelt.

Ziehen wir gegenwärtig die

Bilanz der Wittwenkasse für den Beitrag 2.

Soll.		Haben.	
1) an Pensionen für die gegenwärtigen Wittwen . .	480762	1) Bestand	583911
2) an Pensionen für die künftigen Wittwen	385870	2) an Beiträgen	187466
			771377
(wie vorher)	866632		
	771377		
	95255		

welcher Ausfall zu decken bleibt.

Zu dem Ende sagt man gewöhnlich:

die gegenwärtigen Mitglieder beanspruchen an Pensionen für ihre künftigen Wittwen: 385870

und sind noch verpflichtet zu zahlen: 187466

also

Guthaben der gegenwärtigen Mitglieder: 198404

" " " Wittwen: 480762

679166

und da hierfür nur 583911

an Bestand vorhanden ist, so ist derselbe nach Verhältniß der beiderseitigen Guthaben unter die gegenwärtigen Mitglieder und die bereits vorhandenen Wittwen zu theilen, so daß die Theiler

$$\frac{198404}{679166} = 0.292129$$
$$\frac{480762}{679166} = 0.707871$$
$$1.000000$$

wären, und von dem Bestande käme

auf die gegenwärtigen Mitglieder: 583911 × 0.272129 = 170577

" " " Wittwen: 583911 × 0.707871 = 413334

583911.

Hiernach wäre der Kapitalsantheil jeder noch vorhandenen Wittwe:

$$\frac{413334}{36951} = 11.1860$$

und die jährliche Pension: $\frac{11.1860}{13.0108} = 0.8598.$

Indessen sind dabei meines Erachtens die vorhandenen Wittwen sowohl in Bezug auf die Mitglieder als unter sich unbillig behandelt.

Der ursprüngliche Vergleich hatte dahin gelautet, daß sich die verstorbenen Männer verpflichteten, außer dem Eintrittsgelde 1 den jährlichen Beitrag 0.2 lebenslänglich zahlen zu wollen, wogegen sich die Kasse verpflichtete, den Wittwen

derselben die lebenslängliche jährliche Pension 1 zu zahlen. Jenen Verpflichtungen ist in allen Theilen Genüge geleistet worden und mit dem Tode der Männer hat das Contraktverhältniß vollständig aufgehört; nur daß die Wittwen das volle Recht auf die lebenslängliche Pension erworben haben. Weist es sich hinterher aus, daß die Kasse zu wenig gefordert, so können die Wittwen nach dem Grundsatze der Billigkeit keine größere Pension beanspruchen, als ihnen für das Eintrittsgeld 1 und den jährlichen Beitrag 0.2 nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugesprochen sein sollte, und zwar vom Tode ihrer verstorbenen Männer ab. Für die der Wittwenkasse beigetretenen Ehepaare (35,30) entspricht dem jährlichen Beitrage 0.2 der baare Werth 0.2 $\times$ 12.3250 = 2.4650, dazu das Eintrittsgeld 1, giebt 3.4650, und da der baare Werth der Wittwenrente 3.7596 ist, so hätte den Ehefrauen nur eventuell die Pension $\frac{3.4650}{3.7596} = 0.9216$ versichert werden sollen. Die bereits vorhandenen Wittwen haben demnach vom Tage ihrer Wittwenschaft an jährlich 0.0784 zu viel erhoben und diesen Betrag mit Zinsen und Zinseszinsen zurückzuerstatten. In der nachstehenden

Berechnung der künftigen Pensionen bereits vorhandener Wittwen bei theilweise insolventen Kassen

Dauer der Mitgliedschaft.	Baare Werthe des Ueberhobenen am Ende des fünfzehnten Geschäftsjahres.	Summen der baaren Werthe.	Baarer Werth der Lebensrenten einer fünfundvierzigjährigen Person.	Jährlicher Abzug.	Betrag der künftigen Wittwenpension.
	a	b	c	d	e
15	1.4915		13.0108	0.1146	0.8070
14	1.3557			0.1042	0.8174
13	1.2252			0.0942	0.8274
12	1.0997			0.0845	0.8371
11	0.9790			0.0752	0.8464
10	0.8629			0.0663	0.8553
9	0.7513			0.0577	0.8639
8	0.6440			0.0495	0.8721
7	0.5408			0.0416	0.8800
6	0.4416			0.0339	0.8877
5	0.3462			0.0266	0.8950
4	0.2545	9.7379		0.0196	0.9020
3	0.1663			0.0128	0.9088
2	0.0815			0.0063	0.9153
1	0.0000			0.0000	0.9216
		0.5023			

sind Col. a die Werthe dieser Beträge für die verschiedenen Jahre der eingetretenen Wittwenschaft nach Art des künftigen Werthes einer Zeitrente berechnet. Die in irgend einem Jahre entstandene Wittwe hat nämlich bis zum nächsten Jahre nicht allein 0.0784 zu viel erhalten, sondern nach Hinzurechnung der Jahreszinsen 0.0031, . . . 0.0815 zu viel, wozu abermals der Betrag 0.0784 kommt, was zusammen 0.1599, oder mit den Jahreszinsen 0.0064, überhaupt 0.1663 ausmacht u. s. w. Jede noch vorhandene Wittwe hat nun entweder 1) den auf sie nach der Dauer der Wittwenschaft fallenden Betrag sofort zurückzuzahlen, wobei indeß keine solidarische Verpflichtung eintreten kann, so daß dasjenige, was die bereits verstorbenen Wittwen zu viel empfangen haben, als Verlust für die gegenwärtig noch beitragspflichtigen Mitglieder anzusehen wäre. Oder 2) jeder Wittwe wird der fällig gewordene Betrag sowohl, wie alle künftig fällig werdende Beträge durch zeitweise Vorenthaltung der Pension gekürzt, worauf wieder die volle Pension 1 gezahlt wird. Hier wird die Berechnung durch Versuche geführt. Die bereits im ersten Geschäftsjahre entstandene Wittwe hat, wie alle übrigen, ein Anrecht auf 0.9216 jährliche Pension, deren baarer Werth 0.9216 × 13.0108 = 11.9907 ist, und da sie 1.4915 erstatten soll, so ist der baare Werth der ihr verbleibenden Ansprüche 10.4992, dem durch eine aufgeschobene Leibrente Genüge zu leisten. Setzt man eine zweijährige Verzugszeit voraus, so ist der baare Werth der nach Ablauf derselben zu beziehenden Pension 1:

$$\frac{12.5266 \times 324}{339 \times (1.04)^2} = 11.0690,$$

so daß der Wittwe noch 11.0690 — 10.4992 = 0.5698 sofort nachzuzahlen bleiben. Wird die Zahlung drei Jahre ausgesetzt, so ist der baare Werth der alsdann fällig werdenden Pension

$$\frac{12.2911 \times 316}{339 \times (1.04)^3} = 10.1854,$$

so daß die Wittwe sofort noch 0.3138, oder nach Ablauf von zwei Jahren

$$\frac{339 \times 0.3138 \times (1.04)^2}{324} = 0.3551$$

als ersten Pensionsbetrag zu empfangen hätte. Endlich 3) die Wittwen lassen sich die indebite gezahlten Beträge von der Pension 0.9216 kürzen. In diesem Falle hat man, bei gleichem Lebensalter aller Wittwen, die in Col. a aufgeführten Beträge durch den baaren Werth der Lebensrente 13.0108 zu dividiren und die Quotienten, Col. d, von der normalmäßigen Pension 0.9216 zu subtrahiren, wodurch sich die in Col. e aufgeführten künftigen Pensionssätze ergeben. Aus diesen letzteren geht hervor, daß die jährlichen Pensionen um so höher ausfallen, desto später die Wittwenschaft eingetreten, natürlich aus dem Grunde, weil diese Wittwen in der früheren Zeit um so weniger zu viel erhalten haben. Vergleicht man diese Sätze mit dem früheren Durchschnittssatze für sämmtliche

Wittwen 0.8598, so sieht man, daß nach der gegenwärtigen Vertheilung die in den letzten neun Geschäftsjahren entstandenen Wittwen mehr, die früheren weniger als den Durchschnittssatz erhalten. So sehr letzteres auch zu beklagen, so liegt es doch in der Billigkeit.

Am Anfange des sechzehnten Geschäftsjahres sind aus den ersten eilf noch je 7 × 339 = 2373, und aus den nächstfolgenden drei Geschäftsjahren je 8 × 339 = 2712 Wittwen vorhanden, welche bereits zu viel erhoben und dafür (vgl. Col. b)

resp. 9.7379 × 2373 = ...	23108
und 0.5023 × 2712 = ...	1362
überhaupt	24470

zurückzuerstatten haben. Da nun nach der früheren Berechnung des gegenwärtigen Zustandes der Kasse die Wittwen überhaupt 0.0784 × 349068 = ... 27367

zu viel erhalten haben, so verursacht dies einen Verlust von nur . 2897, welcher unter die gegenwärtigen Mitglieder nach Verhältniß der an die während der Dauer ihrer Mitgliedschaft entstandenen Wittwen gezahlten Ueberschüsse zu vertheilen wäre. Da indessen, der gemachten Voraussetzung zufolge, sämmtliche Mitglieder gleichzeitig eingetreten sind, so hat man diesen Ausfall nicht besonders zu behandeln und kann dafür sagen: nach der früheren Bilanz beanspruchen die gegenwärtigen Wittwen an Pensionen

480762 × 0.9216 = ...	443070
und zahlen als Entschädigung zurück	24470
bleiben	418600
welche vom Bestande	583911
in Abzug gebracht, noch	165311
zum Besten der gegenwärtigen Mitglieder zurücklassen, wozu aber außerdem der baare Werth der fällig werdenden Beiträge von 0.2 jährlich mit	187466
hinzukommt, macht zusammen	352777,

und da nun für die künftigen Wittwen aus den gegenwärtigen Ehen die jährliche Pension 1 durch den baaren Werth 385870 repräsentirt wird, so kann man den künftigen Wittwen die Pension $\frac{352777}{385870} = 0.9166$ geben. Decken dagegen die Ehemänner noch den obigen Verlust 2897 an die verstorbenen Wittwen besonders, so lassen sich $\frac{355674}{317283} = 0.9216$ jährlich zahlen, gerade so viel, wie vorher berechnet worden. Aus dieser Uebereinstimmung folgt nicht allein die Richtigkeit der Rechnung, sondern gleichzeitig die des zu Grunde gelegten Princips der Vertheilung. Zwar ist in diesem Falle der Unterschied nicht allzu groß, — 418600 gegen 413334 baar, — er würde aber bei längerer Dauer

des Geschäfts oder noch geringerem jährlichen Beitrage viel größer ausgefallen sein.

Will man, daß den künftigen Wittwen die ursprünglich beabsichtigte Pension 1 gezahlt werden soll, so repräsentirt diese wiederum den baaren Werth 480762;
hierzu finden sich vor 165311
so daß durch Beiträge zu decken bleiben 315451
und da dem Beitrage 1 der baare Werth $5 \times 187466 = 937330$ entspricht, so wäre der jährliche Beitrag $\frac{315451}{937330} = 0.3365$ erforderlich, natürlich viel mehr als 0.2390, weil die Mitglieder auch noch für die Vergangenheit nachzuzahlen haben, während er ohne den obigen Ausfall 2897 auch noch 0.3334, also nur wenig geringer gewesen wäre.

Sind die Versicherungen des Sterbegeldes oder der Wittwenpensionen gegen Kapitalseinzahlung geschehen, so macht sich die Bilanz noch leichter, weil man es allein mit dem baaren Werthe der Einnahmen zu thun hat.

Bis jetzt ist vorausgesetzt worden, daß die Insuffizienz der Kassen allein von unrichtig festgesetzten Einzahlungen herrühre. Es können aber auch die Verpflichtungen der Mitglieder nach allen Regeln der Wissenschaft festgesetzt, und dennoch ein Manco aus einem zu hoch angenommenen Zinsfuße oder nicht der Annahme gemäß eingeschlagener Sterblichkeit hervorgegangen sein. Was die Ermittelung des wirklich von einem Vereine erzielten Zinssatzes betrifft, so ist das Verfahren dabei rein kaufmännischer Natur und gehört nicht zum Vorwurf dieser Schrift. Bei der Untersuchung in Bezug auf die Sterblichkeit hat man dagegen das Risiko und den Reservefonds, in welchem das Risiko verwaltet wird, mit zu berücksichtigen. Dies ist aber leichter gesagt als gethan, wiewohl die allgemeine Regel dafür schon von Tetens gegeben: Man berechne das Risiko nach dem gegenwärtigen Zustande des Versicherungsvereins; ist nun das Haben nebst den Beständen im Reservefonds größer als das Soll nebst dem gefundenen Betrage für das gegenwärtige Risiko, so ist mehr, als das Bedürfniß erfordert, vorhanden und der Ueberschuß darf anderweitig verwandt werden; steht beides im Gleichgewicht, so ist die Kasse für alle Eventualitäten als gesichert zu betrachten; fällt endlich der erstere Posten kleiner als der letztere aus, so erscheint die Kasse gefährdet und das Manco ist zu ersetzen. Die richtige Anwendung dieser Regel bietet aber Schwierigkeiten jeder Art dar. Um nur auf einen Punkt aufmerksam zu machen, was hat man unter „dem gegenwärtigen Zustande des Vereins, für welchen das Risiko berechnet werden soll" zu verstehen? Wollte man darunter nur die zur Zeit der Bilanzziehung in Kraft befindlichen Versicherungen begreifen, so würde einem blühenden Geschäfte, das jährlich eine Menge neuer Verträge abschließt,

Unrecht gethan; denn alle diese Verträge werden ihren Einfluß auf das gemeinschaftliche Risiko ausüben, und nur für einen völlig aussterbenden Verein dürfte man dasselbe in jenen engen Grenzen einschließen. Will man dagegen den Zugang neuer Mitglieder mit berücksichtigen, welches haltbare Princip hat man dafür zu Grunde zu legen? — Alles, was ich bisher in dieser Beziehung aufgefunden, steht theils noch zu vereinzelt da, oder ist anderntheils doch so wenig durchgebildet, daß es sich zu einer allgemeinen Darstellung noch nicht eignet, weswegen ich den Gegenstand für diesmal leider zu übergehen genöthigt bin und nur die längst bekannte Vorschrift wiederholen kann, die **Fonds der Kasse auf der Höhe zu erhalten, daß das Haben um mehrere Prozent größer ist als das Soll**, was indeß auch schon gegenwärtig die Vorsichtsmaßregel keineswegs ausschließt, **den Mitgliedern den möglichst zutreffenden Aufschlag für das Risiko abzufordern.**

Versichert sich eine dreißigjährige Person das Sterbegeld 100, unmittelbar nach eingetretenem Todesfalle zahlbar, vermittelst einer Kapitalseinzahlung, so hat sie dafür $\frac{43.53}{1.02} = 42.68$ zu erlegen; lebt die Person noch nach funfzehn Jahren, so ist unterdessen das eingelegte Kapital durch Zins und Zinseszinsen auf $42.68 \times 1.8009 = 76.86$ angewachsen. Wünscht der Versicherte nun, den Kontrakt rückgängig zu machen, so kann er natürlich nicht auf 76.86 Anspruch machen, sondern nur auf so viel, als nach Abzug der auf seinen Antheil gekommenen fällig gewordenen Sterbegelder übrig bleibt. Dieser Ueberschuß braucht indeß nicht besonders berechnet zu werden, indem er gerade so groß sein muß, daß davon durchschnittlich funfzigjährigen Personen das Sterbegeld 100 unmittelbar nach eingetretenem Todesfalle zugebilligt werden kann, also $\frac{56.82}{1.02} = 55.71$, immer noch ein Bedeutendes mehr, als die Person eingezahlt hatte.

Eben so, wenn ein fünfunddreißigjähriger Mann seiner dreißigjährigen Ehefrau die Wittwenpension von jährlich 100 vermittelst der Kapitalseinzahlung 279.2 versichert hat, so ist dasselbe nach funfzehn Jahren zwar auf $279.2 \times 1.8009 = 502.9$ angewachsen; wünscht aber der Versicherer zu dieser Zeit den Vergleich rückgängig zu machen, so kann er nicht diesen Betrag, sondern nur so viel zurückverlangen, als davon nach Auszahlung der auf seinen Antheil gefallenen Wittwenpensionen noch übrig geblieben ist, also gerade so viel, daß dafür ein funfzigjähriger Ehemann seiner fünfundvierzigjährigen Ehefrau eine Wittwenpension von jährlich 100 versichern könnte, 257.9. — In diesem Falle erhält der Versicherer also, trotz des funfzehnjährigen Verlustes an Zinsen,

weniger heraus, als vorher, weil bei einer Wittwenkasse der Bedarf schneller wächst, als bei einer Sterbekasse. Hieraus folgt: Soll ein durch Kapitalseinzahlung abgeschlossenes Geschäft nach Verlauf einiger Zeit rückgängig gemacht werden, so ist die reine Abfindung gleich dem Betrage, vermittelst dessen das Geschäft bei dem gegenwärtigen Alter der einwirkenden Personen nach der strengen Rechnung abgeschlossen werden könnte, und macht es dabei keinen Unterschied, ob dieser Betrag größer oder kleiner sei, als der ursprüngliche Einkaufspreis.

Als ferneres Beispiel zur Ergänzung des früher Gesagten habe eine Person ihr Alter dergestalt gesichert, daß ihr von einem gewissen Lebensjahre ab eine jährliche Pension von 100 in vierteljährlicher Vorausbezahlung gewährt werden soll, und trage dieselbe nach vollendetem fünfundvierzigsten Lebensjahre auf Abfindung an: wie hoch ist dieselbe nach der strengen Rechnung zu bemessen?

Der baare Werth der Versicherung beträgt im Augenblick des Fälligkeitstermines, wenn derselbe eintreten sollte

mit dem vollendeten 55sten Lebensjahre: $100 \times (10.6394 - 0.3750) = 1026.44$
" " " 60sten " $100 \times (9.3422 - 0.3750) = 896.72$
" " " 65sten " $100 \times (8.0527 - 0.3750) = 767.77.$

Setzt man demnach statt der Zahlen der Lebenden die abgezinsten Zahlen derselben, so ist die Abfindung

im 45sten Lebensjahre

für das 55ste Lebensjahr: $\frac{29.4923}{58.0361} \times 1026.44 = 521.61$
" " 60ste " $\frac{19.9626}{58.0361} \times 896.72 = 308.44$
" " 65ste " $\frac{12.6576}{58.0361} \times 767.77 = 167.62.$

Es habe eine fünfunddreißigjährige Person sich ein unmittelbar nach eingetretenem Todesfalle zahlbares Sterbegeld 100 für den jährlichen Pränumerandobeitrag $\frac{42.68}{15.1175} = 2.8232$ versichert und wünsche den Vertrag nach dem vollendeten funfzigsten Lebensjahre aufgehoben zu wissen: wie groß ist die Abfindung?

Die funfzigjährige Person könnte nach dem Vorhergehenden die Abfindung 55.71 verlangen, wenn sie selbst nicht noch verpflichtet wäre, lebenslänglich 2.8232 am Anfange eines jeden Jahres zu zahlen. Da nun der baare Werth dieser Zahlungen $11.7961 \times 2.8232 = 33.30$ ist, so ist die Abfindung $55.71 - 33.30 = 22.41$, wofür man jedoch auch

$$55.71 - 11.7961 \times 2.8232 = \left(\frac{55.71}{11.7961} - 2.8232\right) \times 11.7961$$

schreiben kann und da nun $\frac{55.71}{11.7961}$ der jährliche Beitrag einer funfzigjährigen Person für das Sterbegeld 100 ist, so hat man von demselben nur 2.8232 zu

subtrahiren und die Differenz mit 11.7961 zu multipliciren. In der That ist $\frac{55.71}{11.7961} = 4.7227$, $4.7227 - 2.8232 = 1.8995$, $1.8995 \times 11.7961 = 22.41$, wie vorher.

Hat eine fünfunddreißigjährige Person ihr Leben mit 100 gegen jährliche Vorausbezahlung versichert, so ist die Police im Augenblick des Empfanges auch nur 2.8232 werth, obgleich dafür, wegen der Verwaltungskosten und des Risikos, ein höherer Betrag gezahlt sein wird. Man sieht daraus, wie thöricht die Leute sind, welche glauben, auf solche Police allein ein verhältnißmäßig hohes Darlehn aufnehmen zu können. Würde der Gläubiger gezwungen, den Vertrag aufrecht zu erhalten, so hätte er nach aller Wahrscheinlichkeit hierfür mehr hinzugeben, als er zurückzuerhalten hoffen darf. Ein solches Unterpfand hat für den Darlehnsgeber nur dann einen Werth, wenn er gesichert ist, im Falle des Lebenbleibens seines Schuldners befriedigt zu werden, das Pfand also nur gegen den unvermutheten Todesfall schützen soll.

Ein fünfunddreißigjähriger Mann hat seiner dreißigjährigen Ehefrau eine jährliche Wittwenpension von 100 für den jährlichen Pränumerandobeitrag $\frac{279.25}{12.3250} = 22.6574$ versichert und beantragt nach funfzehnjähriger Mitgliedschaft die Abfindung: wie hoch wird sich dieselbe belaufen? — Der funfzigjährige Mann ist noch verpflichtet, während der ganzen Dauer seiner Ehe mit der fünfundvierzigjährigen Frau jährlich 22.6574 zum voraus zu entrichten, und beträgt der baare Werth dieser Zahlungen $9.2166 \times 22.6574 = 208.8$, und weil derselbe nach dem Vorhergehenden 257.9 zu beanspruchen hat, so kann er nur $257.9 - 208.8 = 49.1$ zurückerhalten. Schreibt man hierfür wieder

$$257.9 - 9.2166 \times 22.6574 = \left(\frac{257.9}{9.2166} - 22.6574\right) \times 9.2166$$

$= (27.9930 - 22.6574) \times 9.2166 = 49.1$, so hat man gleichfalls den ursprünglichen Beitrag von demjenigen, welchen der Mann gegenwärtig zu zahlen hätte, subtrahirt und die Differenz mit dem baaren Werthe der gegenwärtigen Verbindungsrente multiplicirt.

Aus den vorhergehenden beiden Beispielen folgt, daß **die Abfindung für eine Versicherung auf Beitragsfuß gefunden wird, wenn man von dem, den ablösenden Altern entsprechenden baaren Werthe der Versicherung den baaren Werth der noch vorhandenen Zahlungsverbindlichkeiten subtrahirt.** Sind diese Zahlungsverpflichtungen ununterbrochen dieselben, z. B. im unveränderlichen Betrage lebenslänglich, oder bis zu einem bestimmten Alter aller Versicherer, so findet man auch die Abfindung, **wenn man von dem Beitrage, der nach den gegenwärtigen Altern zu zahlen wäre, den bisherigen Beitrag subtrahirt und die Differenz mit dem baaren Werth der betreffenden Einzahlungsrente multiplicirt.**

Die Abfindung ist eine Bilanz, die der Verein in Beziehung auf das ausscheidende Mitglied allein zieht; sie giebt also zugleich den Gewinn an, den der Verein von einem freiwillig ausscheidenden oder auf Grund der Statuten excludirten Mitgliede macht. Geschah der Einkauf auf Kapitalsfuß, so kann dieser Gewinn ziemlich beträchtlich sein, wogegen er bei Beitragszahlung in den meisten Fällen verhältnißmäßig gering ist, da er nur aus den Ueberschüssen und deren Zinsen besteht, die der Versicherer bisher über den jeweiligen Bedarf eingezahlt hat. Diese Abfindung ist es eben, die für jedes Mitglied im Betriebsfonds vorhanden sein muß, damit aus derselben und den von dem Mitgliede noch zu erwartenden Einzahlungen die auf dasselbe fallenden Auszahlungen bestritten werden können, und diese Abfindung zahlt jeder solid eingerichtete Verein den Mitgliedern zurück, wenn derselbe aus andern als finanziellen Rücksichten in seinen Geschäften inne zu halten genöthigt wird. Mit derselben und dem bisher gezahlten Beitrage pflegen alsdann auch die Mitglieder bei einem andern, gleiche Zwecke verfolgenden Vereine Aufnahme zu finden (Seite 123).

Aber auch dem einzelnen ausscheidenden Mitgliede pflegt ein solides Geschäft unter gewissen Bedingungen, z. B. nach vorgeschriebener längerer Dauer der Mitgliedschaft oder bei eingetretenem Zahlungsunvermögen, eine solche Abfindung vertragsmäßig zuzusichern. Freilich ist diese alsdann ein Rückkauf, wie die Versicherung ein Verkauf war, und ist daher ein solcher Verein berechtigt und sogar den übrigen Mitgliedern gegenüber verpflichtet, das Risiko in Abzug zu bringen. Nun hat zwar ein solcher Verein ein Risiko für dieses Mitglied schon hinter sich, aber doch nur für den Verkauf im Verhältniß zu allen übrigen Verkäufen gleicher Art (Seite 228), nicht aber für den in Vereinzelung dastehenden Rückkauf, so daß die Vereine, streng genommen, das einfache Risiko zurückbehalten könnten, während sie sich in der Regel mit 25% der reinen Abfindung begnügen, in dem sie dabei die anderweitig noch vorkommenden Rückkäufe einigermaßen mit berücksichtigen.

Das Risiko hört auf oder vermindert sich wenigstens bedeutend, wenn der Abgefundene den erhaltenen Betrag dazu benutzt, um sofort bei demselben Vereine dieselbe Versicherung unter andern Modalitäten zu entriren, weswegen alsdann ein Abzug nicht so nothwendig ist. Die Seite 284 genannte projektirte Altersversorgungs-Anstalt will denjenigen Mitgliedern, welche Deutschland verlassen, drei Viertel der kurz vorher berechneten Abfindung zurückgeben, wohingegen sie dem unverschuldet arbeitsunfähig Gewordenen die Alterspension nach Verhältniß der zu erwartenden Mehrausgaben zum vollen Betrage in eine sofort zahlbare Invalidenpension umwandeln wird. Da nämlich die Lebensrente einer fünfundvierzigjährigen Person bei vierteljährlicher Vorausbezahlung 13.2658 ist, so werden gezahlt:

vom 45sten Lebensjahre an

statt 100, vom 55sten Lebensjahre an: $\frac{521.61}{12.6358} = 41.2803,$

„ 60sten „ „ $\frac{308.44}{12.6358} = 24.4101,$

„ 65sten „ „ $\frac{167.62}{12.6358} = 13.2655.$

Auf der einen Seite riskirt man also, sofort Einzahlungen zu machen, die man in der Folge vielleicht hätte erspaaren können; auf der andern Seite gewinnt man die Hoffnung, mit viel geringeren Zahlungen wegzukommen, während man vielleicht durch den ursprünglichen Vergleich verpflichtet gewesen wäre, lange Jahre hindurch viel bedeutendere Zahlungen zu leisten. Bei einer großen Anzahl solcher Fälle ist indeß auf Herstellung des Gleichgewichts zu rechnen.

Die Untersuchung der Lebensfähigkeit eines Versicherungs-Vereins.

Hat man die Lebensfähigkeit eines Versicherungs-Vereins zu untersuchen, so ist zu ermitteln: 1) ob der Verein Aussicht habe, gegen die festgesetzten Einnahmen die versprochenen Ausgaben leisten zu können (Seite 4) und 2) ob der Verein alle Klassen der Mitglieder mit gleicher Billigkeit behandle, d. h. jeder Klasse nicht mehr und nicht weniger abfordere, als es der von ihr verursachten Gefahr und den durch dieselbe hervorgerufenen Verwaltungskosten angemessen ist (Seite 6).

Hierbei pflegt man, falls die Ermittelung der Lebensfähigkeit von den Gründern oder Vorstehern eines solchen Vereins ausgeht, gewöhnlich sogleich darauf aufmerksam gemacht zu werden, daß dem Verein die Lebensfähigkeit eigentlich gar nicht abgesprochen werden könne, weil in dem und dem Paragraphen die Vorsorge getroffen worden, daß, falls wider alles Erwarten die Beiträge nicht ausreichen sollten, die annoch vorhandenen Mitglieder zur Deckung des Ausfalls verpflichtet seien, oder sich die anspruchsberechtigten oder berechtigt werdenden Personen eine verhältnißmäßige Verkürzung der ihnen versicherten Summen gefallen zu lassen haben. Auf eine solche Bestimmung darf indessen meines Erachtens der Sachverständige gar nicht eingehen, denn die ganze Ermittelung bezweckt ja eben nur, die Ueberzeugung zu gewinnen, daß dergleichen Nachnahmen oder Schmälerungen nach allen bisherigen Erfahrungen und voller wissenschaftlicher Ueberzeugung gar nicht vorkommen werden. Wie müßig eine

derartige Bestimmung ist, folgt schon daraus, daß auch ohne dieselbe bei mangelnden Fonds das eine oder das andere vonselbst eintreten muß.

Die Untersuchung über die Lebensfähigkeit eines solchen Vereins ist nun damit zu beginnen, daß man sich von dem Inhalte der finanziellen Bestimmungen des Vereins ganz genau in Kenntniß setze, und pflege ich mir dieselben da, wo sie mit anderweitigen Rechts- oder Verwaltungs-Normen vermischt sind, sowohl nach den Einnahmen als nach den Ausgaben, besonders zu notiren, übersichtlich zu ordnen und die Hauptbestimmungen vor allem Nebensächlichen hervorzuheben. Hierbei halte ich es für besonders nothwendig, sich nicht durch Analogien mit früher bearbeiteten Statuten verleiten zu lassen, auf Identität zu schließen; denn ich habe häufig gefunden, daß selbst da, wo ein Statut aus dem andern wörtlich abgeschrieben schien, der zweite Verfasser mit Ueberlegung oder aus Unkenntniß der Sache eine scheinbar unbedeutende Aenderung getroffen, die dennoch den Gang des Geschäfts gänzlich umgestaltete.

Darüber, ob man seine Arbeit mit Untersuchung der Einnahmen oder der Ausgaben zu beginnen habe, weiß ich keine bindenden Regeln aufzustellen, indeß wird man oft sich selbst das Geschäft erleichtern und dem Leser mehr oder weniger zu Hülfe kommen, je nachdem man in einem Falle das Eine, im andern das Andere wählt. Erfahrung, Uebung und die eigene Gewöhnung der Ansicht einer Sache werden hier den Ausschlag geben. Ein Gleiches gilt darüber, ob man zuerst die Hauptsache zu behandeln und alsdann zu den Nebenbestimmungen überzugehen habe, oder umgekehrt; ob man zuerst eine Kritik, innerhalb der engen Grenzen seiner Competenz, zu liefern oder diese nachfolgen zu lassen habe. Oft schien mir das Eine, oft das Andere das Rathsamere; jedoch lasse ich die Kritik vorangehen, wenn die finanziellen Bestimmungen eines Statuts Widersprüche, mehrfacher Auslegungen Fähiges oder gar unmöglich Durchzuführendes enthalten.

Nach Festsetzung des eigentlichen statutarischen Zwecks des Vereins wird man finden, daß sich die finanziellen Bestimmungen dreien Hauptgattungen unterordnen lassen:

1) Die finanziellen Bestimmungen sind von der Art, daß sie nicht allein eine feste statistische Grundlage haben, sondern die Einnahmen sind auch entsprechend den Ausgaben, dieser Grundlage gemäß, ganz individuell oder in engen und zulässigen Grenzen normirt;

2) Es sind zwar statistische Grundlagen vorhanden, aber die Besteuerung ist so allgemein gehalten, daß sich a priori nicht ersehen läßt, welche Durchschnitte zu Grunde zu legen sein möchten;

3) Die Versicherung bezieht sich auf Ereignisse, für welche überhaupt die statistischen Grundlagen noch fehlen, z. B. für Beamten-

pensionen mit sprungweiser Erhöhung der Ansprüche, Invaliden- oder Heiraths-Aussteuerkassen unter gleichen Bedingungen u. s. w.

Sind im ersten Falle die statistischen Grundlagen bekannt und die Einzahlungen den individuellen Ansprüchen der Versicherten gemäß abgemessen, so hat man nach Angabe des zu Grunde zu legenden Zinsfußes nichts weiter zu thun, als eine geeignete Mortalitäts-Tabelle auszuwählen und in verschiedenen, nicht allzu entfernt liegenden Partien des Tarifs nachzurechnen, ob derselbe bei Berücksichtigung der Verwaltungskosten und des Zuschlags für das Risiko den richtigen Berechnungen gemäß aufgestellt ist. Was diese letzteren betrifft, so werden sie sich größtentheils auf die im zweiten Abschnitt gegebenen Rechnungsmethoden zurückführen lassen. Sollte dieses aber einmal nicht der Fall sein, so entwirft man sich auf Grund des vorhandenen Materials eine Tabelle der am Anfange eines jeden Jahres vorhandenen Einzahler und der im Laufe desselben ausscheidenden Anspruchsberechtigungen, wie solches im ersten Abschnitte vielfältig geschehen, zinst beide auf den Anfang des Geschäfts ab und zieht die Bilanz, nachdem man noch die Veränderungen für die im Statute festgesetzte Art der terminlichen Ein- und Auszahlungen nach Seite 197, 202, 204 und 205 angebracht hat, wozu sich die Beispiele bei Behandlung der einzelnen Kassen vorfinden. Der Prozentsatz für die Höhe der Verwaltungskosten muß dem Sachverständigen gegeben werden und pflege ich dahin zu wirken, daß diese in einer besondern, vom Betriebsfonds getrennten Kasse geführt werden. Zur richtigen Beurtheilung des Risikos hat man allerdings den etwa zu erwartenden jährlichen Zugang zu wissen nöthig (Seite 228 und 234), wozu indeß in der Regel die Lokalkenntniß gänzlich fehlt und die Angaben der Vorsteher oft übertrieben sind, so daß nichts weiter übrig bleibt, als von Stufe zu Stufe fortgehende Sätze anzunehmen, für dieselben einzeln den Prozentsatz zu berechnen, und alsdann der entscheidenden Stelle die Auswahl zu überlassen.

Enthalten die Statuten Ausnahmebestimmungen, welche auf Verminderung der Ausgaben einwirken, ohne doch der strengen Berechnung unterworfen werden zu können, z. B. Exclusion bei unterlassener Beitragszahlung, Kürzungen oder gänzlicher Verlust der versicherten Summen im Falle einer Selbstentleibung, bei der Wiederverheirathung einer Wittwe und dergleichen mehr, so wird man am besten thun, dieselben bei der Berechnung selbst unberücksichtigt zu lassen, dagegen bei der Festsetzung des Risikos mit zu veranschlagen.

Häufig kann man auch die ganze Berechnung unterlassen und seine Behauptungen indirekt erweisen, dadurch, daß man dem Vereine die Lebensfähigkeit zuspricht, weil derselbe unter ähnlichen Bedingungen eben so viel oder mehr fordert, als eine andere für lebensfähig anerkannte Kasse, oder demselben die Lebensfähigkeit abspricht, weil er nicht mehr oder gar weniger fordert, als eine Kasse, die sich bereits als lebensunfähig erwiesen hat. — Bei Kassen, die vom

Auslande her Geschäfte zu machen beabsichtigen, darf man indeß nicht dabei stehen bleiben, sondern hat auch zu ermitteln, welchen Prozentsatz des reinen Gewinnes dieselben beanspruchen.

Betrifft die Untersuchung der Lebensfähigkeit einen bereits in Thätigkeit befindlichen Verein und stellen sich die bisherigen Beiträge als zu gering heraus, so ist es nicht genug, dieselben von jetzt ab normalmäßig abzufordern, sondern die bisherigen Mitglieder haben auch für sich selbst und die bereits Ausgeschiedenen nachzuzahlen. Hierzu ist es vor allem nothwendig, daß man die Bilanz zwischen dem Soll und dem Haben — letzteres nach den vorhandenen Aktivis und den richtigen, künftig zu zahlenden Beiträgen — aufstellt und das Fehlende unter die bisherigen Mitglieder nach dem einen oder dem andern im Vorhergehenden angegebenen Modus repartirt. Dabei pflegt alsdann der Techniker allerlei Erfahrungen zu machen und auf desto größeren Widerspruch zu stoßen, je mehr er sich bemüht, eine billige Ausgleichung zu Stande zu bringen. Zuerst weigern sich in der Regel die Vorstände, auch wenn der Auftrag von ihnen selbst ausgegangen ist, die genaue Personalstatistik herauszugeben, wiewohl ohne eine solche die Bilanz sich nicht ziehen läßt; alsdann stellen sie die Anforderung, daß die seit längerer Zeit bei der Kasse befindlichen Mitglieder bei den Nachzahlungen nicht allzu scharf herangezogen werden sollen, oder wünschen, daß man lieber für alle Mitglieder die künftigen Beiträge etwas höher stelle, nur um die Nachzahlungen zu vermeiden oder wenigstens so gering wie möglich zu machen, und dergleichen mehr. Von der genauen Einsicht in die Personalstatistik stehe ich nie ab und weise alle Surrogate, die man dafür bietet, zurück. Was dagegen die finanziellen Arrangements im Einzelnen betrifft, so darf der Sachverständige meines Erachtens nur warnen, nicht entscheiden wollen, indem es immer nur seine Sache bleibt, darauf zu halten, daß der Verein im Ganzen lebensfähig werde. Zweckmäßig aber kann man solche Anforderungen, wie die eben angeführten, nicht nennen, denn jede Unbilligkeit bewirkt es, daß Personen, die davon getroffen werden sollen, nicht eintreten und diejenigen Mitglieder, welche darunter zu leiden und von denen der Verein bei richtigerer Abmessung ihrer Verpflichtungen den meisten Vortheil zu erwarten hätte, ausscheiden und sich einem andern, besser organisirten Vereine anschließen, was am Ende häufig zum Nachtheile der Bevorzugung Begehrenden ausschlagen würde (Seite 335).

Sind zweitens die finanziellen Bedingungen eines Vereins derartig festgestellt, daß zwar eine ausreichende Statistik vorhanden wäre, die Mitglieder aber nicht nach der von ihnen individuell zu befürchtenden Gefahr, sondern nach zu ausgedehnten Gruppen, oder wohl gar nach einem ganz gleichen Steuersatze behandelt werden sollen, so hat der Sachverständige alle Sorgfalt darauf zu verwenden, die möglichst zutreffenden Durchschnitte zu ermitteln. In der Regel

fängt nämlich ein Verband von Personen nicht damit an, Versicherungsvereine zu stiften, sondern fühlt das Bedürfniß dazu erst nach längerer oder kürzerer Dauer seines Bestehens und kann alsdann die Vergangenheit das Material für die Zukunft liefern; wo aber jene nicht vorhanden, hat man solches Material einstweilen von einem oder einigen in der Nähe befindlichen Verbänden gleicher Art zu entlehnen. Gesetzt, es sollte eine Synodal-Prediger- oder Lehrer-Wittwenkasse unter der Bedingung errichtet werden, daß jede hinterbliebene Wittwe, sie möge die erste, zweite oder eine noch spätere Ehefrau des Verstorbenen gewesen sein, nach dieser oder jener Modalität ihre Wittwenpension empfinge und dazu jedes Mitglied der betreffenden Synode, gleichviel ob verheirathet oder nicht, von seinem Amtsantritte an einen gleichen jährlichen Beitrag zu entrichten habe. Der Sachverständige beginnt in diesem Falle damit, wo möglich bis zu dem Zeitpunkte zurückzugehen, seit welchem sich die äußeren Verhältnisse des in Rede stehenden Verbandes wenig geändert haben, oder doch wenigstens nicht so sehr, daß es auf die Abschließung der Ehen von einiger Bedeutung sein könnte, notirt jede einzelne vorgekommene Ehe nach den Altern beider Ehegatten zu der Zeit, wo solche angefangen haben würden, der Wittwen-Kasse anzugehören, — also nach den Altern zur Zeit des Amtsantritts, wenn die Ehe bereits abgeschlossen war, im andern Falle nach den Altern zur Zeit der Verheirathung, — nimmt jede Wiederverheirathung als eine neue Ehe mit auf, und berechnet für alle diese Ehepaare, entweder nach jedem einzelnen, oder nach Gruppen gleicher Altersunterschiede, die durchschnittliche Höhe des jährlichen Beitrags. — Unzuverlässige Resultate würden erhalten werden, wenn man die Wiederverheirathungen ausschlösse oder sich mit dem bloßen Durchschnittsalter der Ehegatten begnügen wollte. — Darauf zählt der Sachverständige von Jahr zu Jahr ab, wie viel verheirathete und wie viel unverheirathete männliche Genossen, Junggesellen oder Wittwer, vorhanden waren, nimmt daraus das Durchschnittsverhältniß und setzt den gefundenen jährlichen Beitrag nach demselben Verhältnisse herab. — Wird den wiederverheiratheten Wittwen die Pension entzogen oder geschmälert, so sucht der Rechner das Verhältniß der dadurch entstandenen oder künftig zu erwartenden Minderausgabe zu den Gesammtausgaben und ermäßigt demzufolge abermals den Jahresbeitrag, wird aber dabei nicht vergessen, daß eine Pension beziehende Wittwe weniger geneigt sein möchte, zur anderweitigen Ehe zu schreiten, als eine andere, die mit dem Tode ihres Ehegatten auf sich selbst angewiesen bleibt.

Ist mit der Wittwenkasse zugleich eine Waisenkasse verbunden, so verfährt man ganz ebenso in Bezug auf den Vater und sämmtliche zu erwartende Waisen, oder in Bezug auf Aeltern und zu erwartende Waisen, je nachdem diese gleich nach dem Tode des Vaters oder erst nach dem Absterben beider Aeltern verpflegt werden sollen.

Falls kein derartiges Material aus der Vergangenheit oder der Umgegend zu beschaffen ist, so hat man sich allerdings auf den gegenwärtigen Personalzustand zu beschränken, wird aber nur unzuverlässige Resultate erhalten, so daß eine periodische Revision so lange nöthig bleibt, bis sich ein normaler mittlerer Zustand herausgestellt haben wird.

In der Regel sind dergleichen Kassen nicht auf ihre eigenen Beiträge allein angewiesen, sondern erfreuen sich noch mancher Unterstützungen, welche in verschiedener Weise erfolgen können. Wird ein Fundationskapital ein für allemal hergegeben, so kann solches entweder bloß zu Gunsten der gegenwärtigen Amtsinhaber, oder zugleich zu Gunsten aller Amtsnachfolger geschehen. Im erstern Falle bringt man dasselbe von dem baaren Werthe der aus den gegenwärtigen Verhältnissen zu erwartenden Ausgaben in Abzug und stellt nach dem Ueberreste die Beiträge für die jetzigen Mitglieder fest, während alle künftigen Mitglieder die vollen Beiträge zu entrichten haben. Im letztern Falle sind dagegen die Beiträge für die gegenwärtigen und künftigen Mitglieder um die Jahreszinsen des Fundationskapitals zu kürzen. Werden fremde Zuschüsse nur für eine bestimmte Reihe von Jahren zugesagt, so ist der baare Werth dieser Zeitrente zu ermitteln und hiermit eben so zu verfahren, wie vorher mit dem Fundationskapitale. Sind letztlich diese Zuschüsse jährlich zugesichert, so werden die Beiträge ein für allemal um den ganzen Betrag derselben ermäßigt. Mit etwanigen späteren Schenkungen und Zuwendungen, für welche die Geber keine besondere Art der Verwendung vorgeschrieben haben, ist alsdann von der nächsten Bilanzziehung ab in gleicher Weise zu verfahren.

Sind endlich drittens die finanziellen Bestimmungen des Vereins der Art, daß sich dafür keine statistischen Grundlagen auffinden lassen, so begnügten sich die Sachverständigen damit, den Nachweis zu führen, wie jene Bestimmungen wenigstens dafür Sorge getragen, daß in jedem einzelnen Falle der Beanspruchung die Mitglieder verbunden sind, den erforderlichen Betrag zusammen zu schießen. So fand ich wenigstens die Sachlage vor, als ich vor mehreren Jahren anfing, das Versicherungswesen zu untersuchen; die Erfahrung hat aber gelehrt, daß damit die Sache nicht abgethan sei und sind im ersten Abschnitt die Ursachen hiervon genugsam auseinandergesetzt. Gerade hier beginnt die eigentliche Thätigkeit des Sachverständigen, während allenfalls jeder tüchtige Kalkulator fähig gemacht werden könnte, die Berechnung auf Grund statistischer Aussagen nach den mitgetheilten Formeln des zweiten Abschnitts auszuführen.

Allerdings kann der Sachverständige da kein Einlagekapital oder keine Jahresbeiträge herausrechnen, wo alle Bedingungen für eine solche Berechnung fehlen; aber er ist verpflichtet, die möglichen Eventualitäten zu klassifiziren, besonders die Grenzen derselben in's Auge zu fassen und für jede dieser Grundlagen den jeweiligen Bedarf zu ermitteln, wozu der erste Abschnitt dieser Schrift

hinlängliche Anleitung giebt. Findet er alsdann, daß der Bedarf von Jahr zu Jahr, besonders in der Periode des Aussterbens, steigt, daß derselbe bei bedeutenden Schwankungen von Zeit zu Zeit eine ganz unverhältnißmäßige Höhe erreicht, werden einzelne Kategorien von Mitgliedern vor anderen übermäßig begünstigt, diese dagegen übervortheilt, so kann dem Vereine die Lebensfähigkeit nach dem Grundsatze der Billigkeit nicht zugesprochen werden, wiewohl derselbe nach dem Wortlaute des Statuts im weiteren Sinne des Wortes nichts Unausführbares enthalten mag.

Was die Begünstigung und Uebervortheilung einzelner Kategorien von Mitgliedern anbetrifft, so sind dieselben generell, wenn der Bedarf überhaupt aus einem geringen Anfange eine zuletzt bedeutende Höhe erreicht, weil alle länger lebenden, so wie durchschnittlich alle später eintretenden Mitglieder darunter zu leiden haben. Die ungleichartige Behandlung ist aber eine specielle, wenn sie unter gleichzeitig eintretenden Mitgliedern eine oder einige Altersklassen vor andern bevorzugt oder hinter andere zurücksetzt, und kann dieses der Fall sein, selbst wenn man den bevorzugten Klassen größere Verpflichtungen auferlegt hätte, weil das gegenseitige Verhältniß der Verpflichtungen immer noch nicht so groß genommen wäre, wie das der Anspruchsberechtigung. Für solche Fälle zerlege ich die gleichzeitig beigetretenen Mitglieder in Kategorien, die entweder durch die finanziellen Bestimmungen des Statuts (Verschiedenartigkeit der Beiträge nach verschiedenen Altersklassen) gegeben sind, oder die ich nach Altersklassen festsetze, normire für jedes einzelne Alter die Anspruchsberechtigung, wie dieselbe mir die wahrscheinlichste zu sein scheint und führe nach dieser Grundlage für jede Kategorie das Geschäft besonders durch, ohne oder auch mit dem Hinzutritt neuer Mitglieder, wenn letzterer auf den verschiedenartigen Gang des Geschäfts einen bedeutenden Einfluß ausübt. Auf diese Weise erhalte ich die Größe der jährlichen Verpflichtungen für die einzelnen Kategorien. Darauf vereinige ich alle Kategorien nach den früheren Anfangszahlen in eine einzige Gruppe, bestimme den jährlichen Bedarf genau nach den früheren Normen und vergleiche denselben mit den in der Vereinzelung gefundenen Resultaten. Hierdurch ergiebt sich alsdann nicht allein, welche Altersklassen den andern vorgezogen oder nachgesetzt sind, bei dem zu Grunde liegenden Mischungsverhältniß, sondern es lassen sich in der Regel auch Schlüsse ziehen für andere Verhältnisse der zu Grunde gelegten Anfangszahlen. Auf diese Weise ermittelte ich einmal zugleich, daß die Mitglieder einer projektirten Heiraths-Aussteuerkasse bei gar nicht unwahrscheinlichen Grundlagen sich unbewußt verpflichtet hatten, nach einiger Dauer des Geschäfts das ganze von ihnen versicherte Aussteuerkapital in fünf, vier, drei, zwei Jahren, ja mitunter sogar im ersten Jahre ihres Beitritts einzuzahlen, in derselben Weise, wie ich solches

Seite 131, Tab. 48 für eine Sterbekasse nachgewiesen habe, deren Statut mir zur Prüfung übersandt worden war.

Allerdings sind dergleichen Ermittelungen sehr zeitraubend und ermüdend, indeß ist auch der Nutzen, der für die Theorie daraus hervorgeht, sehr groß. Sachkenner erlaube ich mir hierbei besonders noch auf den Fall aufmerksam zu machen, daß bei bestimmten Beiträgen für jede Anspruchsberechtigung festgesetzt ist, kein Mitglied solle über die Höhe des versicherten Kapitals zahlen. Man gelangt hier bei Ermittelung der alsdann nothwendigen anfänglichen Mitgliederzahl (Seite 126) zu unbestimmten Gleichungen, die durch die in der Natur der Sache liegenden Nebenbedingungen völlig bestimmt werden, andrerseits zu Gleichungen, die immer eine reelle Auflösung zulassen, welche indeß eben solcher Nebenbedingungen wegen sich unter Umständen als unbrauchbar erweist und die Möglichkeit des Unternehmens auch im weitern Sinne des Wortes in bestimmte Grenzen einschließt.

Tabelle I.
Sterblichkeit nach Süßmilch-Baumann.

Lebensalter.	Lebende.	Sterbende.	Summen der Lebenden, von unten auf.	Mittlere Lebensdauer, wenn der Tod am Ende der Jahre erfolgt.	Differenzen.	Summen der Summen der Lebenden, von unten auf.	Logarithmen der Lebenden.	Lebende Frauen nach Brune.
	a	b	c	d	e	f	g	h
0	1000	250	28988	28.99		857207	3.000 0000	.
1	750	89	27988	37.32	.	828219	2.875 0613	.
2	661	43	27238	41.21	.	800231	2.820 2015	.
3	618	25	26577	43.00	.	772993	2.790 9885	.
4	593	14	25959	43.78	.	746416	2.773 0547	.
5	579	12	25366	43.81	.	720457	2.762 6786	.
6	567	11	24787	43.72	— 09	695091	2.753 5831	.
7	556	9	24220	43.56	— 16	670304	2.745 0748	.
8	547	8	23664	43.26	— 30	646084	2.737 9873	.
9	539	7	23117	42.89	— 37	622420	2.731 5888	.
10	532	5	22578	42.44	— 45	599303	2.725 9116	.
11	527	4	22046	41.83	— 61	576725	2.721 8106	.
12	523	4	21519	41.15	— 68	554679	2.718 5017	.
13	519	4	20996	40.45	— 70	533160	2.715 1674	.
14	515	4	20477	39.76	— 69	512164	2.711 8072	.
15	511	4	19962	39.06	— 70	491687	2.708 4209	.
16	507	4	19451	38.36	— 70	471725	2.705 0080	10000
17	503	4	18944	37.66	— 70	452274	2.701 5680	9838
18	499	4	18441	36.96	— 70	433330	2.698 1005	9682
19	495	4	17942	36.25	— 71	414889	2.694 6052	9533
20	491	5	17447	35.53	— 72	396947	2.691 0815	9392
21	486	5	16956	34.89	— 64	379500	2.686 6363	9260
22	481	5	16470	34.24	— 65	362544	2.682 1451	9136
23	476	5	15989	33.59	— 65	346074	2.677 6070	9019
24	471	5	15513	32.94	— 65	330085	2.673 0209	8908
25	466	5	15042	32.28	— 66	314572	2.668 3859	8802
26	461	5	14576	31.62	— 66	299530	2.663 7009	8700
27	456	5	14115	30.95	— 67	284954	2.658 9648	8600
28	451	6	13659	30.29	— 66	270839	2.654 1765	8501
29	445	6	13208	29.68	— 61	257180	2.648 3600	8402
30	439	6	12763	29.07	— 61	243972	2.642 4645	8304

Lebensalter.	Lebende.	Sterbende.	Summen der Lebenden, von unten auf.	Mittlere Lebensdauer, wenn der Tod am Ende der Jahre erfolgt.	Differenzen.	Summen der Summen der Lebenden, von unten auf.	Logarithmen der Lebenden.	Lebende Frauen nach Brune.
	a	b	c	d	e	f	g	h
31	433	6	12324	28.46	— 61	231209	2.636 4879	8207
32	427	6	11891	27.85	— 61	218885	2.630 4279	8110
33	421	6	11464	27.23	— 62	206994	2.624 2821	8014
34	415	6	11043	26.61	— 62	195530	2.618 0481	7918
35	409	7	10628	25.99	— 62	184487	2.611 7233	7823
36	402	7	10219	25.42	— 57	173859	2.604 2261	7729
37	395	7	9817	24.85	— 57	163640	2.596 5971	7636
38	388	7	9422	24.28	— 57	153823	2.588 8317	7543
39	381	7	9034	23.71	— 57	144401	2.580 9250	7451
40	374	7	8653	23.14	— 57	135367	2.572 8716	7361
41	367	7	8279	22.56	— 58	126714	2.564 6661	7273
42	360	7	7912	21.98	— 58	118435	2.556 3025	7187
43	353	7	7552	21.39	— 59	110523	2.547 7747	7102
44	346	7	7199	20.81	— 58	102971	2.539 0761	7018
45	339	7	6853	20.22	— 59	95772	2.530 1997	6934
46	332	8	6514	19.62	— 60	88919	2.521 1381	6849
47	324	8	6182	19.08	— 54	82405	2.510 5450	6762
48	316	8	5858	18.54	— 54	76223	2.499 6871	6674
49	308	8	5542	17.99	— 55	70365	2.488 5507	6584
50	300	9	5234	17.45	— 54	64823	2.477 1213	6492
51	291	9	4934	16.96	— 49	59589	2.463 8930	6397
52	282	9	4643	16.46	— 50	54655	2.450 2491	6299
53	273	9	4361	15.97	— 49	50012	2.436 1626	6197
54	264	9	4088	15.48	— 49	45651	2.421 6039	6090
55	255	9	3824	15.00	— 48	41563	2.406 5402	5976
56	246	9	3569	14.51	— 49	37739	2.390 9351	5853
57	237	9	3323	14.02	— 49	34170	2.374 7483	5722
58	228	9	3086	13.54	— 48	30847	2.357 9348	5583
59	219	9	2858	13.05	— 49	27761	2.340 4441	5437
60	210	9	2639	12.57	— 48	24903	2.322 2193	5286

Lebensalter.	Lebende.	Sterbende.	Summen der Lebenden, von unten auf.	Mittlere Lebensdauer, wenn der Tod am Ende der Jahre erfolgt.	Differenzen.	Summen der Summen der Lebenden, von unten auf.	Logarithmen der Lebenden.	Lebende Frauen nach Brune.
	a	b	c	d	e	f	g	h
61	201	9	2429	12.08	— 49	22264	2.303 1961	5130
62	192	10	2228	11.60	— 48	19835	2.283 3012	4969
63	182	10	2036	11.19	— 41	17607	2.260 0714	4802
64	172	10	1854	10.78	— 41	15571	2.235 5284	4627
65	162	10	1682	10.38	— 40	13717	2.209 5150	4442
66	152	10	1520	10.00	— 38	12035	2.181 8436	4246
67	142	10	1368	9.63	— 37	10515	2.152 2883	4038
68	132	10	1226	9.29	— 34	9147	2.120 5739	3819
69	122	10	1094	8.97	— 32	7921	2.086 3598	3591
70	112	9	972	8.68	— 29	6827	2.049 2180	3356
71	103	9	860	8.35	— 33	5855	2.012 8372	3117
72	94	9	757	8.05	— 30	4995	1.973 1279	2877
73	85	8	663	7.80	— 25	4238	1.929 4189	2637
74	77	8	578	7.51	— 29	3575	1.886 4907	2398
75	69	7	501	7.26	— 25	2997	1.838 8491	2163
76	62	7	432	6.97	— 29	2496	1.792 3917	1935
77	55	6	370	6.73	— 24	2064	1.740 3627	1718
78	49	6	315	6.43	— 30	1694	1.690 1961	1516
79	43	6	266	6.19	— 24	1379	1.633 4685	1330
80	37	5	223	6.03	— 16	1113	1.568 2017	1159
81	32	4	186	5.81	— 22	890	1.505 1500	1000
82	28	4	154	5.50	— 31	704	1.447 1580	849
83	24	4	126	5.25	— 25	550	1.380 2112	706
84	20	3	102	5.10	— 15	424	1.301 0300	575
85	17	3	82	4.82	— 28	322	1.230 4489	461
86	14	2	65	4.64	— 18	240	1.146 1280	366
87	12	2	51	4.25	— 39	175	1.079 1812	289
88	10	2	39	3.90	— 35	124	1.000 0000	228
89	8	2	29	3.62	— 28	85	0.903 0900	180
90	6	1	21	3.50	— 12	56	0.778 1513	141

Lebensalter.	Lebende.	Sterbende.	Summen der Lebenden, von unten auf.	Mittlere Lebensdauer, wenn der Tod am Ende der Jahre erfolgt.	Differenzen.	Summen der Summen der Lebenden, von unten auf.	Logarithmen der Lebenden.	Lebende Frauen nach Brune.
	a	b	c	d	e	f	g	h
91	5	1	15	3.00	— 50	35	0.698 9700	108
92	4	1	10	2.50	— 50	20	0.602 0600	80
93	3	1	6	2.00	— 50	10	0.477 1213	57
94	2	1	3	1.50	— 50	4	0.301 0300	38
95	1	1	1	1.00	— 50	1	0.000 0000	24
96	0							(25)

Tabelle II.

Mittlere Verbindungsdauern bis zum Schlusse der Jahre, nach Süßmilch.

Alter der einen Person:	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
16	27.61										
17	27.04										
18	26.46										
19	25.87										
20	25.28										
21	24.78	131	26.09								
22	24.28	127	25.55								
23	23.77	124	25.01								
24	23.25	121	24.46								
25	22.73	118	23.91								
26	22.21	118	23.39	111	24.50						
27	21.68	119	22.87	108	23.95						
28	21.14	121	22.35	104	23.39						
29	20.68	119	21.87	100	22.87						
30	20.23	115	21.38	97	22.35						
31	19.76	113	20.89	98	21.87	92	22.79				
32	19.29	110	20.39	100	21.39	88	22.27				
33	18.82	106	19.88	101	20.89	86	21.75				
34	18.34	107	19.41	99	20.40	82	21.22				
35	17.85	109	18.94	95	19.89	83	20.72				
36	17.44	106	18.50	93	19.43	80	20.23	74	20.97		
37	17.03	103	18.06	90	18.96	82	19.78	71	20.49		
38	16.61	101	17.62	87	18.49	82	19.31	69	20.00		
39	16.19	98	17.17	88	18.05	80	18.85	66	19.51		
40	15.77	94	16.71	90	17.61	77	18.38	63	19.01		
41	15.34	95	16.29	87	17.16	74	17.90	61	18.54	59	19.13
42	14.90	96	15.86	84	16.70	72	17.42	64	18.06	57	18.63
43	14.45	98	15.43	81	16.24	69	16.93	66	17.59	53	18.12
44	14.00	100	15.00	77	15.77	70	16.47	63	17.10	51	17.61
45	13.55	100	14.55	75	15.30	71	16.01	60	16.61	48	17.09

Alter der einen Person:	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
46	13.08	102	14.10	76	14.86	68	15.54	57	16.11	49	16.60
47	12.69	100	13.69	76	14.45	65	15.10	55	15.65	50	16.15
48	12.29	97	13.26	78	14.04	63	14.67	52	15.19	50	15.69
49	11.88	96	12.84	78	13.62	60	14.22	54	14.76	48	15.24
50	11.47	93	12.40	80	13.20	58	13.78	54	14.32	46	14.78
51	11.12	88	12.00	82	12.82	58	13.40	52	13.92	44	14.36
52	10.78	86	11.64	80	12.44	58	13.02	50	13.52	41	13.93
53	10.44	82	11.26	79	12.05	59	12.64	48	13.12	39	13.51
54	10.09	80	10.89	76	11.65	61	12.26	45	12.71	40	13.11
55	9.74	77	10.51	75	11.26	62	11.88	42	12.30	41	12.71
56	9.40	77	10.17	69	10.86	63	11.49	43	11.92	38	12.30
57	9.05	77	9.82	66	10.48	62	11.10	43	11.53	37	11.90
58	8.69	78	9.47	64	10.11	60	10.71	44	11.15	34	11.49
59	8.34	78	9.12	61	9.73	58	10.31	45	10.76	32	11.08
60	7.98	78	8.76	59	9.35	56	9.91	46	10.37	29	10.66
61	7.62	79	8.41	58	8.99	52	9.51	46	9.97	30	10.27
62	7.26	79	8.05	58	8.63	50	9.13	43	9.56	32	9.88
63	6.96	77	7.73	59	8.32	47	8.79	44	9.23	30	9.53
64	6.67	74	7.41	60	8.01	45	8.46	42	8.88	32	9.20
65	6.40	70	7.10	60	7.70	43	8.13	41	8.54	33	8.87
66	6.13	66	6.79	61	7.40	43	7.83	38	8.21	33	8.54
67	5.88	61	6.49	62	7.11	44	7.55	35	7.90	33	8.23
68	5.65	58	6.23	60	6.83	44	7.27	35	7.62	31	7.93
69	5.44	55	5.99	58	6.57	45	7.02	32	7.34	31	7.65
70	5.27	50	5.77	56	6.33	46	6.79	31	7.10	30	7.40
71	5.04	49	5.53	53	6.06	46	6.52	31	6.83	27	7.10
72	4.86	45	5.31	49	5.80	48	6.28	32	6.60	25	6.85
73	4.72	41	5.13	47	5.60	47	6.07	32	6.39	25	6.64
74	4.53	40	4.93	45	5.38	45	5.83	32	6.15	23	6.38
75	4.39	39	4.78	40	5.18	44	5.62	34	5.96	21	6.17

Alter der einen Person:	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.	Unterschiede.	Mittlere Verbindungsdauern.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
76	4.20	38	4.58	38	4.96	41	5.37	36	5.73	20	5.93
77	4.07	35	4.42	36	4.78	38	5.16	36	5.52	22	5.74
78	3.87	37	4.24	32	4.56	36	4.92	35	5.27	22	5.49
79	3.72	36	4.08	31	4.39	34	4.73	34	5.07	22	5.29
80	3.68	31	3.99	32	4.31	29	4.60	33	4.93	23	5.16
81	3.58	28	3.86	29	4.15	29	4.44	31	4.75	24	4.99
82	3.37	31	3.68	26	3.94	27	4.21	27	4.48	26	4.74
83	3.23	27	3.50	29	3.79	24	4.03	26	4.29	24	4.53
84	3.21	21	3.42	28	3.70	23	3.93	25	4.18	23	4.41
85	3.06	25	3.31	24	3.55	21	3.76	21	3.97	21	4.18
86	3.04	21	3.25	19	3.44	20	3.64	20	3.84	20	4.04
87	2.77	23	3.00	21	3.21	17	3.38	16	3.54	17	3.71
88	2.55	25	2.80	17	2.97	18	3.15	14	3.29	14	3.43
89	2.42	28	2.70	11	2.81	16	2.97	12	3.09	12	3.21
90	2.53	14	2.67	13	2.80	13	2.93	11	3.04	10	3.14
91	2.20	13	2.43	08	2.51	17	2.58	08	2.66	08	2.74
92	1.88	10	2.08	07	2.15	08	2.23	04	2.27	05	2.32
93	1.54	17	1.73	06	1.79	05	1.84	03	1.87	03	1.90
94	1.25	13	1.38	04	1.42	01	1.43	02	1.45	01	1.46
95	1.00	00	1.00	00	1.00	00	1.00	00	1.00	00	1.00

Tabel-

Mittlere Ueberlebens-

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
16	10.75	152		12.27	159			13.86	171		
17	10.62	149		12.11	160			13.71	168		
18	10.50	145		11.95	162			13.57	164		
19	10.38	141		11.79	159			13.38	165		
20	10.25	137		11.62	156			13.18	163		
21	10.11	139	131	11.50	152	8.80		13.02	164		
22	9.96	141	127	11.37	148	8.69		12.85	161		
23	9.82	142	124	11.24	146	8.58		12.70	158		
24	9.69	138	121	11.07	147	8.48		12.54	155		
25	9.55	135	118	10.90	149	8.37		12.39	151		
26	9.41	132	118	10.73	146	8.23	111	12.19	153	7.12	
27	9.27	129	119	10.56	143	8.08	108	11.99	154	7.00	
28	9.15	126	121	10.41	139	7.94	104	11.80	156	6.90	
29	9.00	127	119	10.27	136	7.81	100	11.63	158	6.81	
30	8.84	129	115	10.13	133	7.69	97	11.46	160	6.72	
31	8.70	126	113	9.96	134	7.57	98	11.30	162	6.59	92
32	8.56	123	110	9.79	136	7.46	100	11.15	163	6.46	88
33	8.41	120	106	9.61	138	7.35	101	10.99	157	6.34	86
34	8.27	117	107	9.44	140	7.20	99	10.84	155	6.21	82
35	8.14	114	109	9.28	141	7.05	95	10.69	152	6.10	83
36	7.98	115	106	9.13	143	6.92	93	10.56	146	5.99	80
37	7.82	117	103	8.99	141	6.79	90	10.40	143	5.89	82
38	7.67	118	101	8.85	139	6.66	87	10.24	140	5.79	82
39	7.52	119	98	8.71	138	6.54	88	10.09	136	5.66	80
40	7.37	122	94	8.59	135	6.43	90	9.94	132	5.53	77

le III.
dauern nach Süßmilch.

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
16	15.57	182			17.39	184			19.23	
17	15.39	178			17.17	186			19.03	
18	15.21	175			16.96	188			18.84	
19	15.03	171			16.74	190			18.64	
20	14.81	171			16.52	192			18.44	
21	14.66	169			16.35	194			18.29	
22	14.46	172			16.18	191			18.09	
23	14.28	172			16.00	190			17.90	
24	14.09	175			15.84	186			17.70	
25	13.90	177			15.67	183			17.50	
26	13.72	179			15.51	175			17.26	
27	13.53	177			15.30	172			17.02	
28	13.36	174			15.10	168			16.78	
29	13.21	171			14.92	165			16.57	
30	13.06	169			14.75	161			16.36	
31	12.92	162	5.67		14.54	162			16.16	
32	12.75	158	5.58		14.33	162			15.95	
33	12.56	155	5.48		14.11	163			15.74	
34	12.39	151	5.39		13.90	163			15.53	
35	12.21	148	5.37		13.69	164			15.33	
36	12.02	148	5.19	74	13.50	165	4.45		15.15	
37	11.83	149	5.07	71	13.32	165	4.36		14.97	
38	11.64	149	4.97	69	13.13	162	4.28		14.75	
39	11.45	150	4.86	66	12.95	156	4.20		14.51	
40	11.26	151	4.76	63	12.77	150	4.13		14.27	

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
41	7.22	124	95	8.46	128	6.27	87	9.74	133	5.40	74
42	7.08	121	96	8.29	125	6.12	84	9.54	134	5.28	72
43	6.94	119	98	8.13	121	5.96	81	9.34	134	5.15	69
44	6.81	116	100	7.97	119	5.81	77	9.16	134	5.04	70
45	6.67	115	100	7.82	114	5.67	75	8.96	135	4.92	71
46	6.54	108	102	7.62	114	5.52	76	8.76	135	4.76	68
47	6.39	105	100	7.44	116	5.39	76	8.60	135	4.63	65
48	6.25	103	97	7.28	115	5.28	78	8.43	132	4.50	63
49	6.11	99	96	7.10	116	5.15	78	8.26	127	4.37	60
50	5.98	96	93	6.94	116	5.05	80	8.10	122	4.25	58
51	5.84	95	88	6.79	118	4.96	82	7.97	116	4.14	58
52	5.68	96	86	6.64	119	4.82	80	7.83	108	4.02	58
53	5.53	97	82	6.50	115	4.71	79	7.65	105	3.92	59
54	5.39	97	80	6.36	111	4.59	76	7.47	99	3.83	61
55	5.26	98	77	6.24	106	4.49	75	7.30	91	3.74	62
56	5.11	99	77	6.10	101	4.34	69	7.11	88	3.65	63
57	4.97	100	77	5.97	94	4.20	66	6.91	83	3.54	62
58	4.85	96	78	5.81	90	4.07	64	6.71	76	3.43	60
59	4.71	93	78	5.64	84	3.93	61	6.48	74	3.32	58
60	4.59	88	78	5.47	77	3.81	59	6.24	71	3.22	56
61	4.46	83	79	5.29	73	3.67	58	6.02	69	3.09	52
62	4.34	77	79	5.11	69	3.55	58	5.80	64	2.97	50
63	4.23	73	77	4.96	63	3.46	59	5.59	68	2.87	47
64	4.11	68	74	4.79	61	3.37	60	5.40	65	2.77	45
65	3.98	63	70	4.61	59	3.28	60	5.20	58	2.68	43
66	3.87	60	66	4.47	57	3.21	61	5.04	52	2.60	43
67	3.75	57	61	4.32	55	3.14	62	4.85	57	2.52	44
68	3.64	52	58	4.16	57	3.06	60	4.73	53	2.46	44
69	3.53	51	55	4.04	54	2.98	58	4.58	46	2.40	45
70	3.41	49	50	3.90	47	2.91	56	4.37	55	2.35	46

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		—		+		—		
41	11.07	152	4.66	64	12.59	143	4.02	59	14.02	3.43
42	10.88	154	4.56	64	12.42	133	3.92	57	13.75	3.35
43	10.68	148	4.46	66	12.16	130	3.80	53	13.46	3.27
44	10.50	143	4.34	63	11.93	123	3.71	51	13.16	3.20
45	10.31	137	4.21	60	11.68	114	3.61	48	12.82	3.13
46	10.11	130	4.08	57	11.41	111	3.51	49	12.52	3.02
47	9.95	123	3.98	55	11.18	105	3.43	50	12.23	2.93
48	9.75	117	3.87	52	10.92	98	3.35	50	11.90	2.85
49	9.53	112	3.77	54	10.65	96	3.23	48	11.61	2.75
50	9.32	103	3.67	54	10.35	93	3.13	46	11.28	2.67
51	9.13	100	3.56	52	10.13	90	3.04	44	11.03	2.60
52	8.91	95	3.44	50	9.86	86	2.94	41	10.72	2.53
53	8.70	88	3.33	48	9.58	90	2.85	39	10.48	2.46
54	8.46	87	3.22	45	9.33	86	2.77	40	10.19	2.37
55	8.21	83	3.12	42	9.04	80	2.70	41	9.84	2.29
56	7.99	79	3.02	43	8.78	74	2.59	38	9.52	2.21
57	7.74	76	2.92	43	8.50	78	2.49	37	9.28	2.12
58	7.47	80	2.83	44	8.27	74	2.39	34	9.01	2.05
59	7.22	76	2.74	45	7.98	66	2.29	32	8.64	1.97
60	6.95	69	2.66	46	7.64	75	2.20	29	8.39	1.91
61	6.71	62	2.57	46	7.33	71	2.11	30	8.04	1.81
62	6.44	68	2.47	43	7.12	77	2.04	32	7.89	1.72
63	6.27	63	2.40	44	6.90	86	1.96	30	7.76	1.66
64	6.05	55	2.32	42	6.60	97	1.90	32	7.57	1.58
65	5.78	63	2.25	41	6.41	83	1.84	33	7.24	1.51
66	5.56	60	2.17	38	6.16	110	1.79	33	7.26	1.46
67	5.42	67	2.08	35	6.09	122	1.73	33	7.31	1.40
68	5.26	74	2.02	35	6.00	139	1.67	31	7.39	1.36
69	5.04	84	1.95	32	5.88	163	1.63	31	7.51	1.32
70	4.92	72	1.89	31	5.64	204	1.58	30	7.68	1.28

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	—		+		—		+		—
71	3.31	46	49	3.77	43	2.82	53	4.20	51	2.29	46
72	3.19	44	45	3.63	48	2.74	49	4.11	56	2.25	48
73	3.08	48	41	3.56	45	2.67	47	4.01	64	2.20	47
74	2.98	45	40	3.43	38	2.58	45	3.81	73	2.13	45
75	2.87	40	39	3.27	44	2.48	40	3.71	62	2.08	44
76	2.77	34	38	3.11	42	2.39	38	3.53	86	2.01	41
77	2.66	39	35	3.05	47	2.31	36	3.52	98	1.95	38
78	2.56	37	37	2.93	53	2.19	32	3.46	113	1.87	36
79	2.47	30	36	2.77	61	2.11	31	3.38	138	1.80	34
80	2.35	37	31	2.72	51	2.04	32	3.23	180	1.72	29
81	2.23	33	28	2.56	74	1.95	29	3.30		1.66	29
82	2.13	37	31	2.50	85	1.82	26	3.35		1.56	27
83	2.02	43	27	2.45	101	1.75	29	3.46		1.46	24
84	1.89	51	21	2.40	128	1.68	28	3.68		1.40	23
85	1.76	39	25	2.15	167	1.51	24	3.82		1.27	21
86	1.60	61	21	2.21		1.39	19			1.20	20
87	1.48	69	23	2.17		1.25	19			1.04	17
88	1.35	82	25	2.17		1.10	17			0.93	18
89	1.20	104	28	2.24		0.92	11			0.81	16
90	0.97	153	14	2.50		0.83	13			0.70	13
91	0.80		23			0.57	08			0.49	07
92	0.62		20			0.42	07			0.35	08
93	0.46		19			0.27	06			0.21	05
94	0.25		13			0.12	04			0.08	01
95	0.00		00			0.00	00			0.00	00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		—		+		—		
71	4.71	98	1.83	31	5.69		1.52	27		1.25
72	4.67	111	1.77	32	5.78		1.45	25		1.20
73	4.65	128	1.73	32	5.93		1.41	25		1.16
74	4.54	152	1.68	32	6.06		1.36	23		1.13
75	4.33	193	1.64	34	6.26		1.30	21		1.09
76	4.39		1.60	36			1.24	20		1.04
77	4.50		1.57	36			1.21	22		0.99
78	4.59		1.51	35			1.16	22		0.94
79	4.76		1.46	34			1.12	22		0.90
80	5.03		1.43	33			1.10	23		0.87
81			1.37	31			1.06	24		0.82
82			1.29	27			1.02	26		0.76
83			1.22	26			0.96	24		0.72
84			1.17	25			0.92	23		0.69
85			1.06	21			0.85	21		0.64
86			1.00	20			0.80	20		0.60
87			0.87	16			0.71	17		0.54
88			0.75	14			0.61	14		0.47
89			0.65	12			0.53	12		0.41
90			0.57	11			0.46	10		0.36
91			0.42	08			0.34	08		0.26
92			0.27	04			0.23	05		0.18
93			0.16	03			0.13	03		0.10
94			0.07	02			0.05	01		0.04
95			0.00	00			0.00	00		0.00

Tabelle IV.

Jahre der Aufzinsung.	Aufzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
1	1.030000	1.035000	1.040000	1.050000
2	1.060900	1.071225	1.081600	1.102500
3	1.092727	1.108718	1.124864	1.157625
4	1.125509	1.147523	1.169859	1.215506
5	1.159274	1.187686	1.216653	1.276282
6	1.194052	1.229255	1.265319	1.340096
7	1.229874	1.272279	1.315932	1.407100
8	1.266770	1.316809	1.368569	1.477455
9	1.304773	1.362897	1.423312	1.551328
10	1.343916	1.410599	1.480244	1.628895
11	1.384234	1.459970	1.539454	1.710339
12	1.425761	1.511069	1.601032	1.795856
13	1.468534	1.563956	1.665074	1.885649
14	1.512590	1.618695	1.731676	1.979932
15	1.557967	1.675349	1.800944	2.078928
16	1.604706	1.733986	1.872981	2.182875
17	1.652848	1.794676	1.947900	2.292018
18	1.702433	1.857489	2.025817	2.406619
19	1.753506	1.922501	2.106849	2.526950
20	1.806111	1.989789	2.191123	2.653298
21	1.860295	2.059431	2.278768	2.785963
22	1.916103	2.131512	2.369919	2.925261
23	1.973587	2.206114	2.464716	3.071524
24	2.032794	2.283328	2.563304	3.225100
25	2.093778	2.363245	2.665836	3.386355
26	2.156591	2.445959	2.772470	3.555673
27	2.221289	2.531567	2.883369	3.733456
28	2.287928	2.620172	2.998703	3.920129
29	2.356566	2.711878	3.118651	4.116136
30	2.427262	2.806794	3.243398	4.321942

Jahre der Aufzinsung.	Aufzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
31	2.500080	2.905031	3.373133	4.538039
32	2.575083	3.006708	3.508059	4.764941
33	2.652335	3.111942	3.648381	5.003189
34	2.731905	3.220860	3.794316	5.253348
35	2.813862	3.333590	3.946089	5.516015
36	2.898278	3.450266	4.103933	5.791816
37	2.985227	3.571025	4.268090	6.081407
38	3.074783	3.696011	4.438813	6.385477
39	3.167027	3.825372	4.616366	6.704751
40	3.262038	3.959260	4.801021	7.039989
41	3.359899	4.097834	4.993061	7.391988
42	3.460696	4.241258	5.192784	7.761588
43	3.564517	4.389702	5.400495	8.149667
44	3.671452	4.543342	5.616515	8.557150
45	3.781596	4.702359	5.841176	8.985008
46	3.895044	4.866941	6.074823	9.434258
47	4.011895	5.037284	6.317816	9.905971
48	4.132252	5.213589	6.570528	10.401270
49	4.256219	5.396065	6.833349	10.921333
50	4.383906	5.584927	7.106683	11.467400
51	4.515423	5.780399	7.390951	12.040770
52	4.650886	5.982713	7.686589	12.642808
53	4.790412	6.192108	7.994052	13.274949
54	4.934125	6.408832	8.313814	13.938696
55	5.082149	6.633141	8.646367	14.635631
56	5.234613	6.865301	8.992222	15.367412
57	5.391651	7.105587	9.351910	16.135783
58	5.553401	7.354282	9.725987	16.942572
59	5.720003	7.611682	10.115026	17.789701
60	5.891603	7.878091	10.519627	18.679186

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	—		+		—		+		—
71	3.31	46	49	3.77	43	2.82	53	4.20	51	2.29	46
72	3.19	44	45	3.63	48	2.74	49	4.11	56	2.25	48
73	3.08	48	41	3.56	45	2.67	47	4.01	64	2.20	47
74	2.98	45	40	3.43	38	2.58	45	3.81	73	2.13	45
75	2.87	40	39	3.27	44	2.48	40	3.71	62	2.08	44
76	2.77	34	38	3.11	42	2.39	38	3.53	86	2.01	41
77	2.66	39	35	3.05	47	2.31	36	3.52	98	1.95	38
78	2.56	37	37	2.93	53	2.19	32	3.46	113	1.87	36
79	2.47	30	36	2.77	61	2.11	31	3.38	138	1.80	34
80	2.35	37	31	2.72	51	2.04	32	3.23	180	1.72	29
81	2.23	33	28	2.56	74	1.95	29	3.30		1.66	29
82	2.13	37	31	2.50	85	1.82	26	3.35		1.56	27
83	2.02	43	27	2.45	101	1.75	29	3.46		1.46	24
84	1.89	51	21	2.40	128	1.68	28	3.68		1.40	23
85	1.76	39	25	2.15	167	1.51	24	3.82		1.27	21
86	1.60	61	21	2.21		1.39	19			1.20	20
87	1.48	69	23	2.17		1.25	19			1.04	17
88	1.35	82	25	2.17		1.10	17			0.93	18
89	1.20	104	28	2.24		0.92	11			0.81	16
90	0.97	153	14	2.50		0.83	13			0.70	13
91	0.80		23			0.57	08			0.49	07
92	0.62		20			0.42	07			0.35	08
93	0.46		19			0.27	06			0.21	05
94	0.25		13			0.12	04			0.08	01
95	0.00		00			0.00	00			0.00	00

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
71	4.71	98	1.83	31	5.69		1.52	27		1.25
72	4.67	111	1.77	32	5.78		1.45	25		1.20
73	4.65	128	1.73	32	5.93		1.41	25		1.16
74	4.54	152	1.68	32	6.06		1.36	23		1.13
75	4.33	193	1.64	34	6.26		1.30	21		1.09
76	4.39		1.60	36			1.24	20		1.04
77	4.50		1.57	36			1.21	22		0.99
78	4.59		1.51	35			1.16	22		0.94
79	4.76		1.46	34			1.12	22		0.90
80	5.03		1.43	33			1.10	23		0.87
81			1.37	31			1.06	24		0.82
82			1.29	27			1.02	26		0.76
83			1.22	26			0.96	24		0.72
84			1.17	25			0.92	23		0.69
85			1.06	21			0.85	21		0.64
86			1.00	20			0.80	20		0.60
87			0.87	16			0.71	17		0.54
88			0.75	14			0.61	14		0.47
89			0.65	12			0.53	12		0.41
90			0.57	11			0.46	10		0.36
91			0.42	08			0.34	08		0.26
92			0.27	04			0.23	05		0.18
93			0.16	03			0.13	03		0.10
94			0.07	02			0.05	01		0.04
95			0.00	00			0.00	00		0.00

Tabelle IV.

Jahre der Aufzinsung.	Aufzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
1	1.030000	1.035000	1.040000	1.050000
2	1.060900	1.071225	1.081600	1.102500
3	1.092727	1.108718	1.124864	1.157625
4	1.125509	1.147523	1.169859	1.215506
5	1.159274	1.187686	1.216653	1.276282
6	1.194052	1.229255	1.265319	1.340096
7	1.229874	1.272279	1.315932	1.407100
8	1.266770	1.316809	1.368569	1.477455
9	1.304773	1.362897	1.423312	1.551328
10	1.343916	1.410599	1.480244	1.628895
11	1.384234	1.459970	1.539454	1.710339
12	1.425761	1.511069	1.601032	1.795856
13	1.468534	1.563956	1.665074	1.885649
14	1.512590	1.618695	1.731676	1.979932
15	1.557967	1.675349	1.800944	2.078928
16	1.604706	1.733986	1.872981	2.182875
17	1.652848	1.794676	1.947900	2.292018
18	1.702433	1.857489	2.025817	2.406619
19	1.753506	1.922501	2.106849	2.526950
20	1.806111	1.989789	2.191123	2.653298
21	1.860295	2.059431	2.278768	2.785963
22	1.916103	2.131512	2.369919	2.925261
23	1.973587	2.206114	2.464716	3.071524
24	2.032794	2.283328	2.563304	3.225100
25	2.093778	2.363245	2.665836	3.386355
26	2.156591	2.445959	2.772470	3.555673
27	2.221289	2.531567	2.883369	3.733456
28	2.287928	2.620172	2.998703	3.920129
29	2.356566	2.711878	3.118651	4.116136
30	2.427262	2.806794	3.243398	4.321942

Jahre der Aufzinsung.	Aufzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
31	2.500080	2.905031	3.373133	4.538039
32	2.575083	3.006708	3.508059	4.764941
33	2.652335	3.111942	3.648381	5.003189
34	2.731905	3.220860	3.794316	5.253348
35	2.813862	3.333590	3.946089	5.516015
36	2.898278	3.450266	4.103933	5.791816
37	2.985227	3.571025	4.268090	6.081407
38	3.074783	3.696011	4.438813	6.385477
39	3.167027	3.825372	4.616366	6.704751
40	3.262038	3.959260	4.801021	7.039989
41	5.359899	4.097834	4.993061	7.391988
42	3.460696	4.241258	5.192784	7.761588
43	3.564517	4.389702	5.400495	8.149667
44	3.671452	4.543342	5.616515	8.557150
45	3.781596	4.702359	5.841176	8.985008
46	3.895044	4.866941	6.074823	9.434258
47	4.011895	5.037284	6.317816	9.905971
48	4.132252	5.213589	6.570528	10.401270
49	4.256219	5.396065	6.833349	10.921333
50	4.383906	5.584927	7.106683	11.467400
51	4.515423	5.780399	7.390951	12.040770
52	4.650886	5.982713	7.686589	12.642808
53	4.790412	6.192108	7.994052	13.274949
54	4.934125	6.408832	8.313814	13.938696
55	5.082149	6.633141	8.646367	14.635631
56	5.234613	6.865301	8.992222	15.367412
57	5.391651	7.105587	9.351910	16.135783
58	5.553401	7.354282	9.725987	16.942572
59	5.720003	7.611682	10.115026	17.789701
60	5.891603	7.878091	10.519627	18.679186

Jahre der Aufzinsung.	Aufzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
61	6.068351	8.153824	10.940413	19.613145
62	6.250402	8.439208	11.378029	20.593802
63	6.437914	8.734580	11.833150	21.623493
64	6.631051	9.040291	12.306476	22.704667
65	6.829983	9.356701	12.798735	23.839901
66	7.034882	9.684185	13.310685	25.031896
67	7.245929	10.023132	13.843112	26.283490
68	7.463307	10.373941	14.396836	27.597665
69	7.687206	10.737029	14.972710	28.977548
70	7.917822	11.112825	15.571618	30.426426
71	8.155357	11.501774	16.194483	31.947747
72	8.400017	11.904336	16.842262	33.545134
73	8.652018	12.320988	17.515953	35.222391
74	8.911578	12.752223	18.216591	36.983510
75	9.178926	13.198550	18.945255	38.832686
76	9.454293	13.660500	19.703065	40.774320
77	9.737922	14.138617	20.491187	42.813036
78	10.030060	14.633469	21.310835	44.953688
79	10.330962	15.145640	22.163268	47.201372
80	10.640891	15.675738	23.049799	49.561441
81	10.960117	16.224388	23.971791	52.039513
82	11.288921	16.792242	24.930663	54.641489
83	11.627588	17.379970	25.927889	57.373563
84	11.976416	17.988269	26.965005	60.242241
85	12.335709	18.617859	28.043605	63.254353
86	12.705780	19.269484	29.165349	66.417071
87	13.086953	19.943916	30.331963	69.737925
88	13.479562	20.641953	31.545242	73.224821
89	13.883949	21.364421	32.807051	76.886062
90	14.300467	22.112176	34.119333	80.730365

Jahre der Aufzinsung.	Aufzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
91	14.729481	22.886102	35.484107	84.766883
92	15.171366	23.687116	36.903471	89.005227
93	15.626507	24.516165	38.379610	93.455489
94	16.095302	25.374230	39.914794	98.128263
95	16.578161	26.262329	41.511386	103.034676
96	17.075506	27.181510	43.171841	108.186410
97	17.587771	28.132863	44.898715	113.595731
98	18.115404	29.117513	46.694664	119.275517
99	18.658866	30.136626	48.562450	125.239293
100	19.218632	31.191408	50.504948	131.501258

Tabelle V.

Jahre der Abzinsung.	Abzinsungsfaktoren zu			
	3%	3½%	4%	5%
1	0.970874	0.966184	0.961538	0.952381
2	0.942596	0.933511	0.924556	0.907029
3	0.915142	0.901943	0.888996	0.863838
4	0.888487	0.871442	0.854804	0.822702
5	0.862609	0.841973	0.821927	0.783526
6	0.837484	0.813501	0.790315	0.746215
7	0.813092	0.785991	0.759918	0.710681
8	0.789409	0.759412	0.730690	0.676839
9	0.766417	0.733731	0.702587	0.644609
10	0.744094	0.708919	0.675564	0.613913
11	0.722421	0.684946	0.649581	0.584679
12	0.701380	0.661783	0.624597	0.556837
13	0.680951	0.639404	0.600574	0.530321
14	0.661118	0.617782	0.577475	0.505068
15	0.641862	0.596891	0.555265	0.481017
16	0.623167	0.576706	0.533908	0.458112
17	0.605016	0.557204	0.513373	0.436297
18	0.587395	0.538361	0.493628	0.415521
19	0.570286	0.520156	0.474642	0.395734
20	0.553676	0.502566	0.456387	0.376889
21	0.537549	0.485571	0.438834	0.358942
22	0.521893	0.469151	0.421955	0.341850
23	0.506692	0.453286	0.405726	0.325571
24	0.491934	0.437957	0.390121	0.310068
25	0.477606	0.423147	0.375117	0.295303
26	0.463695	0.408838	0.360689	0.281241
27	0.450189	0.395012	0.346817	0.267848
28	0.437077	0.381654	0.333477	0.255094
29	0.424346	0.368748	0.320651	0.242946
30	0.411987	0.356278	0.308319	0.231377

Jahre der Abzinsung.	Abzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
31	0.399987	0.344230	0.296460	0.220359
32	0.388337	0.332590	0.285058	0.209866
33	0.377026	0.321343	0.274094	0.199873
34	0.366045	0.310476	0.263552	0.190355
35	0.355383	0.299977	0.253415	0.181290
36	0.345032	0.289833	0.243669	0.172657
37	0.334983	0.280032	0.234297	0.164436
38	0.325226	0.270562	0.225285	0.156605
39	0.315754	0.261413	0.216621	0.149148
40	0.306557	0.252572	0.208289	0.142046
41	0,297628	0.244031	0.200278	0.135282
42	0.288959	0.235779	0.192575	0.128840
43	0.280543	0.227806	0.185168	0.122704
44	0.272372	0.220102	0.178046	0.116861
45	0.264439	0.212659	0.171198	0.111297
46	0.256737	0.205468	0.164614	0.105997
47	0.249259	0.198520	0.158283	0.100949
48	0.241999	0.191806	0.152195	0.096142
49	0.234950	0.185320	0.146341	0.091564
50	0.228107	0.179053	0.140713	0.087204
51	0.221463	0.172998	0.135301	0.083051
52	0.215013	0.167148	0.130097	0.079096
53	0.208750	0.161496	0.125093	0.075330
54	0.202670	0.156035	0.120282	0.071743
55	0.196767	0.150758	0.115656	0.068326
56	0.191036	0.145660	0.111207	0.065073
57	0.185472	0.140734	0.106930	0.061974
58	0.180070	0.135975	0.102817	0.059023
59	0.174825	0.131377	0.098863	0.056212
60	0.169733	0.126934	0.095060	0.053536

Jahre der Abzinsung.	Abzinsungsfaktoren zu 3%	3½%	4%	5%
61	0.164789	0.122642	0.091404	0.050986
62	0.159990	0.118495	0.087889	0.048558
63	0.155330	0.114487	0.084508	0.046246
64	0.150806	0.110616	0.081258	0.044044
65	0.146413	0.106875	0.078133	0.041946
66	0.142149	0.103261	0.075128	0.039949
67	0.138009	0.099769	0.072238	0.038047
68	0.133989	0.096395	0.069460	0.036235
69	0.130086	0.093136	0.066788	0.034509
70	0.126297	0.089986	0.064219	0.032866
71	0.122619	0.086943	0.061749	0.031301
72	0.119047	0.084003	0.059374	0.029811
73	0.115580	0.081162	0.057091	0.028391
74	0.112214	0.078418	0.054895	0.027039
75	0.108945	0.075766	0.052784	0.025752
76	0.105772	0.073204	0.050754	0.024525
77	0.102691	0.070728	0.048801	0.023357
78	0.099700	0.068336	0.046924	0.022245
79	0.096796	0.066026	0.045120	0.021186
80	0.093977	0.063793	0.043384	0.020177
81	0.091240	0.061636	0.041716	0.019216
82	0.088582	0.059551	0.040111	0.018301
83	0.086002	0.057537	0.038569	0.017430
84	0.083497	0.055592	0.037085	0.016600
85	0.081065	0.053712	0.035659	0.015809
86	0.078704	0.051896	0.034287	0.015056
87	0.076412	0.050141	0.032969	0.014339
88	0.074186	0.048445	0.031701	0.013657
89	0.072026	0.046807	0.030481	0.013006
90	0.069928	0.045224	0.029309	0.012387

Jahre der Abzinsung.	Abzinsungsfaktoren zu 3 %	3½ %	4 %	5 %
91	0.067891	0.043695	0.028182	0.011797
92	0.065914	0.042217	0.027098	0.011235
93	0.063994	0.040789	0.026056	0.010700
94	0.062130	0.039410	0.025053	0.010191
95	0.060320	0.038077	0.024090	0.009705
96	0.058563	0.036790	0.023163	0.009243
97	0.056858	0.035546	0.022272	0.008803
98	0.055202	0.034344	0.021416	0.008384
99	0.053594	0.033182	0.020592	0.007985
100	0.052033	0.032060	0.019800	0.007604

Tabelle VI.

Dauer der Zeitrente. Jahre:	Baare Werthe der Zeitrenten.			
	3%	3½%	4%	5%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	1.970874	1.966184	1.961538	1.952381
3	2.913470	2.899694	2.886095	2.859410
4	3.828611	3.801637	3.775091	3.723248
5	4.717098	4.673079	4.629895	4.545951
6	5.579707	5.515052	5.451822	5.329477
7	6.417191	6.328553	6.242137	6.075692
8	7.230283	7.114544	7.002055	6.786373
9	8.019692	7.873956	7.732745	7.463213
10	8.786109	8.607687	8.435332	8.107822
11	9.530203	9.316605	9.110896	8.721735
12	10.252624	10.001551	9.760477	9.306414
13	10.954004	10.663334	10.385074	9.863252
14	11.634955	11.302738	10.985648	10.393573
15	12.296073	11.920520	11.563123	10.898641
16	12.937935	12.517411	12.118387	11.379658
17	13.561102	13.094117	12.652296	11.837770
18	14.166118	13.651321	13.165669	12.274066
19	14.753513	14.189682	13.659297	12.689587
20	15.323799	14.709837	14.133939	13.085321
21	15.877475	15.212403	14.590326	13.462210
22	16.415024	15.697974	15.029160	13.821153
23	16.936917	16.167125	15.451115	14.163003
24	17.443608	16.620410	15.856842	14.488574
25	17.935542	17.058368	16.246963	14.798642
26	18.413148	17.481515	16.622080	15.093945
27	18.876842	17.890352	16.982769	15.375185
28	19.327031	18.285365	17.329586	15.643034
29	19.764108	18.667019	17.663063	15.898127
30	20.188455	19.035767	17.983715	16.141074

Dauer der Zeitrente. Jahre:	Baare Werthe der Zeitrenten. 3%	3½%	4%	5%
31	20.600441	19.392045	18.292033	16.372451
32	21.000428	19.736276	18.588494	16.592811
33	21.388766	20.068865	18.873551	16.802677
34	21.765792	20.390208	19.147646	17.002549
35	22.131837	20.700684	19.411198	17.192904
36	22.487220	21.000661	19.664613	17.374194
37	22.832252	21.290494	19.908282	17.546852
38	23.167235	21.570525	20.142579	17.711287
39	23.492462	21.841087	20.367864	17.867893
40	23.808215	22.102500	20.584485	18.017041
41	24.114772	22.355072	20.792774	18.159086
42	24.412400	22.599104	20.993052	18.294368
43	24.701359	22.834883	21.185627	18.423208
44	24.981902	23.062689	21.370795	18.545912
45	25.254274	23.282791	21.548841	18.662773
46	25.518713	23.495450	21.720040	18.774070
47	25.775449	23.700918	21.884654	18.880066
48	26.024708	23.899438	22.042936	18.981016
49	26.266707	24.091244	22.195131	19.077158
50	26.501657	24.276564	22.341472	19.168722
51	26.729764	24.455618	22.482185	19.255925
52	26.951227	24.628616	22.617485	19.338977
53	27.166240	24.795765	22.747582	19.418073
54	27.374990	24.957260	22.872675	19.493403
55	27.577660	25.113295	22.992957	19.565146
56	27.774428	25.264053	23.108612	19.633472
57	27.965464	25.409713	23.219819	19.698545
58	28.150936	25.550448	23.326749	19.760519
59	28.331005	25.686423	23.429567	19.819542
60	28.505831	25.817800	23.528430	19.875754

Dauer der Zeitrente. Jahre:	Baare Werthe der Zeitrenten. 3%	3½%	4%	5%
61	28.675564	25.944734	23.623490	19.929290
62	28.840353	26.067376	23.714894	19.980276
63	29.000343	26.185870	23.802783	20.028834
64	29.155673	26.300358	23.887291	20.075080
65	29.306478	26.410974	23.968549	20.119124
66	29.452892	26.517849	24.046682	20.161070
67	29.595040	26.621110	24.121810	20.201019
68	29.733049	26.720880	24.194048	20.239066
69	29.867038	26.817275	24.263507	20.275301
70	29.997124	26.910411	24.330296	20.309810
71	30.123421	27.000397	24.394515	20.342677
72	30.246040	27.087340	24.456264	20.373978
73	30.365088	27.171343	24.515639	20.403788
74	30.480667	27.252505	24.572730	20.432179
75	30.592881	27.330923	24.627625	20.459218
76	30.701826	27.406689	24.680408	20.484970
77	30.807598	27.479892	24.731162	20.509495
78	30.910290	27.550621	24.779963	20.532853
79	31.009990	27.618957	24.826888	20.555098
80	31.106786	27.684983	24.872008	20.576284
81	31.200763	27.748776	24.915392	20.596460
82	31.292003	27.810411	24.957108	20.615677
83	31.380586	27.869963	24.997219	20.633978
84	31.466588	27.927500	25.035787	20.651407
85	31.550086	27.983092	25.072872	20.668007
86	31.631151	28.036804	25.108531	20.683816
87	31.709855	28.088699	25.142818	20.698873
88	31.786267	28.138840	25.175787	20.713212
89	31.860454	28.187285	25.207487	20.726869
90	31.932479	28.234092	25.237969	20.739875

Dauer der Zeitrente. Jahre:	Baare Werthe der Zeitrenten. 3%	3½%	4%	5%
91	32.002407	28.279316	25.267278	20.752262
92	32.070298	28.323010	25.295459	20.764059
93	32.136212	28.365227	25.322557	20.775294
94	32.200206	28.406017	25.348612	20.785994
95	32.262336	28.445427	25.373666	20.796185
96	32.322656	28.483504	25.397756	20.805891
97	32.381219	28.520294	25.420919	20.815134
98	32.438077	28.555839	25.443191	20.823937
99	32.493279	28.590183	25.464607	20.832321
100	32.546872	28.623365	25.485199	20.840306

Tabelle VII.

Baare Werthe der Lebensrenten und der Sterbethaler bei jährlicher Vorausbezahlung, nach Süßmilch.

A. 3%.

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen		Summen der abgezinsten Zahlen		Baare Werthe		Summen der Summen der abgezinsten Zahlen	
	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
0	1000.	250.	14660.1	590.197	14.6601	0.5902	283019.	6609.33
1	728.155	86.4078	13660.1	340.197	18.7599	0.4672	268359.	6019.13
2	623.056	40.5316	12931.9	253.789	20.7556	0.4073	254699.	5678.93
3	565.558	22.8785	12308.8	213.257	21.7640	0.3771	241767.	5425.14
4	526.873	12.4388	11743.2	190.379	22.2885	0.3613	229458.	5211.88
5	499.451	10.3513	11216.3	177.940	22.4573	0.3563	217715	5021.50
6	474.853	9.21232	10716.9	167.589	22.5689	0.3529	206499.	4843.56
7	452.079	7.31783	10242.1	158.377	22.6556	0.3503	195782.	4675.97
8	431.807	6.31527	9790.04	151.059	22.6723	0.3498	185540.	4517.59
9	413.099	5.36492	9358.23	144.744	22.6537	0.3504	175750.	4366.53
10	395.858	3.72047	8945.13	139.379	22.5968	0.3521	166392.	4221.79
11	380.716	2.88968	8549.27	135.659	22.4558	0.3563	157447.	4082.41
12	366.822	2.80552	8168.55	132.769	22.2684	0.3619	148898.	3946.75
13	353.413	2.72380	7801.73	129.964	22.0754	0.3678	140729.	3813.98
14	340.476	2.64447	7448.32	127.240	21.8762	0.3737	132927.	3684.02
15	327.991	2.56745	7107.84	124.596	21.6708	0.3799	125479.	3556.78
16	315.946	2.49267	6779.85	122.029	21.4589	0.3862	118371.	3432.18
17	304.323	2.42006	6463.90	119.536	21.2403	0.3928	111591.	3310.15
18	293.110	2.34958	6159.58	117.116	21.0146	0.3996	105127.	3190.62
19	282.291	2.28114	5866.47	114.766	20.7817	0.4065	98967.3	3073.50
20	271.855	2.76838	5584.18	112.485	20.5410	0.4138	93100.8	2958.73
21	261.249	2.68774	5312.33	109.716	20.3344	0.4200	87516.6	2846.25
22	251.030	2.60946	5051.08	107.028	20.1214	0.4264	82204.3	2736.53
23	241.185	2.53346	4800.05	104.419	19.9019	0.4329	77153.2	2629.50
24	231.701	2.45967	4558.86	101.886	19.6756	0.4397	72353.2	2525.08
25	222.564	2.38803	4327.16	99.4260	19.4423	0.4467	67794.3	2423.19

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden.	Abgezinste Zahlen der Sterbenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
26	213.763	2.31847	4104.60	97.0380	19.2016	0.4540	63467.1	2323.76
27	205.286	2.25094	3890.84	94.7195	18.9533	0.4614	59362.5	2226.72
28	197.122	2.62246	3685.55	92.4686	18.6968	0.4691	55471.7	2132.00
29	188.834	2.54608	3488.43	89.8461	18.4735	0.4758	51786.1	2039.53
30	180.862	2.47192	3299.60	87.3000	18.2437	0.4827	48297.7	1949.68
31	173.194	2.39982	3118.74	84.8281	18.0072	0.4898	44998.1	1862.38
32	165.820	2.33002	2945.55	82.4283	17.7635	0.4971	41879.4	1777.55
33	158.728	2.26216	2779.73	80.0983	17.5125	0.5046	38933.8	1695.12
34	151.909	2.19627	2621.00	77.8361	17.2537	0.5124	36154.1	1615.02
35	145.352	2.48768	2469.09	75.6398	16.9870	0.5204	33533.1	1537.18
36	138.703	2.41522	2323.74	73.1521	16.7534	0.5274	31064.0	1461.54
37	132.318	2.34488	2185.04	70.7369	16.5136	0.5346	28740.3	1388.39
38	126.188	2.27658	2052.72	68.3920	16.2672	0.5420	26555.2	1317.65
39	120.302	2.21028	1926.53	66.1154	16.0141	0.5496	24502.5	1249.26
40	114.652	2.14590	1806.23	63.9051	15.7540	0.5574	22576.0	1183.14
41	109.229	2.08340	1691.58	61.7592	15.4865	0.5654	20769.8	1119.24
42	104.025	2.02271	1582.35	59.6758	15.2112	0.5737	19078.2	1057.48
43	99.0317	1.96380	1478.32	57.6531	14.9278	0.5822	17495.8	997.803
44	94.2407	1.90660	1379.29	55.6893	14.6359	0.5909	16017.5	940.150
45	89.6448	1.85107	1285.05	53.7827	14.3349	0.6000	14638.2	884.461
46	85.2367	2.05390	1195.41	51.9316	14.0246	0.6093	13353.2	830.678
47	80.7599	1.99407	1110.17	49.8777	13.7466	0.6176	12157.8	778.746
48	76.4717	1.93599	1029.41	47.8836	13.4613	0.6262	11047.6	728.868
49	72.3646	1.87960	952.940	45.9476	13.1686	0.6349	10018.2	680.984
50	68.4321	2.05296	880.575	44.0680	12.8679	0.6440	9065.30	635.036
51	64.4457	1.99317	812.143	42.0150	12.6020	0.6519	8184.73	590.968
52	60.6336	1.93512	747.698	40.0218	12.3314	0.6601	7372.59	548.953
53	56.9887	1.87875	687.064	38.0867	12.0561	0.6683	6624.89	508.931
54	53.5049	1.82403	630.075	36.2079	11.7760	0.6767	5937.83	470.844
55	50.1755	1.77090	576.570	34.3839	11.4910	0.6853	5307.76	434.636

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen		Summen der abgezinsten Zahlen		Baare Werthe		Summen der Summen der abgezinsten Zahlen	
	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
56	46.9948	1.71932	526.395	32.6130	11.2011	0.6940	4731.19	400.252
57	43.9569	1.66925	479.400	30.8937	10.9061	0.7028	4204.80	367.639
58	41.0560	1.62063	435.443	29.2244	10.6061	0.7118	3725.40	336.745
59	38.2867	1.57342	394.387	27.6038	10.3009	0.7210	3289.96	307.521
60	35.6439	1.52760	356.100	26.0304	9.9905	0.7303	2895.57	279.917
61	33.1226	1.48310	320.456	24.5028	9.6748	0.7398	2539.47	253.887
62	30.7181	1.59990	287.333	23.0197	9.3539	0.7494	2219.01	229.384
63	28.2701	1.55330	256.615	21.4198	9.0773	0.7577	1931.68	206.364
64	25.9386	1.50806	228.345	19.8665	8.8033	0.7659	1675.07	184.944
65	23.7189	1.46413	202.407	18.3584	8.5336	0.7740	1446.73	165.077
66	21.6066	1.42149	178.688	16.8943	8.2701	0.7819	1244.32	146.719
67	19.5973	1.38009	157.081	15.4728	8.0155	0.7895	1065.63	129.825
68	17.6866	1.33989	137.484	14.0927	7.7733	0.7968	908.545	114.352
69	15.8705	1.30086	119.797	12.7528	7.5484	0.8035	771.061	100.259
70	14.1453	1.13667	103.926	11.4519	7.3470	0.8096	651.264	87.5059
71	12.6298	1.10357	89.7810	10.3152	7.1087	0.8167	547.338	76.0540
72	11.1904	1.07142	77.1512	9.21161	6.8944	0.8282	457.557	65.7388
73	9.82430	0.924640	65.9608	8.14019	6.7140	0.8286	380.406	56.5272
74	8.64048	0.897712	56.1365	7.21555	6.4969	0.8351	314.444	48.3870
75	7.51720	0.762615	47.4960	6.31784	6.3183	0.8405	258.308	41.1715
76	6.55786	0.740404	39.9788	5.55523	6.0963	0.8471	210.813	34.8537
77	5.64800	0.616146	33.4209	4.81483	5.9173	0.8525	170.834	29.2985
78	4.88531	0.598200	27.7729	4.19868	5.6850	0.8594	137.413	24.4837
79	4.16223	0.580776	22.8876	3.60048	5.4988	0.8650	109.640	20.2850
80	3.47715	0.469885	18.7253	3.01970	5.3852	0.8683	86.7524	16.6845
81	2.91968	0.364960	15.2482	2.54982	5.2226	0.8733	68.0270	13.6648
82	2.48030	0.354328	12.3285	2.18486	4.9706	0.8809	52.7788	11.1150
83	2.06405	0.344008	9.84820	1.83053	4.7713	0.8869	40.4503	8.93017
84	1.66994	0.250491	7.78415	1.48652	4.6613	0.8902	30.6021	7.09964
85	1.37810	0.243195	6.11421	1.23603	4.4367	0.8969	22.8179	5.61312

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden.	Abgezinste Zahlen der Sterbenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
86	1.10186	0.157408	4.73611	0.992833	4.2983	0.9011	16.7037	4.37709
87	0.916944	0.152824	3.63425	0.835425	3.9634	0.9111	11.9676	3.38426
88	0.741860	0.148372	2.71731	0.682601	3.6628	0.9201	8.33335	2.54883
89	0.576208	0.144052	1.97545	0.534229	3.4283	0.9272	5.61604	1.86623
90	0.419568	0.069928	1.39924	0.390177	3.3350	0.9299	3.64059	1.33200
91	0.339455	0.067891	0.979673	0.320249	2.8860	0.9434	2.24135	0.941821
92	0.263656	0.065914	0.640218	0.252358	2.4282	0.9572	1.26168	0.621572
93	0.191982	0.063994	0.376562	0.186444	1.9614	0.9712	0.621462	0.369214
94	0.124260	0.062130	0.184580	0.122450	1.4854	0.9854	0.244900	0.182770
95	0.060320	0.060320	0.060320	0.060320	1.0000	1.0000	0.060320	0.060320

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	—		+		—		+		—
71	3.31	46	49	3.77	43	2.82	53	4.20	51	2.29	46
72	3.19	44	45	3.63	48	2.74	49	4.11	56	2.25	48
73	3.08	48	41	3.56	45	2.67	47	4.01	64	2.20	47
74	2.98	45	40	3.43	38	2.58	45	3.81	73	2.13	45
75	2.87	40	39	3.27	44	2.48	40	3.71	62	2.08	44
76	2.77	34	38	3.11	42	2.39	38	3.53	86	2.01	41
77	2.66	39	35	3.05	47	2.31	36	3.52	98	1.95	38
78	2.56	37	37	2.93	53	2.19	32	3.46	113	1.87	36
79	2.47	30	36	2.77	61	2.11	31	3.38	138	1.80	34
80	2.35	37	31	2.72	51	2.04	32	3.23	180	1.72	29
81	2.23	33	28	2.56	74	1.95	29	3.30		1.66	29
82	2.13	37	31	2.50	85	1.82	26	3.35		1.56	27
83	2.02	43	27	2.45	101	1.75	29	3.46		1.46	24
84	1.89	51	21	2.40	128	1.68	28	3.68		1.40	23
85	1.76	39	25	2.15	167	1.51	24	3.82		1.27	21
86	1.60	61	21	2.21		1.39	19			1.20	20
87	1.48	69	23	2.17		1.25	19			1.04	17
88	1.35	82	25	2.17		1.10	17			0.93	18
89	1.20	104	28	2.24		0.92	11			0.81	16
90	0.97	153	14	2.50		0.83	13			0.70	13
91	0.80		23			0.57	08			0.49	07
92	0.62		20			0.42	07			0.35	08
93	0.46		19			0.27	06			0.21	05
94	0.25		13			0.12	04			0.08	01
95	0.00		00			0.00	00			0.00	00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
71	4.71	98	1.83	31	5.69		1.52	27		1.25
72	4.67	111	1.77	32	5.78		1.45	25		1.20
73	4.65	128	1.73	32	5.93		1.41	25		1.16
74	4.54	152	1.68	32	6.06		1.36	23		1.13
75	4.33	193	1.64	34	6.26		1.30	21		1.09
76	4.39		1.60	36			1.24	20		1.04
77	4.50		1.57	36			1.21	22		0.99
78	4.59		1.51	35			1.16	22		0.94
79	4.76		1.46	34			1.12	22		0.90
80	5.03		1.43	33			1.10	23		0.87
81			1.37	31			1.06	24		0.82
82			1.29	27			1.02	26		0.76
83			1.22	26			0.96	24		0.72
84			1.17	25			0.92	23		0.69
85			1.06	21			0.85	21		0.64
86			1.00	20			0.80	20		0.60
87			0.87	16			0.71	17		0.54
88			0.75	14			0.61	14		0.47
89			0.65	12			0.53	12		0.41
90			0.57	11			0.46	10		0.36
91			0.42	08			0.34	08		0.26
92			0.27	04			0.23	05		0.18
93			0.16	03			0.13	03		0.10
94			0.07	02			0.05	01		0.04
95			0.00	00			0.00	00		0.00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
71	3.31	46	49	3.77	43	2.82	53	4.20	51	2.29	46
72	3.19	44	45	3.63	48	2.74	49	4.11	56	2.25	48
73	3.08	48	41	3.56	45	2.67	47	4.01	64	2.20	47
74	2.98	45	40	3.43	38	2.58	45	3.81	73	2.13	45
75	2.87	40	39	3.27	44	2.48	40	3.71	62	2.08	44
76	2.77	34	38	3.11	42	2.39	38	3.53	86	2.01	41
77	2.66	39	35	3.05	47	2.31	36	3.52	98	1.95	38
78	2.56	37	37	2.93	53	2.19	32	3.46	113	1.87	36
79	2.47	30	36	2.77	61	2.11	31	3.38	138	1.80	34
80	2.35	37	31	2.72	51	2.04	32	3.23	180	1.72	29
81	2.23	33	28	2.56	74	1.95	29	3.30		1.66	29
82	2.13	37	31	2.50	85	1.82	26	3.35		1.56	27
83	2.02	43	27	2.45	101	1.75	29	3.46		1.46	24
84	1.89	51	21	2.40	128	1.68	28	3.68		1.40	23
85	1.76	39	25	2.15	167	1.51	24	3.82		1.27	21
86	1.60	61	21	2.21		1.39	19			1.20	20
87	1.48	69	23	2.17		1.25	19			1.04	17
88	1.35	82	25	2.17		1.10	17			0.93	18
89	1.20	104	28	2.24		0.92	11			0.81	16
90	0.97	153	14	2.50		0.83	13			0.70	13
91	0.80		23			0.57	08			0.49	07
92	0.62		20			0.42	07			0.35	08
93	0.46		19			0.27	06			0.21	05
94	0.25		13			0.12	04			0.08	01
95	0.00		00			0.00	00			0.00	00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		—		+		—		
71	4.71	98	1.83	31	5.69		1.52	27		1.25
72	4.67	111	1.77	32	5.78		1.45	25		1.20
73	4.65	128	1.73	32	5.93		1.41	25		1.16
74	4.54	152	1.68	32	6.06		1.36	23		1.13
75	4.33	193	1.64	34	6.26		1.30	21		1.09
76	4.39		1.60	36			1.24	20		1.04
77	4.50		1.57	36			1.21	22		0.99
78	4.59		1.51	35			1.16	22		0.94
79	4.76		1.46	34			1.12	22		0.90
80	5.03		1.43	33			1.10	23		0.87
81			1.37	31			1.06	24		0.82
82			1.29	27			1.02	26		0.76
83			1.22	26			0.96	24		0.72
84			1.17	25			0.92	23		0.69
85			1.06	21			0.85	21		0.64
86			1.00	20			0.80	20		0.60
87			0.87	16			0.71	17		0.54
88			0.75	14			0.61	14		0.47
89			0.65	12			0.53	12		0.41
90			0.57	11			0.46	10		0.36
91			0.42	08			0.34	08		0.26
92			0.27	04			0.23	05		0.18
93			0.16	03			0.13	03		0.10
94			0.07	02			0.05	01		0.04
95			0.00	00			0.00	00		0.00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
71	3.31	46	49	3.77	43	2.82	53	4.20	51	2.29	46
72	3.19	44	45	3.63	48	2.74	49	4.11	56	2.25	48
73	3.08	48	41	3.56	45	2.67	47	4.01	64	2.20	47
74	2.98	45	40	3.43	38	2.58	45	3.81	73	2.13	45
75	2.87	40	39	3.27	44	2.48	40	3.71	62	2.08	44
76	2.77	34	38	3.11	42	2.39	38	3.53	86	2.01	41
77	2.66	39	35	3.05	47	2.31	36	3.52	98	1.95	38
78	2.56	37	37	2.93	53	2.19	32	3.46	113	1.87	36
79	2.47	30	36	2.77	61	2.11	31	3.38	138	1.80	34
80	2.35	37	31	2.72	51	2.04	32	3.23	180	1.72	29
81	2.23	33	28	2.56	74	1.95	29	3.30		1.66	29
82	2.13	37	31	2.50	85	1.82	26	3.35		1.56	27
83	2.02	43	27	2.45	101	1.75	29	3.46		1.46	24
84	1.89	51	21	2.40	128	1.68	28	3.68		1.40	23
85	1.76	39	25	2.15	167	1.51	24	3.82		1.27	21
86	1.60	61	21	2.21		1.39	19			1.20	20
87	1.48	69	23	2.17		1.25	19			1.04	17
88	1.35	82	25	2.17		1.10	17			0.93	18
89	1.20	104	28	2.24		0.92	11			0.81	16
90	0.97	153	14	2.50		0.83	13			0.70	13
91	0.80		23			0.57	08			0.49	07
92	0.62		20			0.42	07			0.35	08
93	0.46		19			0.27	06			0.21	05
94	0.25		13			0.12	04			0.08	01
95	0.00		00			0.00	00			0.00	00

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
71	4.71	98	1.83	31	5.69		1.52	27		1.25
72	4.67	111	1.77	32	5.78		1.45	25		1.20
73	4.65	128	1.73	32	5.93		1.41	25		1.16
74	4.54	152	1.68	32	6.06		1.36	23		1.13
75	4.33	193	1.64	34	6.26		1.30	21		1.09
76	4.39		1.60	36			1.24	20		1.04
77	4.50		1.57	36			1.21	22		0.99
78	4.59		1.51	35			1.16	22		0.94
79	4.76		1.46	34			1.12	22		0.90
80	5.03		1.43	33			1.10	23		0.87
81			1.37	31			1.06	24		0.82
82			1.29	27			1.02	26		0.76
83			1.22	26			0.96	24		0.72
84			1.17	25			0.92	23		0.69
85			1.06	21			0.85	21		0.64
86			1.00	20			0.80	20		0.60
87			0.87	16			0.71	17		0.54
88			0.75	14			0.61	14		0.47
89			0.65	12			0.53	12		0.41
90			0.57	11			0.46	10		0.36
91			0.42	08			0.34	08		0.26
92			0.27	04			0.23	05		0.18
93			0.16	03			0.13	03		0.10
94			0.07	02			0.05	01		0.04
95			0.00	00			0.00	00		0.00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	—		+		—		+		—
71	3.31	46	49	3.77	43	2.82	53	4.20	51	2.29	46
72	3.19	44	45	3.63	48	2.74	49	4.11	56	2.25	48
73	3.08	48	41	3.56	45	2.67	47	4.01	64	2.20	47
74	2.98	45	40	3.43	38	2.58	45	3.81	73	2.13	45
75	2.87	40	39	3.27	44	2.48	40	3.71	62	2.08	44
76	2.77	34	38	3.11	42	2.39	38	3.53	86	2.01	41
77	2.66	39	35	3.05	47	2.31	36	3.52	98	1.95	38
78	2.56	37	37	2.93	53	2.19	32	3.46	113	1.87	36
79	2.47	30	36	2.77	61	2.11	31	3.38	138	1.80	34
80	2.35	37	31	2.72	51	2.04	32	3.23	180	1.72	29
81	2.23	33	28	2.56	74	1.95	29	3.30		1.66	29
82	2.13	37	31	2.50	85	1.82	26	3.35		1.56	27
83	2.02	43	27	2.45	101	1.75	29	3.46		1.46	24
84	1.89	51	21	2.40	128	1.68	28	3.68		1.40	23
85	1.76	39	25	2.15	167	1.51	24	3.82		1.27	21
86	1.60	61	21	2.21		1.39	19			1.20	20
87	1.48	69	23	2.17		1.25	19			1.04	17
88	1.35	82	25	2.17		1.10	17			0.93	18
89	1.20	104	28	2.24		0.92	11			0.81	16
90	0.97	153	14	2.50		0.83	13			0.70	13
91	0.80		23			0.57	08			0.49	07
92	0.62		20			0.42	07			0.35	08
93	0.46		19			0.27	06			0.21	05
94	0.25		13			0.12	04			0.08	01
95	0.00		00			0.00	00			0.00	00

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.	Ueber-lebens-dauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
71	4.71	98	1.83	31	5.69		1.52	27		1.25
72	4.67	111	1.77	32	5.78		1.45	25		1.20
73	4.65	128	1.73	32	5.93		1.41	25		1.16
74	4.54	152	1.68	32	6.06		1.36	23		1.13
75	4.33	193	1.64	34	6.26		1.30	21		1.09
76	4.39		1.60	36			1.24	20		1.04
77	4.50		1.57	36			1.21	22		0.99
78	4.59		1.51	35			1.16	22		0.94
79	4.76		1.46	34			1.12	22		0.90
80	5.03		1.43	33			1.10	23		0.87
81			1.37	31			1.06	24		0.82
82			1.29	27			1.02	26		0.76
83			1.22	26			0.96	24		0.72
84			1.17	25			0.92	23		0.69
85			1.06	21			0.85	21		0.64
86			1.00	20			0.80	20		0.60
87			0.87	16			0.71	17		0.54
88			0.75	14			0.61	14		0.47
89			0.65	12			0.53	12		0.41
90			0.57	11			0.46	10		0.36
91			0.42	08			0.34	08		0.26
92			0.27	04			0.23	05		0.18
93			0.16	03			0.13	03		0.10
94			0.07	02			0.05	01		0.04
95			0.00	00			0.00	00		0.00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
71	3.31	46	49	3.77	43	2.82	53	4.20	51	2.29	46
72	3.19	44	45	3.63	48	2.74	49	4.11	56	2.25	48
73	3.08	48	41	3.56	45	2.67	47	4.01	64	2.20	47
74	2.98	45	40	3.43	38	2.58	45	3.81	73	2.13	45
75	2.87	40	39	3.27	44	2.48	40	3.71	62	2.08	44
76	2.77	34	38	3.11	42	2.39	38	3.53	86	2.01	41
77	2.66	39	35	3.05	47	2.31	36	3.52	98	1.95	38
78	2.56	37	37	2.93	53	2.19	32	3.46	113	1.87	36
79	2.47	30	36	2.77	61	2.11	31	3.38	138	1.80	34
80	2.35	37	31	2.72	51	2.04	32	3.23	180	1.72	29
81	2.23	33	28	2.56	74	1.95	29	3.30		1.66	29
82	2.13	37	31	2.50	85	1.82	26	3.35		1.56	27
83	2.02	43	27	2.45	101	1.75	29	3.46		1.46	24
84	1.89	51	21	2.40	128	1.68	28	3.68		1.40	23
85	1.76	39	25	2.15	167	1.51	24	3.82		1.27	21
86	1.60	61	21	2.21		1.39	19			1.20	20
87	1.48	69	23	2.17		1.25	19			1.04	17
88	1.35	82	25	2.17		1.10	17			0.93	18
89	1.20	104	28	2.24		0.92	11			0.81	16
90	0.97	153	14	2.50		0.83	13			0.70	13
91	0.80		23			0.57	08			0.49	07
92	0.62		20			0.42	07			0.35	08
93	0.46		19			0.27	06			0.21	05
94	0.25		13			0.12	04			0.08	01
95	0.00		00			0.00	00			0.00	00

Alter der einen Person:	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.	Ueberlebensdauern.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
71	4.71	98	1.83	31	5.69		1.52	27		1.25
72	4.67	111	1.77	32	5.78		1.45	25		1.20
73	4.65	128	1.73	32	5.93		1.41	25		1.16
74	4.54	152	1.68	32	6.06		1.36	23		1.13
75	4.33	193	1.64	34	6.26		1.30	21		1.09
76	4.39		1.60	36			1.24	20		1.04
77	4.50		1.57	36			1.21	22		0.99
78	4.59		1.51	35			1.16	22		0.94
79	4.76		1.46	34			1.12	22		0.90
80	5.03		1.43	33			1.10	23		0.87
81			1.37	31			1.06	24		0.82
82			1.29	27			1.02	26		0.76
83			1.22	26			0.96	24		0.72
84			1.17	25			0.92	23		0.69
85			1.06	21			0.85	21		0.64
86			1.00	20			0.80	20		0.60
87			0.87	16			0.71	17		0.54
88			0.75	14			0.61	14		0.47
89			0.65	12			0.53	12		0.41
90			0.57	11			0.46	10		0.36
91			0.42	08			0.34	08		0.26
92			0.27	04			0.23	05		0.18
93			0.16	03			0.13	03		0.10
94			0.07	02			0.05	01		0.04
95			0.00	00			0.00	00		0.00

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden.	Abgezinste Zahlen der Sterbenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
56	46.9948	1.71932	526.395	32.6130	11.2011	0.6940	4731.19	400.252
57	43.9569	1.66925	479.400	30.8937	10.9061	0.7028	4204.80	367.639
58	41.0560	1.62063	435.443	29.2244	10.6061	0.7118	3725.40	336.745
59	38.2867	1.57342	394.387	27.6038	10.3009	0.7210	3289.96	307.521
60	35.6439	1.52760	356.100	26.0304	9.9905	0.7303	2895.57	279.917
61	33.1226	1.48310	320.456	24.5028	9.6748	0.7398	2539.47	253.887
62	30.7181	1.59990	287.333	23.0197	9.3539	0.7494	2219.01	229.384
63	28.2701	1.55330	256.615	21.4198	9.0773	0.7577	1931.68	206.364
64	25.9386	1.50806	228.345	19.8665	8.8033	0.7659	1675.07	184.944
65	23.7189	1.46413	202.407	18.3584	8.5336	0.7740	1446.73	165.077
66	21.6066	1.42149	178.688	16.8943	8.2701	0.7819	1244.32	146.719
67	19.5973	1.38009	157.081	15.4728	8.0155	0.7895	1065.63	129.825
68	17.6866	1.33989	137.484	14.0927	7.7733	0.7968	908.545	114.352
69	15.8705	1.30086	119.797	12.7528	7.5484	0.8035	771.061	100.259
70	14.1453	1.13667	103.926	11.4519	7.3470	0.8096	651.264	87.5059
71	12.6298	1.10357	89.7810	10.3152	7.1087	0.8167	547.338	76.0540
72	11.1904	1.07142	77.1512	9.21161	6.8944	0.8282	457.557	65.7388
73	9.82430	0.924640	65.9608	8.14019	6.7140	0.8286	380.406	56.5272
74	8.64048	0.897712	56.1365	7.21555	6.4969	0.8351	314.444	48.3870
75	7.51720	0.762615	47.4960	6.31784	6.3183	0.8405	258.308	41.1715
76	6.55786	0.740404	39.9788	5.55523	6.0963	0.8471	210.813	34.8537
77	5.64800	0.616146	33.4209	4.81483	5.9173	0.8525	170.834	29.2985
78	4.88531	0.598200	27.7729	4.19868	5.6850	0.8594	137.413	24.4837
79	4.16223	0.580776	22.8876	3.60048	5.4988	0.8650	109.640	20.2850
80	3.47715	0.469885	18.7253	3.01970	5.3852	0.8683	86.7524	16.6845
81	2.91968	0.364960	15.2482	2.54982	5.2226	0.8733	68.0270	13.6648
82	2.48030	0.354328	12.3285	2.18486	4.9706	0.8809	52.7788	11.1150
83	2.06405	0.344008	9.84820	1.83053	4.7713	0.8869	40.4503	8.93017
84	1.66994	0.250491	7.78415	1.48652	4.6613	0.8902	30.6021	7.09964
85	1.37810	0.243195	6.11421	1.23603	4.4367	0.8969	22.8179	5.61312

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen		Summen der abgezinsten Zahlen		Baare Werthe		Summen der Summen der abgezinsten Zahlen	
	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
86	1.10186	0.157408	4.73611	0.992833	4.2983	0.9011	16.7037	4.37709
87	0.916944	0.152824	3.63425	0.835425	3.9634	0.9111	11.9676	3.38426
88	0.741860	0.148372	2.71731	0.682601	3.6628	0.9201	8.33335	2.54883
89	0.576208	0.144052	1.97545	0.534229	3.4283	0.9272	5.61604	1.86623
90	0.419568	0.069928	1.39924	0.390177	3.3350	0.9299	3.64059	1.33200
91	0.339455	0.067891	0.979673	0.320249	2.8860	0.9434	2.24135	0.941821
92	0.263656	0.065914	0.640218	0.252358	2.4282	0.9572	1.26168	0.621572
93	0.191982	0.063994	0.376562	0.186444	1.9614	0.9712	0.621462	0.369214
94	0.124260	0.062130	0.184580	0.122450	1.4854	0.9854	0.244900	0.182770
95	0.060320	0.060320	0.060320	0.060320	1.0000	1.0000	0.060320	0.060320

Tabelle VII.

Baare Werthe der Lebensrenten und der Sterbethaler bei jährlicher Vorausbezahlung, nach Süßmilch.

B. $3\frac{1}{2}$%.

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen		Summen der abgezinsten Zahlen		Baare Werthe		Summen der Summen der abgezinsten Zahlen	
	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
0	1000.	250.	13458.1	563.950	13.4581	0.5640	242858.	5428.08
1	724.638	85.9904	12458.1	313.950	17.1922	0.4333	229400.	4864.13
2	617.051	40.1410	11733.5	227.960	19.0155	0.3695	216942.	4550.18
3	557.401	22.5486	11116.4	187.819	19.9433	0.3370	205208.	4322.22
4	516.765	12.2002	10559.0	165.270	20.4329	0.3198	194092.	4134.40
5	487.502	10.1037	10042.2	153.070	20.6000	0.3140	183533.	3969.13
6	461.255	8.94851	9554.67	142.966	20.7145	0.3100	173491.	3816.06
7	437.011	7.07392	9093.42	134.017	20.8082	0.3067	163936.	3673.09
8	415.398	6.07530	8656.41	126.943	20.8388	0.3056	154843.	3539.07
9	395.481	5.13612	8241.01	120.868	20.8380	0.3057	146187.	3412.13
10	377.145	3.54459	7845.53	115.732	20.8024	0.3069	137946.	3291.26
11	360.966	2.73978	7468.39	112.187	20.6900	0.3108	130100.	3175.53
12	346.112	2.64713	7107.42	109.447	20.5350	0.3163	122632.	3063.34
13	331.851	2.55762	6761.31	106.800	20.3746	0.3219	115524.	2953.89
14	318.158	2.47113	6429.46	104.242	20.2084	0.3277	108763.	2847.09
15	305.011	2.38756	6111.30	101.771	20.0363	0.3337	102334.	2742.85
16	292.390	2.30682	5806.29	99.3831	19.8580	0.3400	96222.7	2641.08
17	280.274	2.22882	5513.90	97.0763	19.6732	0.3464	90416.4	2541.70
18	268.642	2.15344	5233.63	94.8474	19.4818	0.3531	84902.5	2444.62
19	257.477	2.08062	4964.99	92.6940	19.2833	0.3601	79668.9	2349.77
20	246.760	2.51283	4707.51	90.6134	19.0773	0.3673	74703.9	2257.08
21	235.988	2.42786	4460.75	88.1006	18.9025	0.3734	69996.4	2166.47
22	225.662	2.34575	4224.76	85.6727	18.7216	0.3797	65535.6	2078.37
23	215.764	2.26643	3999.10	83.3270	18.5346	0.3863	61310.8	1992.70
24	206.278	2.18978	3783.34	81.0606	18.3410	0.3931	57311.7	1909.37
25	197.186	2.11574	3577.06	78.8708	18.1405	0.4001	53528.4	1828.31

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden.	der Sterbenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	der Sterbenden.	Baare Werthe der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
26	188.474	2.04419	3379.87	76.7551	17.9328	0.4074	49951.3	1749.44
27	180.125	1.97506	3191.40	74.7109	17.7177	0.4149	46571.4	1672.68
28	172.126	2.28992	3011.28	72.7358	17.4946	0.4227	43380.0	1597.97
29	164.093	2.21249	2839.15	70.4459	17.3021	0.4294	40368.7	1525.23
30	156.406	2.13767	2675.06	68.2334	17.1033	0.4364	37529.6	1454.78
31	149.052	2.06538	2518.65	66.0957	16.8978	0.4436	34854.5	1386.55
32	142.016	1.99554	2369.60	64.0303	16.6854	0.4510	32335.9	1320.45
33	135.285	1.92806	2227.58	62.0348	16.4658	0.4587	29966.3	1256.42
34	128.848	1.86286	2092.30	60.1067	16.2385	0.4667	27738.7	1194.39
35	122.691	2.09984	1963.45	58.2438	16.0032	0.4749	25646.4	1134.28
36	116.513	2.02883	1840.76	56.1440	15.7988	0.4820	23682.9	1076.04
37	110.613	1.96022	1724.25	54.1152	15.5881	0.4894	21842.1	1019.90
38	104.978	1.89393	1613.64	52.1550	15.3712	0.4970	20117.9	965.624
39	99.5983	1.82989	1508.66	50.2611	15.1475	0.5048	18504.3	913.629
40	94.4619	1.76800	1409.06	48.4312	14.9167	0.5129	16995.6	863.368
41	89.5594	1.70822	1314.60	46.6632	14.6785	0.5213	15586.5	814.937
42	84.8804	1.65045	1225.04	44.9550	14.4325	0.5299	14271.9	768.274
43	80.4155	1.59464	1140.16	43.3046	14.1784	0.5388	13046.9	723.319
44	76.1553	1.54071	1059.74	41.7100	13.9155	0.5480	11906.7	680.014
45	72.0914	1.48861	983.582	40.1693	13.6435	0.5575	10847.0	638.304
46	68.2153	1.64374	911.491	38.6807	13.3620	0.5673	9863.41	598.135
47	64.3205	1.56816	843.276	37.0370	13.1105	0.5761	8951.92	559.454
48	60.6107	1.53445	778.955	35.4688	12.8518	0.5852	8108.64	522.417
49	57.0786	1.48256	718.344	33.9344	12.5852	0.5945	7329.68	486.948
50	53.7159	1.61148	661.265	32.4518	12.3104	0.6040	6611.34	453.014
51	50.3424	1.55698	607.549	30.8403	12.0683	0.6126	5950.08	420.562
52	47.1357	1.50434	557.207	29.2833	11.8213	0.6213	5342.53	389.722
53	44.0884	1.45346	510.071	27.7790	11.5691	0.6301	4785.32	360.439
54	41.1932	1.40431	465.983	26.3255	11.3121	0.6391	4275.25	332.660
55	38.4433	1.35682	424.790	24.9212	11.0498	0.6483	3809.27	306.334

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen		Summen der abgezinsten Zahlen		Baare Werthe		Summen der Summen der abgezinsten Zahlen	
	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
56	35.8324	1.31094	386.347	23.5644	10.7821	0.6576	3384.48	281.413
57	33.3539	1.26661	350.515	22.2535	10.5090	0.6672	2998.13	257.849
58	31.0023	1.22377	317.161	20.9869	10.2302	0.6769	2647.61	235.596
59	28.7716	1.18239	286.159	19.7631	9.9459	0.6869	2330.45	214.609
60	26.6561	1.14241	257.387	18.5807	9.6558	0.6970	2044.29	194.846
61	24.6510	1.10378	230.731	17.4383	9.3599	0.7074	1786.90	176.265
62	22.7510	1.18495	206.080	16.3345	9.0581	0.7180	1556.17	158.827
63	20.8366	1.14487	183.329	15.1496	8.7984	0.7271	1350.09	142.493
64	19.0259	1.10616	162.492	14.0047	8.5406	0.7361	1166.76	127.343
65	17.3137	1.06875	143.466	12.8985	8.2863	0.7450	1004.27	113.338
66	15.6957	1.03261	126.152	11.8297	8.0374	0.7537	860.800	100.439
67	14.1672	0.997690	110.456	10.7971	7.7966	0.7621	734.648	88.6093
68	12.7241	0.963950	96.2887	9.79944	7.5674	0.7701	624.192	77.8122
69	11.3626	0.931360	83.5646	8.83549	7.3544	0.7776	527.903	68.0128
70	10.0785	0.809874	72.2020	7.90413	7.1640	0.7843	444.338	59.1773
71	8.95513	0.782487	62.1235	7.09426	6.9372	0.7922	372.136	51.2732
72	7.89628	0.756027	53.1684	6.31177	6.7333	0.7993	310.012	44.1789
73	6.89877	0.649296	45.2721	5.55574	6.5623	0.8053	256.844	37.8671
74	6.03819	0.627344	38.3733	4.90644	6.3551	0.8126	211.572	32.3114
75	5.22784	0.530362	32.3351	4.27910	6.1852	0.8185	173.199	27.4049
76	4.53865	0.512428	27.1073	3.74874	5.9725	0.8260	140.964	23.1258
77	3.89004	0.424368	22.5686	3.23631	5.8016	0.8319	113.756	19.3771
78	3.34846	0.410016	18.6786	2.81194	5.5782	0.8398	91.1877	16.1408
79	2.83912	0.396156	15.3301	2.40192	5.3996	0.8460	72.5091	13.3289
80	2.36034	0.318965	12.4910	2.00576	5.2920	0.8498	57.1790	10.9270
81	1.97235	0.246544	10.1307	1.68680	5.1364	0.8552	44.6880	8.92120
82	1.66743	0.238204	8.15835	1.44025	4.8928	0.8638	34.5573	7.23440
83	1.38089	0.230148	6.49092	1.20205	4.7005	0.8705	26.3989	5.79415
84	1.11184	0.166776	5.11003	0.971902	4.5960	0.8741	19.9080	4.59210
85	0.913102	0.161136	3.99819	0.805126	4.3787	0.8817	14.7981	3.62020

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen		Summen der abgezinsten Zahlen		Baare Werthe		Summen der Summen der abgezinsten Zahlen	
	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
86	0.726537	0.103792	3.08509	0.643990	4.2463	0.8864	10.7998	2.81507
87	0.601692	0.100282	2.35855	0.540198	3.9199	0.8928	7.71475	2.17108
88	0.484450	0.096890	1.75686	0.439916	3.6265	0.9081	5.35620	1.63088
89	0.374456	0.093614	1.27241	0.343026	3.3980	0.9161	3.59934	1.19096
90	0.271344	0.045224	0.897951	0.249412	3.3093	0.9192	2.32693	0.847933
91	0.218475	0.043695	0.626607	0.204188	2.8681	0.9347	1.42898	0.598521
92	0.168868	0.042217	0.408132	0.160493	2.4169	0.9504	0.802370	0.394333
93	0.122367	0.040789	0.239264	0.118276	1.9553	0.9666	0.394328	0.233840
94	0.078820	0.039410	0.116897	0.077487	1.4831	0.9831	0.154974	0.116564
95	0.038077	0.038077	0.038077	0.038077	1.0000	1.0000	0.038077	0.038077

Tabelle VII.

Baare Werthe der Lebensrenten und der Sterbethaler bei jährlicher Vorausbezahlung, nach Süßmilch.

C. 4%.

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden.	Abgezinste Zahlen der Sterbenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
0	1000.	250.	12431.5	542.740	12.4315	0.5427	210075.	4525.76
1	721.153	85.5769	11431.5	292.740	15.8517	0.4059	197644.	3983.02
2	611.131	39.7559	10710.3	207.163	17.5254	0.3390	186212.	3690.28
3	549.400	22.2249	10099.2	167.407	18.3823	0.3047	175502.	3483.12
4	506.899	11.9673	9549.83	145.182	18.8397	0.2864	165403.	3315.71
5	475.896	9.86312	9042.93	133.215	19.0019	0.2799	155853.	3170.53
6	448.109	8.69346	8567.03	123.352	19.1189	0.2752	146810.	3037.31
7	422.514	6.83926	8118.92	114.659	19.2157	0.2714	138243.	2913.96
8	399.687	5.84552	7696.40	107.819	19.2561	0.2698	130124.	2799.30
9	378.694	4.91811	7296.71	101.974	19.2681	0.2693	122428.	2691.48
10	359.400	3.37782	6918.02	97.0554	19.2488	0.2700	115131.	2589.51
11	342.329	2.59832	6558.62	93.6776	19.1589	0.2736	108213.	2492.46
12	326.664	2.49839	6216.29	91.0793	19.0296	0.2788	101654.	2398.78
13	311.698	2.40230	5889.63	88.5809	18.8953	0.2842	95438.0	2307.70
14	297.400	2.30990	5577.93	86.1786	18.7557	0.2898	89548.4	2219.12
15	283.740	2.22106	5280.53	83.8687	18.6104	0.2956	83970.5	2132.94
16	270.691	2.13563	4996.79	81.6476	18.4594	0.3016	78690.0	2049.07
17	258.227	2.05349	4726.10	79.5120	18.3021	0.3079	73693.2	1967.42
18	246.320	1.97451	4467.87	77.4585	18.1385	0.3145	68967.1	1887.91
19	234.948	1.89857	4221.55	75.4840	17.9681	0.3213	64499.2	1810.45
20	224.086	2.28193	3986.60	73.5854	17.7905	0.3284	60277.7	1734.97
21	213.273	2.19417	3762.51	71.3035	17.6418	0.3343	56291.1	1661.38
22	202.960	2.10977	3549.24	69.1093	17.4874	0.3405	52528.6	1590.08
23	193.126	2.02863	3346.28	66.9995	17.3269	0.3469	48979.4	1520.97
24	183.747	1.95060	3153.15	64.9709	17.1603	0.3536	45633.1	1453.97
25	174.804	1.87558	2969.40	63.0203	16.9870	0.3605	42479.9	1389.00

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden.	Abgezinste Zahlen der Sterbenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
26	166.278	1.80344	2794.60	61.1447	16.8068	0.3677	39510.5	1325.98
27	158.148	1.73408	2628.32	59.3413	16.6194	0.3752	36715.9	1264.84
28	150.398	2.00087	2470.17	57.6072	16.4242	0.3830	34087.6	1205.50
29	142.690	1.92391	2319.77	55.6063	16.2574	0.3897	31617.4	1147.89
30	135.352	1.84991	2177.08	53.6824	16.0846	0.3966	29297.6	1092.28
31	128.367	1.77876	2041.73	51.8325	15.9054	0.4038	27120.5	1038.59
32	121.720	1.71035	1913.36	50.0537	15.7194	0.4112	25078.8	986.762
33	115.394	1.64456	1791.64	48.3434	15.5263	0.4189	23165.4	936.708
34	109.374	1.58131	1676.25	46.6988	15.3259	0.4270	21373.8	888.365
35	103.647	1.77390	1566.88	45.1175	15.1175	0.4353	19697.5	841.666
36	97.9549	1.70568	1463.23	43.3436	14.9378	0.4425	18130.6	796.549
37	92.5473	1.64008	1365.28	41.6379	14.7522	0.4499	16667.4	753.205
38	87.4106	1.57699	1272.73	39.9978	14.5604	0.4576	15302.1	711.567
39	82.5326	1.51635	1185.32	38.4208	14.3619	0.4655	14029.4	671.569
40	77.9001	1.45802	1102.79	36.9044	14.1565	0.4737	12844.1	633.148
41	73.5020	1.40195	1024.89	35.4464	13.9437	0.4823	11741.3	596.244
42	69.3270	1.34802	951.392	34.0445	13.7233	0.4911	10716.3	560.798
43	65.3643	1.29618	882.065	32.6965	13.4946	0.5002	9764.88	526.753
44	61.6039	1.24632	816.701	31.4003	13.2573	0.5097	8882.81	494.057
45	58.0361	1.19839	755.097	30.1540	13.0108	0.5196	8066.11	462.657
49	54.6518	1.31691	697.061	28.9556	12.7546	0.5298	7311.01	432.503
47	51.2837	1.26626	642.409	27.6387	12.5266	0.5389	6613.95	403.547
48	48.0936	1.21756	591.125	26.3724	12.2911	0.5484	5971.54	375.908
49	45.0730	1.17073	543.031	25.1548	12.0478	0.5581	5380.42	349.536
50	42.2139	1.26642	497.958	23.9841	11.7961	0.5682	4837.39	324.381
51	39.3726	1.21771	455.744	22.7177	11.5752	0.5770	4339.43	300.397
52	36.6874	1.17087	416.371	21.5000	11.3492	0.5860	3883.69	277.679
53	34.1504	1.12584	379.684	20.3291	11.1180	0.5953	3462.32	256.179
54	31.7544	1.08254	345.534	19.2033	10.8815	0.6047	3087.64	235.850
55	29.4923	1.04090	313.780	18.1208	10.6394	0.6144	2742.11	216.647

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen		Summen der abgezinsten Zahlen		Baare Werthe		Summen der Summen der abgezinsten Zahlen	
	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebenden.	der Sterbenden.	der Lebensrenten.	der Sterbethaler.	der Lebenden.	der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
56	27.3569	1.00086	284.288	17.0799	10.3918	0.6243	2428.33	198.526
57	25.3424	0.962370	256.931	16.0790	10.1381	0.6345	2144.04	181.446
58	23.4423	0.925353	231.588	15.1166	9.8791	0.6448	1887.11	165.367
59	21.6510	0.889767	208.146	14.1912	9.6137	0.6555	1655.52	150.250
60	19.9626	0.855540	186.495	13.3014	9.3422	0.6663	1447.37	136.059
61	18.3722	0.822636	166.532	12.4458	9.0643	0.6774	1260.88	122.758
62	16.8747	0.878890	148.160	11.6232	8.7800	0.6888	1094.35	110.312
63	15.3805	0.845080	131.285	10.7443	8.5358	0.6986	946.189	98.6889
64	13.9764	0.812580	115.904	9.89926	8.2929	0.7083	814.904	87.9446
65	12.6576	0.781330	101.928	9.08668	8.0527	0.7179	699.000	78.0453
66	11.4195	0.751280	89.2707	8.30535	7.8174	0.7273	597.072	68.9586
67	10.2578	0.722380	77.8512	7.55407	7.5895	0.7364	507.801	60.6533
68	9.16872	0.694600	67.5934	6.83169	7.3722	0.7451	429.950	53.0992
69	8.14814	0.667880	58.4247	6.13709	7.1703	0.7532	362.357	46.2675
70	7.19253	0.577971	50.2766	5.46921	6.9901	0.7604	303.932	40.1304
71	6.36015	0.555741	43.0841	4.89124	6.7741	0.7690	253.656	34.6612
72	5.58116	0.534366	36.7240	4.33550	6.5800	0.7768	210.572	29.7700
73	4.85273	0.456728	31.1428	3.80113	6.4176	0.7833	173.848	25.4345
74	4.22691	0.439160	26.2901	3.34440	6.2197	0.7912	142.705	21.6334
75	3.64210	0.369488	22.0632	2.90524	6.0579	0.7977	116.415	18.2890
76	3.14675	0.355278	18.4211	2.53575	5.8540	0.8058	94.3519	15.3838
77	2.68405	0.292806	15.2743	2.18047	5.6908	0.8124	75.9308	12.8481
78	2.29928	0.281544	12.5903	1.88766	5.4757	0.8210	60.6565	10.6676
79	1.94016	0.270720	10.2910	1.60612	5.3042	0.8278	48.0662	8.77996
80	1.60521	0.216920	8.35082	1.33540	5.2023	0.8319	37.7752	7.17384
81	1.33491	0.166864	6.74561	1.11848	5.0532	0.8379	29.4244	5.83844
82	1.12311	0.160444	5.41070	0.951616	4.8176	0.8473	22.6788	4.71996
83	0.925656	0.154276	4.28759	0.791172	4.6319	0.8547	17.2681	3.76834
84	0.741700	0.111255	3.36193	0.636896	4.5327	0.8587	12.9805	2.99717
85	0.606203	0.106977	2.62023	0.525641	4.3224	0.8671	9.61861	2.34027

Lebensalter.	Abgezinste Zahlen der Lebenden.	Abgezinste Zahlen der Sterbenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.	Baare Werthe der Lebensrenten.	Baare Werthe der Sterbethaler.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Lebenden.	Summen der Summen der abgezinsten Zahlen der Sterbenden.
	a	b	c	d	e	f	g	h
86	0.480018	0.068574	2.01403	0.418664	4.1957	0.8722	6.99838	1.81463
87	0.395628	0.065938	1.53401	0.350090	3.8774	0.8849	4.98435	1.39597
88	0.317010	0.063402	1.13838	0.284152	3.5910	0.8964	3.45034	1.04588
89	0.243848	0.060962	0.821368	0.220750	3.3684	0.9053	2.31196	0.761728
90	0.175854	0.029309	0.577520	0.159788	3.2841	0.9086	1.49059	0.540978
91	0.140910	0.028182	0.401666	0.130479	2.8505	0.9260	0.913072	0.381190
92	0.108392	0.027098	0.260756	0.102279	2.4065	0.9437	0.511406	0.250711
93	0.078168	0.026056	0.152364	0.075199	1.9492	0.9620	0.250650	0.148432
94	0.050106	0.025053	0.074196	0.049643	1.4808	0.9808	0.098286	0.073233
95	0.024090	0.024090	0.024090	0.024090	1.0000	1.0000	0.024090	0.024090

Tabelle VIII.

Baare Werthe der Verbindungsrenten bei jährlicher Vorausbezahlung, nach Süßmilch.

A. 3%.

Alter der einen Person.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
16	17.4781										
17	17.2436										
18	17.0005										
19	16.7476										
20	16.4854										
21	16.2800	5682	16.8482								
22	16.0672	5574	16.6246								
23	15.8470	5457	16.3927								
24	15.6190	5333	16.1523								
25	15.3822	5206	15.9028								
26	15.1368	5391	15.6759	5057	16.1816						
27	14.8820	5588	15.4408	4935	15.9343						
28	14.6172	5798	15.1970	4804	15.6774						
29	14.4066	5707	14.9773	4681	15.4454						
30	14.1888	5612	14.7500	4550	15.2050						
31	13.9636	5509	14.5145	4720	14.9865	4428	15.4293				
32	13.7303	5399	14.2702	4902	14.7604	4305	15.1909				
33	13.4886	5282	14.0168	5094	14.5262	4176	14.9438				
34	13.2379	5466	13.7845	4991	14.2836	4030	14.6866				
35	12.9776	5663	13.5439	4878	14.0317	3897	14.4214				
36	12.7704	5569	13.3273	4772	13.8045	4050	14.2095	3709	14.5804		
37	12.5570	5467	13.1037	4659	13.5696	4212	13.9908	3684	14.3592		
38	12.3370	5356	12.8726	4537	13.3263	4387	13.7650	3553	14.1203		
39	12.1102	5233	12.6335	4702	13.1037	4279	13.5316	3419	13.8735		
40	11.8759	5100	12.3859	4878	12.8737	4166	13.2903	3276	13.6179		

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
41	11.6336	5256	12.1592	4767	12.6359	4044	13.0403	3403	13.3806	3215	13.7021
42	11.3826	5456	11.9252	4645	12.3897	3916	12.7813	3538	13.1351	3086	13.4437
43	11.1225	5606	11.6831	4514	12.1345	3781	12.5126	3683	12.8809	2949	13.1758
44	10.8523	5802	11.4325	4373	11.8698	3912	12.2610	3564	12.6174	2808	12.8982
45	10.5712	6017	11.1729	4247	11.5946	4055	12.0001	3440	12.3441	2660	12.6101
46	10.2784	6243	10.9027	4339	11.3366	3927	11.7293	3309	12.0602	2760	12.3362
47	10.0345	6205	10.6550	4479	11.1029	3802	11.4831	3182	11.8013	2877	12.0890
48	9.7827	6158	10.3985	4637	10.8622	3666	11.2288	3046	11.5334	3004	11.8338
49	9.5223	6106	10.1329	4803	10.6132	3524	10.9656	3157	11.2813	2889	11.5702
50	9.2524	6048	9.8572	4987	10.3559	3370	10.6929	3278	11.0207	2768	11.2975
51	9.0338	5695	9.6033	5208	10.1241	3475	10.4716	3165	10.7881	2650	11.0531
52	8.8114	5586	9.3700	5163	9.8863	3593	10.2456	3040	10.5496	2527	10.8023
53	8.5850	5457	9.1307	5114	9.6421	3722	10.0143	2909	10.3052	2397	10.5449
54	8.3543	5308	8.8851	5059	9.3910	3867	9.7777	2766	10.0543	2490	10.3033
55	8.1191	5135	8.6326	5000	9.1326	4027	9.5353	2615	9.7968	2596	10.0564
56	7.8790	5223	8.4013	4648	8.8661	4208	9.2869	2688	9.5557	2474	9.8031
57	7.6337	5316	8.1653	4517	8.6170	4151	9.0321	2771	9.3092	2348	9.5440
58	7.3828	5418	7.9246	4375	8.3621	4082	8.7703	2864	9.0567	2214	9.2781
59	7.1257	5528	7.6785	4211	8.0996	4013	8.5009	2973	8.7982	2069	9.0051
60	6.8617	5651	7.4268	4026	7.8294	3940	8.2234	3098	8.5332	1914	8.7246
61	6.5905	5788	7.1693	4073	7.5766	3605	7.9371	3241	8.2612	1965	8.4577
62	6.3108	5938	6.9046	4131	7.3177	3472	7.6649	3170	7.9819	2020	8.1839
63	6.0875	5816	6.6691	4220	7.0911	3343	7.4254	3114	7.7368	2100	7.9468
64	5.8674	5652	6.4326	4323	6.8649	3199	7.1848	3061	7.4909	2194	7.7103
65	5.6512	5445	6.1957	4444	6.6401	3038	6.9439	3010	7.2449	2307	7.4756
66	5.4418	5170	5.9588	4592	6.4180	3088	6.7268	2732	7.0000	2443	7.2443
67	5.2421	4816	5.7237	4767	6.2004	3151	6.5155	2630	6.7785	2399	7.0184
68	5.0565	4652	5.5217	4679	5.9896	3233	6.3129	2520	6.5649	2358	6.8007
69	4.8912	4408	5.3320	4571	5.7891	3336	6.1227	2401	6.3628	2325	6.5953
70	4.7556	4049	5.1605	4430	5.6035	3468	5.9503	2270	6.1773	2301	6.4074

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
71	4.5738	3924	4.9662	4206	5.3868	3604	5.7472	2307	5.9779	2060	6.1839
72	4.4197	3718	4.7915	3916	5.1831	3781	5.5612	2362	5.7974	1977	5.9951
73	4.3076	3383	4.6459	3807	5.0266	3739	5.4005	2442	5.6447	1891	5.8338
74	4.1515	3338	4.4853	3592	4.8445	3645	5.2090	2522	5.4612	1776	5.6388
75	4.0423	3214	4.3637	3280	4.6917	3536	5.0453	2634	5.3087	1608	5.4695
76	3.8813	3114	4.1927	3174	4.5101	3346	4.8447	2750	5.1197	1666	5.2863
77	3.7712	2908	4.0620	3006	4.3626	3108	4.6734	2916	4.9650	1706	5.1356
78	3.5962	3186	3.9148	2673	4.1821	2981	4.4802	2848	4.7650	1739	4.9389
79	3.4725	3041	3.7766	2644	4.0410	2812	4.3222	2785	4.6007	1800	4.7807
80	3.4395	2695	3.7090	2562	3.9652	2571	4.2223	2725	4.4948	1906	4.6854
81	3.3593	2312	3.5905	2494	3.8399	2501	4.0900	2585	4.3485	2011	4.5496
82	3.1740	2636	3.4376	2255	3.6631	2305	3.8936	2328	4.1264	2107	4.3371
83	3.0478	2400	3.2878	2511	3.5389	2016	3.7405	2228	3.9633	2052	4.1685
84	3.0373	1851	3.2224	2417	3.4641	2008	3.6649	2107	3.8756	2014	4.0770
85	2.9044	2252	3.1296	2026	3.3322	1854	3.5176	1820	3.6996	1888	3.8884
86	2.8920	1876	3.0796	1665	3.2461	1779	3.4240	1746	3.5986	1758	3.7744
87	2.6524	2037	2.8561	1866	3.0427	1490	3.1917	1508	3.3425	1476	3.4901
88	2.4509	2256	2.6765	1574	2.8339	1618	2.9957	1190	3.1147	1322	3.2469
89	2.3350	2551	2.5901	1005	2.6906	1458	2.8364	1095	2.9459	1151	3.0610
90	2.4446	1245	2.5691	1291	2.6982	1161	2.8143	1047	2.9190	862	3.0052
91	2.1427	2123	2.3550	720	2.4270	689	2.4959	723	2.5682	733	2.6415
92	1.8390	1964	2.0354	643	2.0997	714	2.1711	414	2.2125	497	3.2622
93	1.5362	1701	1.7063	556	1.7619	433	1.8052	362	1.8414	234	1.8648
94	1.2427	1214	1.3641	485	1.4126	051	1.4177	173	1.4350	106	1.4456
95	1.0000	0000	1.0000	000	1.0000	000	1.0000	000	1.0000	000	1.0000

Tabelle VIII.

Baare Werthe der Verbindungsrenten bei jährlicher Vorausbezahlung, nach Süßmilch.

B. 3½%.

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
16	16.4104										
17	16.2045										
18	15.9899										
19	15.7664										
20	15.5332										
21	15.3530	5033	15.8563								
22	15.1658	4937	15.6595								
23	14.9712	4838	15.4550								
24	14.7688	4731	15.2419								
25	14.5582	4617	15.0199								
26	14.3388	4801	14.8189	4510	15.2699						
27	14.1100	4996	14.6096	4404	15.0500						
28	13.8715	5203	14.3918	4291	14.8209						
29	13.6835	5130	14.1965	4181	14.6146						
30	13.4888	5048	13.9936	4064	14.4000						
31	13.2864	4962	13.7826	4232	14.2058	3978	14.6036				
32	13.0765	4866	13.5631	4411	14.0042	3869	14.3911				
33	12.8580	4763	13.3343	4602	13.7945	3755	14.1700				
34	12.6305	4947	13.1252	4512	13.5764	3634	14.9398				
35	12.3933	5144	12.9077	4416	13.3493	3506	13.6999				
36	12.2063	5065	12.7128	4325	13.1453	3656	13.5109	3444	13.8553		
37	12.0132	4978	12.5110	4223	12.9333	3817	13.3150	3338	13.6488		
38	11.8138	4879	12.3017	4115	12.7132	3991	13.1123	3222	13.4345		
39	11.6073	4770	12.0843	4280	12.5123	3897	12.9020	3101	13.2121		
40	11.3934	4650	11.8584	4458	12.3042	3797	12.6839	2970	12.9809		

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
41	11.1714	4809	11.6523	4358	12.0881	3690	12.4571	3097	12.7668	2937	13.0605
42	10.9408	4978	11.4386	4251	11.8637	3576	12.2213	3233	12.5446	2818	12.8264
43	10.7008	5163	11.2171	4132	11.6303	3454	11.9757	3378	12.3135	2696	12.5831
44	10.4506	5362	10.9868	4003	11.3871	3588	11.7459	3273	12.0732	2567	12.3299
45	10.1896	5577	10.7473	3864	11.1337	3730	11.5069	3161	11.8230	2431	12.0661
46	9.9165	5811	10.4976	3984	10.8960	3617	11.2577	3043	11.5620	2532	11.8152
47	9.6900	5787	10.2687	4125	10.6812	3505	11.0317	2927	11.3244	2650	11.5894
48	9.4553	5756	10.0309	4282	10.4591	3384	10.7975	2802	11.0777	2778	11.3555
49	9.2115	5723	9.7838	4452	10.2290	3251	10.5541	2915	10.8456	2675	11.1131
50	8.9582	5682	9.5264	4639	9.9903	3112	10.3015	3035	10.6050	2565	10.8615
51	8.7569	5327	9.2896	4861	9.7757	3216	10.0973	2933	10.3906	2458	10.6364
52	8.5490	5231	9.0721	4829	9.5550	3333	9.8883	2821	10.1704	2345	10.4049
53	8.3368	5118	8.8486	4791	9.3277	3466	9.6743	2697	9.9440	2225	10.1665
54	8.1202	4982	8.6184	4750	9.0934	3610	9.4544	2566	9.7110	2320	9.9430
55	7.8988	4822	8.3810	4704	8.8514	3773	9.2287	2423	9.4710	2427	9.7137
56	7.6722	4916	8.1638	4372	8.6010	3955	8.9965	2500	9.2465	2316	9.4781
57	7.4402	5015	7.9417	4256	8.3673	3906	8.7579	2583	9.0162	2198	9.2360
58	7.2022	5123	7.7145	4125	8.1270	3848	8.5118	2682	8.7800	2071	8.9871
59	6.9577	5240	7.4817	3973	7.8790	3770	8.2580	2792	8.5372	1935	8.7307
60	6.7061	5369	7.2430	3800	7.6230	3727	7.9957	2919	8.2876	1790	8.4666
61	6.4465	5513	6.9978	3852	7.3830	3412	7.7242	3065	8.0307	1839	8.2146
62	6.1780	5676	6.7456	3915	7.1371	3286	7.4657	3003	7.7660	1896	7.9556
63	5.9644	5566	6.5210	4006	6.9216	3170	7.2386	2955	7.5341	1976	7.7317
64	5.7499	5450	6.2949	4115	6.7064	3033	7.0097	2911	7.3008	2070	7.5078
65	5.5449	5230	6.0679	4242	6.4921	2880	6.7801	2867	7.0668	2184	7.2852
66	5.3432	4975	5.8407	4392	6.2799	2933	6.5732	2601	6.8333	2321	7.0654
67	5.1506	4637	5.6143	4574	6.0717	2998	6.3715	2507	6.6222	2282	6.8504
68	4.9715	4485	5.4200	4498	5.8698	3081	6.1779	2404	6.4183	2248	6.6431
69	4.8119	4255	5.2374	4401	5.6775	3185	5.9960	2292	6.2252	2220	6.4472
70	4.6813	3909	5.0722	4273	5.4995	3319	5.8314	2167	6.0481	2199	6.2680

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
71	4.5052	3792	4.8844	4061	5.2905	3458	5.6363	2207	5.8570	1968	6.0538
72	4.3557	3598	4.7155	3785	5.0940	3638	5.4578	2263	5.6841	1889	5.8730
73	4.2476	3274	4.5750	3684	4.9434	3603	5.3037	2344	5.5381	1808	5.7189
74	4.0960	3233	4.4193	3481	4.7674	3518	5.1192	2425	5.3617	1698	5.5315
75	3.9905	3114	4.3019	3181	4.6200	3443	4.9643	2512	5.2155	1579	5.3734
76	3.8335	3021	4.1356	3083	4.4439	3242	4.7681	2652	5.0333	1600	5.1933
77	3.7267	2820	4.0087	2924	4.3011	3013	4.6024	2821	4.8845	1641	5.0486
78	3.5556	3098	3.8654	2602	4.1256	2895	4.4151	2758	4.6909	1676	4.8585
79	3.4347	2959	3.7306	2579	3.9885	2734	4.2619	2702	4.5321	1738	4.7059
80	3.4034	2619	3.6653	2503	3.9156	2502	4.1658	2648	4.4306	1843	4.6149
81	3.3256	2241	3.5497	2444	3.7941	2437	4.0378	2515	4.2893	1950	4.4843
82	3.1438	2623	3.4061	2154	3.6215	2248	3.8463	2268	4.0731	2049	4.2780
83	3.0202	2349	3.2551	2455	3.5006	1967	3.6973	2173	3.9146	1998	4.1144
84	3.0108	1808	3.1916	2368	3.4284	1963	3.6247	2058	3.8305	1965	4.0270
85	2.8805	2208	3.1013	1985	3.2998	1815	3.4813	1780	3.6593	1846	3.8439
86	2.8698	1838	3.0536	1631	3.2167	1742	3.3909	1711	3.5620	1721	3.7341
87	2.6341	1998	2.8339	1834	3.0173	1461	3.1634	1481	3.3115	1446	3.4561
88	2.4355	2219	2.6574	1550	2.8124	1591	2.9715	1169	3.0884	1299	3.2183
89	2.3214	2516	2.5730	989	2.6719	1437	2.8156	1077	2.9233	1134	3.0367
90	2.4315	1223	2.5538	1275	2.6813	1148	2.7961	951	2.8912	930	2.9842
91	2.1336	2098	2.3434	711	2.4145	681	2.4826	715	2.5541	724	2.6265
92	1.8332	1946	2.0278	636	2.0914	708	2.1622	409	2.2031	494	2.2525
93	1.5331	1689	1.7020	552	1.7572	430	1.8002	359	1.8361	233	1.8594
94	1.2415	1208	1.3623	483	1.4106	51	1.4157	172	1.4329	106	1.4435
95	1.0000	0000	1.0000	000	1.0000	00	1.0000	000	1.0000	000	1.0000

Tabelle VIII.

Baare Werthe der Verbindungsrenten bei jährlicher Vorausbezahlung, nach Süßmilch.

C. 4%.

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
16	15.4567										
17	15.2748										
18	15.0849										
19	14.8860										
20	14.6777										
21	14.5190	4476	14.9666								
22	14.3536	4393	14.7929								
23	14.1810	4306	14.6116								
24	14.0009	4210	14.4219								
25	13.8128	4105	14.2233								
26	13.6158	4287	14.0445	4035	14.4480						
27	13.4098	4478	13.8576	3943	14.2519						
28	13.1939	4682	13.6621	3844	14.0465						
29	13.0259	4620	13.4879	3744	13.8623						
30	12.8512	4549	13.3061	3640	13.6701						
31	12.6692	4472	13.1164	3806	13.4970	3585	13.8555				
32	12.4794	4389	12.9183	3981	13.3164	3490	13.6654				
33	12.2812	4298	12.7110	4171	13.1281	3387	13.4668				
34	12.0742	4479	12.5221	4092	12.9313	3280	13.2593				
35	11.8576	4673	12.3249	4009	12.7258	3163	13.0421				
36	11.6885	4607	12.1492	3925	12.5417	3312	12.8729	3132	13.1861		
37	11.5136	4528	11.9664	3837	12.3501	3472	12.6973	3034	13.0007		
38	11.3322	4441	11.7763	3740	12.1503	3644	12.5147	2931	12.8078		
39	11.1440	4343	11.5783	3903	11.9686	3558	12.3244	2825	12.6069		
40	10.9483	4234	11.3717	4079	11.7796	3476	12.1272	2700	12.3972		

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
41	10.7448	4389	11.1837	3993	11.5830	3376	11.9206	2829	12.2035	2688	12.4723
42	10.5324	4560	10.9884	3896	11.3780	3273	11.7053	2964	12.0017	2582	12.2599
43	10.3108	4745	10.7853	3787	11.1640	3164	11.4804	3107	11.7911	2472	12.0383
44	10.0791	4939	10.5730	3674	10.9404	3296	11.2700	3014	11.5714	2354	11.8068
45	9.8362	5156	10.3518	3554	10.7072	3431	11.0503	2914	11.3417	2228	11.5645
46	9.5812	5390	10.1202	3666	10.4868	3339	10.8207	2805	11.1012	2330	11.3342
47	9.3706	5376	9.9082	3809	10.2891	3236	10.6127	2700	11.8827	2447	11.1274
48	9.1518	5357	9.6875	3964	10.0839	3125	10.3964	2586	10.6550	2576	10.9126
49	8.9240	5333	9.4573	4134	9.8707	3003	10.1710	2422	10.4132	2759	10.6891
50	8.6863	5303	9.2166	4322	9.6488	2870	9.9358	2824	10.2182	2382	10.4564
51	8.4959	4993	8.9952	4546	9.4498	2977	9.7475	2729	10.0204	2284	10.2488
52	8.3013	4909	8.7922	1523	9.2447	3095	9.5542	2624	9.8166	2180	10.0346
53	8.1022	4808	8.5830	4497	9.0327	3227	9.3554	2511	9.6065	2068	9.8133
54	7.8985	4685	8.3670	4466	8.8136	3373	9.1509	2389	9.3898	2163	9.6061
55	7.6898	4539	8.1437	4430	8.5867	3538	8.9405	2253	9.1658	2271	9.3929
56	7.4758	1636	7.9394	4119	8.3513	3722	8.7235	2329	8.9564	2169	9.1733
57	7.2561	4740	7.7301	4015	8.1316	3679	8.4995	2416	8.7411	2059	8.9470
58	7.0301	4853	7.5154	3895	7.9049	3633	8.2682	2513	8.5195	1941	8.7136
59	6.7974	4976	7.2950	3753	7.6703	3585	8.0288	2624	8.2912	1814	8.4726
60	6.5572	5110	7.0682	3591	7.4273	3533	7.7806	2753	8.0559	1675	8.2234
61	6.3086	5263	6.8349	3648	7.1997	3232	7.5229	2899	7.8128	1726	7.9854
62	6.0507	5433	6.5940	3713	6.9653	3118	7.2771	2846	7.5617	1784	7.7401
63	5.8458	5339	6.3797	3806	6.7603	3010	7.0613	2806	7.3419	1864	7.5283
64	5.6426	5209	6.1635	3920	6.5555	2876	6.8431	2772	7.1203	1958	7.3161
65	5.4428	5031	5.9459	4050	6.3509	2735	6.6244	2731	6.8975	2073	7.1048
66	5.2485	4791	5.7276	4204	6.1480	2791	6.4271	2477	6.6748	2209	6.8957
67	5.0627	4427	5.5054	4432	5.9486	2858	6.2344	2389	6.4733	2176	6.6909
68	4.8896	4329	5.3225	4325	5.7550	2943	6.0493	2292	6.2785	2148	6.4933
69	4.7355	4111	5.1466	4238	5.5704	3050	5.8754	2185	6.0939	2124	6.3063
70	4.6097	3777	4.9874	4122	5.3996	3154	5.7150	2096	5.9246	2108	6.1354

Alter der einen Person:	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.	Unterschiede.	Verbindungsrenten.
	Die damit verbundene Person ist jünger, Jahre:										
	0		5		10		15		20		25
71	4.4388	3671	4.8059	3922	5.1981	3326	5.5307	2106	5.7413	1887	5.9300
72	4.2940	3486	4.6426	3657	5.0083	3508	5.3591	2164	5.5755	1812	5.7567
73	4.1896	3172	4.5068	3565	4.8633	3481	5.2114	2244	5.4358	1735	5.6093
74	4.0422	3138	4.3560	3371	4.6931	3405	5.0336	2326	5.2662	1630	5.4292
75	3.9401	3026	4.2427	3080	4.5507	3313	4.8820	2440	5.1260	1515	5.2775
76	3.7871	2943	4.0814	2986	4.3800	3142	4.6942	2560	4.9502	1538	5.1040
77	3.6835	2746	3.9581	2836	4.2417	2923	4.5340	2730	4.8070	1579	4.9649
78	3.5161	3026	3.8187	2522	4.0709	2812	4.3521	2674	4.6195	1615	4.7810
79	3.3979	2896	3.6875	2502	3.9377	2659	4.2036	2622	4.4658	1679	4.6337
80	3.3683	2565	3.6248	2429	3.8677	2438	4.1110	2575	4.3685	1784	4.5469
81	3.2928	2199	3.5127	2370	3.7497	2374	3.9871	2449	4.2320	1892	4.4212
82	3.1145	2522	3.3667	2138	3.5811	2194	3.8005	2209	4.0214	1993	4.2207
83	2.9932	2300	3.2232	2402	3.4634	1919	3.6553	2122	3.8675	1946	4.0621
84	2.9850	1767	3.1617	2320	3.3937	1869	3.5806	2060	3.7866	1919	3.9785
85	2.8573	2165	3.0738	1945	3.2683	1776	3.4459	1741	3.6200	1805	3.8005
86	2.8482	1799	3.0281	1598	3.1879	1708	3.3587	1677	3.5264	1686	3.6950
87	2.6162	1961	2.8123	1803	2.9926	1433	3.1359	1453	3.2812	1420	3.4232
88	2.4204	2182	2.6386	1527	2.7913	1565	2.9478	1149	3.0627	1276	3.1903
89	2.3082	2481	2.5563	972	2.6535	1417	2.7952	1061	2.9013	1117	3.0130
90	2.4187	1202	2.5389	1258	2.6647	1133	2.7780	938	2.8718	917	2.9635
91	2.1246	2076	2.3322	700	2.4022	675	2.4697	705	2.5402	715	2.6117
92	1.8276	1928	2.0204	629	2.0833	701	2.1534	405	2.1939	489	2.2428
93	1.5301	1676	1.6977	548	1.7525	428	1.7953	356	1.8309	230	1.8539
94	1.2404	1202	1.3606	481	1.4087	24	1.4111	197	1.4308	106	1.4414
95	1.0000	0000	1.0000	000	1.0000	00	1.0000	000	1.0000	000	1.0000

Tabelle IX.

Baare Werthe der Ueberlebensrenten nach Süßmilch.

A.

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
16	3.9808	6299		4.6107	6666			5.2773	7523		
17	3.9967	6190		4.6157	6903			5.3060	7434		
18	4.0141	6078		4.6219	7153			5.3372	7336		
19	4.0341	5953		4.6294	7069			5.3363	7588		
20	4.0556	5826		4.6382	6978			5.3360	7836		
21	4.0544	6041	5682	4.6585	6894	3.4862		5.3479	7770		
22	4.0542	6264	5574	4.6806	6804	3.4968		5.3610	7696		
23	4.0549	6500	5457	4.7049	6708	3.5092		5.3757	7612		
24	4.0566	6417	5333	4.6983	6937	3.5233		5.3920	7520		
25	4.0601	6322	5206	4.6923	7183	3.5395		5.4106	7414		
26	4.0648	6223	5391	4.6871	7100	3.5257	5057	5.3971	7642	3.0200	
27	4.0713	6118	5588	4.6831	7006	3.5125	4935	5.3837	7883	3.0190	
28	4.0796	6004	5798	4.6800	6905	3.4998	4804	5.3705	8137	3.0194	
29	4.0669	6221	5707	4.6890	6808	3.4962	4681	5.3698	8427	3.0281	
30	4.0549	6149	5612	4.6998	6702	3.4937	4550	5.3700	8736	3.0387	
31	4.0436	6363	5509	4.6799	6914	3.4927	4720	5.3713	9066	3.0207	4428
32	4.0332	6266	5399	4.6598	7140	3.4933	4902	5.3738	9066	3.0031	4305
33	4.0239	6160	5282	4.6399	7381	3.4957	5094	5.3780	9057	2.9863	4176
34	4.0158	6016	5464	4.6204	7635	3.4694	4993	5.3839	9042	2.9701	4030
35	4.0094	5917	5663	4.6011	7913	3.4431	4878	5.3924	9017	2.9553	3897
36	3.9830	6112	5569	4.5942	8226	3.4261	4772	5.4168	8650	2.9489	4050
37	3.9566	6318	5467	4.5884	8223	3.4099	4659	5.4107	8573	2.9440	4212
38	3.9302	6539	5356	4.5841	8209	3.3946	4537	5.4050	8479	2.9409	4387
39	3.9039	6777	5233	4.5816	8193	3.3806	4702	5.4009	8355	2.9104	4279
40	3.8781	7030	5100	4.5811	8170	3.3681	4878	5.3981	8206	2.8803	4166

3%.

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
16	6.0296	8489			6.8785	8801			7.7586	
17	6.0494	8317			6.8811	9165			7.7976	
18	6.0708	8235			6.8943	9445			7.8388	
19	6.0951	8131			6.9082	9753			7.8835	
20	6.1196	8035			6.9231	1.0078			7.9309	
21	6.1249	8289			6.9538	1.0444			7.9982	
22	6.1306	8557			6.9863	1.0461			8.0324	
23	6.1369	8841			7.0210	1.0471			8.0681	
24	6.1440	9142			7.0582	1.0472			8.1054	
25	6.1520	9462			7.0982	1.0466			8.1448	
26	6.1613	9801			7.1414	1.0071			8.1485	
27	6.1720	9800			7.1520	9990			8.1510	
28	6.1842	9792			7.1634	9885			8.1519	
29	6.2125	9797			7.1922	9780			8.1702	
30	6.2436	9794			7.2230	9643			8.1873	
31	6.2779	9412	2.5779		7.2191	9850			8.2041	
32	6.2804	9335	2.5726		7.2139	1.0056			8.2195	
33	6.2837	9236	2.5687		7.2073	1.0271			8.2344	
34	6.2881	9113	2.5671		7.1994	1.0492			8.2486	
35	6.2941	8961	2.5656		7.1902	1.0722			8.2624	
36	6.2818	9159	2.5439	3709	7.1977	1.0980	2.1730		8.2957	
37	6.2680	9364	2.5228	3684	7.2044	1.1253	2.1544		8.3297	
38	6.2529	9576	2.5022	3553	7.2105	1.1099	2.1469		8.3204	
39	6.2364	9795	2.4825	3419	7.2159	1.0879	2.1406		8.3038	
40	6.2187	1.0021	2.4637	3276	7.2208	1.0576	2.1361		8.2784	

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
41	3.8529	7309	5256	4.5838	7786	3.3273	4767	5.3624	8372	2.8506	4044
42	3.8296	7276	5426	4.5572	7687	3.2870	4645	5.3259	8542	2.8225	3916
43	3.8053	7240	5606	4.5293	7564	3.2447	4514	5.2857	8718	2.7933	3781
44	3.7836	7194	5802	4.5030	7419	3.2034	4373	5.2449	8901	2.7661	3912
45	3.7637	7140	6017	4.4777	7246	3.1620	4217	5.2023	9092	2.7403	4055
46	3.7462	6751	6243	4.4213	7372	3.1219	4339	5.1585	9290	2.6880	3927
47	3.7121	6645	6205	4.3766	7530	3.0916	4479	5.1296	9521	2.6437	3802
48	3.6786	6520	6158	4.3306	7686	3.0628	4637	5.0992	9367	2.5991	3666
49	3.6463	6372	6106	4.2835	7855	3.0357	4803	5.0690	9148	2.5554	3524
50	3.6155	6198	6048	4.2353	8032	3.0107	4987	5.0385	8855	2.5120	3370
51	3.5682	6325	5695	4.2007	8247	2.9987	5208	5.0254	8498	2.4779	3475
52	3.5200	6461	5586	4.1661	8476	2.9614	5163	5.0137	8022	2.4451	3593
53	3.4711	6604	5457	4.1315	8335	2.9254	5113	4.9650	7782	2.4141	3723
54	3.4217	6758	5309	4.0975	8136	2.8908	5058	4.9111	7422	2.3850	3867
55	3.3719	6923	5135	4.0642	7867	2.8584	5000	4.8509	6898	2.3584	4027
56	3.3221	7097	5223	4.0318	7513	2.7998	4648	4.7831	6708	2.3350	4208
57	3.2724	7291	5316	4.0015	7038	2.7408	4517	4.7053	6396	2.2891	4151
58	3.2233	7137	5418	3.9370	6795	2.6815	4375	4.6165	5891	2.2440	4082
59	3.1752	6931	5528	3.8683	6435	2.6224	4211	4.5118	5801	2.2013	4013
60	3.1288	6660	5651	3.7948	5922	2.5637	4026	5.3870	5582	2.1611	3940
61	3.0843	6317	5788	3.7160	5720	2.5055	4073	4.2880	5421	2.0982	3605
62	3.0431	5871	5938	3.6302	5406	2.4493	4131	4.1708	5097	2.0362	3472
63	2.9898	5658	5816	3.5556	4951	2.4082	4220	4.0507	5464	1.9862	3343
64	2.9359	5354	5652	3.4713	4875	2.3707	4323	3.9588	5223	1.9384	3199
65	2.8824	4907	5145	3.3731	4688	2.3379	4444	3.8419	4694	1.8935	3038
66	2.8283	4756	5170	3.3039	4561	2.3113	4592	3.7600	4201	1.8521	3088
67	2.7734	4506	4816	3.2240	4289	2.2918	4767	3.6529	4690	1.8151	3151
68	2.7168	4106	4652	3.1274	4638	2.2516	4679	3.5912	4416	1.7837	3233
69	2.6572	4059	4408	3.0631	4443	2.2164	4571	3.5074	3761	1.7593	3336
70	2.5914	3919	4049	2.9833	3985	2.1865	4430	3.3818	4476	1.7435	3470

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
41	6.1996	1.0257	2.4462	3103	7.2253	1.0169	2.1059	3215	8.2422	1.7844
42	6.1801	1.0502	2.4309	3538	7.2303	9635	2.0771	3086	8.1938	1.7685
43	6.1575	1.0335	2.4152	3681	7.1910	9361	2.0471	2951	8.1271	1.7520
44	6.1350	1.0100	2.3749	3564	7.1450	8956	2.0185	2808	8.0406	1.7377
45	6.1115	9785	2.3348	3440	7.0900	8375	1.9908	2660	7.9275	1.7248
46	6.0875	9371	2.2953	3309	7.0246	8161	1.9644	2860	7.8407	1.6884
47	6.0817	8864	2.2635	3182	6.9681	7834	1.9453	2877	7.7515	1.6576
48	6.0359	8605	2.2325	3046	6.8964	7311	1.9279	3004	7.6275	1.6275
49	5.9838	8220	2.2030	3157	6.8058	7240	1.8873	2889	7.5298	1.5984
50	5.9240	7666	2.1750	3278	6.6906	7078	1.8472	2768	7.3984	1.5704
51	5.8752	7489	2.1304	3165	6.6241	6916	1.8139	2650	7.3157	1.5489
52	5.8159	7181	2.0858	3040	6.5340	6618	1.7818	2527	7.1958	1.5291
53	5.7432	6682	2.0418	2909	6.4114	7058	1.7509	2397	7.1172	1.5112
54	5.6533	6615	1.9983	2766	6.3148	6805	1.7217	2490	6.9953	1.4727
55	5.5407	6116	1.9557	2615	6.1823	6233	1.6942	2596	6.8056	1.4346
56	5.4539	6275	1.9142	2688	6.0814	5701	1.6454	2474	6.6515	1.3980
57	5.3449	5962	1.8740	2771	5.9411	6279	1.5969	2348	6.5690	1.3621
58	5.2056	6355	1.8358	2864	5.8411	5965	1.5494	2214	6.4376	1.3280
59	5.0919	6083	1.8000	2973	5.7002	5237	1.5027	2069	6.2239	1.2958
60	4.9452	5505	1.7671	3098	5.4957	6064	1.4573	1914	6.1021	1.2659
61	4.8301	4962	1.7377	3241	5.3263	5741	1.4136	1965	5.9004	1.2171
62	4.6805	5470	1.6890	3170	5.2275	6363	1.3720	2020	5.8638	1.1700
63	4.5971	5169	1.6519	3114	5.1140	7164	1.3405	2100	5.8304	1.1305
64	4.4811	4466	1.6185	3061	4.9277	8146	1.3124	2194	5.7423	1.0930
65	4.3113	5227	1.5897	3010	4.8340	6944	1.2887	2307	5.5284	1.0580
66	4.1801	4914	1.5433	2732	4.6715	9571	1.2701	2443	5.6286	1.0258
67	4.1219	5511	1.5000	2630	4.6730	1.0803	1.2370	2399	5.7533	1.9971
68	4.0328	6258	1.4604	2520	4.6586	1.2499	1.2084	2358	5.9085	0.9726
69	3.8835	7190	1.4257	2401	4.6025	1.5003	1.1856	2325	6.1028	0.9531
70	3.8294	5986	1.3965	2268	4.4280	1.9190	1.1697	2301	6.3470	0.9396

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten. jünger 0	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. älter 5	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. jünger 5	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. älter 10	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. jünger 10	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
		+	—		+		—		+		—
71	2.5349	3811	3924	2.9160	3528	2.1425	4206	3.2688	4159	1.7219	3605
72	2.4797	3527	3768	2.8324	3989	2.1029	3916	3.2313	4714	1.7113	3781
73	2.4064	3928	3383	2.7992	3759	2.0681	3807	3.1751	5432	1.6874	3739
74	2.3454	3749	3338	2.7203	3125	2.0116	3592	3.0328	6276	1.6524	3645
75	2.2760	3333	3214	2.6093	3768	1.9546	3280	2.9861	5179	1.6266	3536
76	2.2150	2908	3114	2.5058	3444	1.9036	3174	2.8502	7502	1.5862	3346
77	2.1461	3336	2908	2.4797	3949	1.8553	3006	2.8746	8716	1.5547	3108
78	2.0888	3084	3186	2.3972	4539	1.7702	2673	2.8511	1.0287	1.5029	2981
79	2.0263	2501	3041	2.2764	5318	1.7222	2644	2.8082	1.2729	1.4578	2812
80	1.9458	3099	2695	2.2557	4314	1.6763	2562	2.6871	1.6982	1.4201	2571
81	1.8633	2797	2312	2.1430	6526	1.6321	2494	2.7956		1.3827	2501
82	1.7966	3179	2636	2.1145	7664	1.5330	2255	2.8709		1.3075	2305
83	1.7235	3713	2400	2.0948	9146	1.4835	2511	3.0094		1.2324	2016
84	1.6240	4472	1851	2.0712	1.1775	1.4389	2417	3.2487		1.1972	2008
85	1.5323	3353	2252	1.8676	1.5691	1.3071	2026	2.4367		1.1045	1854
86	1.4063	5370	1876	1.9433		1.2187	1665			1.0522	1779
87	1.3110	6170	2037	1.9280		1.1073	1866			0.9207	1490
88	1.2119	7446	2256	1.9565		0.9863	1574			0.8289	1618
89	1.0933	9709	2551	2.0642		0.8382	1005			0.7377	1458
90	0.8904	1.4446	1245	2.3350		0.7659	1291			0.6368	1161
91	0.7433		2123			0.5310	720			0.4590	689
92	0.5892		1964			0.3928	643			0.3285	714
93	0.4252		1701			0.2551	556			0.1995	433
94	0.2427		1214			0.1213	485			0.0728	51
95	0.0000		0000			0.0000	000			0.0000	00

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
71	3.6847	8558	1.3614	2306	4.5405		1.1308	2060		0.9248
72	3.7027	9792	1.3332	2362	4.6819		1.0970	1977		0.8993
73	3.7183	1.1543	1.3135	2442	4.8726		1.0693	1891		0.8802
74	3.6604	1.4015	1.2879	2522	5.0619		1.0357	1776		0.8581
75	3.5040	1.8143	1.2730	2634	5.3183		1.0096	1608		0.8458
76	3.6004		1.2516	2750			0.9766	1666		0.8100
77	3.7462		1.2439	2916			0.9523	1706		0.7817
78	3.8798		1.2048	2848			0.9200	1739		0.7461
79	4.0811		1.1766	2785			0.8981	1800		0.7181
80	4.3853		1.1630	2725			0.8905	1906		0.6999
81			1.1326	2585			0.8741	2011		0.6730
82			1.0770	2328			0.8442	2107		0.6335
83			1.0308	2228			0.8080	2052		0.6028
84			0.9964	2107			0.7857	2014		0.5843
85			0.9191	1820			0.7371	1888		0.5483
86			0.8743	1746			0.6997	1758		0.5239
87			0.7717	1508			0.6209	1476		0.4733
88			0.6671	1190			0.5481	1322		0.4159
89			0.5919	1095			0.4824	1151		0.3673
90			0.5207	1047			0.4160	862		0.3298
91			0.3901	723			0.3178	733		0.2445
92			0.2571	414			0.2157	497		0.1660
93			0.1562	362			0.1200	234		0.0966
94			0.0677	173			0.0504	106		0.0398
95			0.0000	00			0.0000	000		0.0000

Tabel=

Baare Werthe der Ueberle=

B.

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
16	3.4476	5541		4.0017	5864			4.5881	6663		
17	3.4687	5450		4.0137	6095			4.6232	6589		
18	3.4919	5349		4.0268	6341			4.6609	6509		
19	3.5169	5245		4.0414	6273			4.6687	6748		
20	3.5441	5133		4.0574	6199			4.6773	7001		
21	3.5495	5341	5033	4.0836	6131	3.0462		4.6967	6951		
22	3.5558	5562	4937	4.1120	6054	3.0621		4.7174	6892		
23	3.5634	5794	4838	4.1428	5973	3.0796		4.7401	6822		
24	3.5722	5723	4731	4.1445	6201	3.0991		4.7646	6744		
25	3.5823	5646	4617	4.1469	6443	3.1206		4.7912	6654		
26	3.5940	5562	4801	4.1502	6373	3.1139	4510	4.7875	6882	2.6629	
27	3.6077	5469	4996	4.1546	6298	3.1081	4404	4.7844	7120	2.6677	
28	3.6221	5382	5193	4.1603	6211	3.1028	4291	4.7814	7375	2.6737	
29	3.6186	5583	5130	4.1769	6129	3.1056	4181	4.7898	7664	2.6875	
30	3.6145	5811	5043	4.1956	6035	3.1097	4064	4.7991	7973	2.7033	
31	3.6116	5734	4964	4.1850	6247	3.1152	4232	4.8097	8304	2.6920	3978
32	3.6089	5655	4866	4.1744	6473	3.1223	4411	4.8217	8320	2.6812	3869
33	3.6078	5563	4763	4.1641	6714	3.1315	4602	4.8355	8328	2.6713	3755
34	3.6085	5457	4952	4.1542	6972	3.1133	4512	4.8514	8330	2.6621	3634
35	3.6099	5349	5144	4.1448	7247	3.0955	4416	4.8695	8326	2.6539	3606
36	3.5925	5540	5065	4.1465	7563	3.0860	4325	4.9028	7987	2.6535	3654
37	3.5749	5746	4978	4.1495	7574	3.0771	4223	4.9069	7929	2.6548	3817
38	3.5564	5977	4869	4.1541	7580	3.0695	4115	4.9121	7848	2.6580	3991
39	3.5402	6205	4770	4.1607	7578	3.0632	4280	4.9185	7746	2.6352	3897
40	3.5233	6461	4650	4.1694	7570	3.0583	4458	4.9264	7616	2.6125	3797

le IX.

bensrenten nach Süßmilch.

3½ %.

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
16	5.2544	7483			6.0027	7948			6.7975	
17	5.2821	7423			6.0244	8224			6.8468	
18	5.3118	7355			6.0473	8514			6.8987	
19	5.3435	7277			6.0712	8822			6.9534	
20	5.3774	7190			6.0964	9148			7.0112	
21	5.3918	7439			6.1357	9516			7.0873	
22	5.4066	7704			6.1770	9552			7.1322	
23	5.4223	7988			6.2211	9580			7.1791	
24	5.4390	8288			6.2678	9601			7.2279	
25	5.4566	8609			6.3175	9615			7.2790	
26	5.4757	8951			6.3708	9256			7.2964	
27	5.4964	8969			6.3933	9195			7.3128	
28	5.5189	8980			6.4169	9113			7.3282	
29	5.5562	9003			6.4565	9027			7.3592	
30	5.5964	9019			6.4983	8913			7.3896	
31	5.6401	8671	2.2942		6.5072	9125			7.4197	
32	5.6537	8613	2.2943		6.5150	9344			7.4494	
33	5.6683	8535	2.2958		6.5218	9569			7.4787	
34	5.6844	8431	2.2987		6.5275	9803			7.5078	
35	5.7021	8301	2.3033		6.5322	1.0044			7.5366	
36	5.7015	8508	2.2881	3446	6.5523	1.0319	1.9435		7.5842	
37	5.6998	8721	2.2731	3338	6.5719	1.0606	1.9393		7.6325	
38	5.6969	8943	2.2589	3222	6.5912	1.0483	1.9367		7.6395	
39	5.6931	9172	2.2455	3101	6.6103	1.0294	1.9354		7.6397	
40	5.6880	9411	2.2328	2970	6.6291	1.0024	1.9358		7.6315	

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
41	3.5071	6738	4809	4.1809	7219	3.0262	4358	4.9028	7792	2.5904	3690
42	3.4917	6721	4978	4.1638	7137	2.9939	4251	4.8775	7971	2.5688	3576
43	3.4776	6699	5163	4.1475	7032	2.9613	4132	4.8507	8159	2.5481	3785
44	3.4649	6668	5362	4.1317	6904	2.9287	4003	4.8221	8404	2.5284	3765
45	3.4539	6632	5577	4.1171	6750	2.8962	3864	4.7921	8557	2.5098	3732
46	3.4455	6269	5811	4.0724	6886	2.8644	3984	4.7610	8768	2.4660	3617
47	3.4205	6179	5787	4.0384	7048	2.8418	4125	4.7432	9016	2.4293	3505
48	3.3965	6067	5756	4.0032	7216	2.8209	4282	4.7248	8884	2.3927	3384
49	3.3737	5931	5723	3.9668	7394	2.8014	4452	4.7062	8693	2.3562	3251
50	3.3522	5772	5682	3.9294	7580	2.7840	4639	4.6874	8429	2.3201	3108
51	3.3114	5931	5327	3.9045	7808	2.7787	4861	4.6853	8098	2.2926	3216
52	3.2723	6073	5231	3.8796	8046	2.7492	4829	4.6842	7656	2.2663	3333
53	3.2323	6223	5118	3.8546	7929	2.7205	4791	4.6475	7437	2.2414	3466
54	3.1919	6385	4982	3.8304	7753	2.6937	4750	4.6057	7104	2.2187	3610
55	3.1510	6558	4822	3.8068	7509	2.6688	4704	4.5577	6607	2.1984	3773
56	3.1099	6744	4916	3.7843	7179	2.6183	4372	4.5022	6436	2.1811	3955
57	3.0688	6946	5015	3.7634	6739	2.5673	4256	4.4373	6139	2.1417	3906
58	3.0280	6812	5123	3.7092	6512	2.5157	4125	4.3604	5661	2.1032	3848
59	2.9882	6628	5240	3.6510	6174	2.4642	3973	4.2684	5583	2.0669	3740
60	2.9497	6382	5369	3.5879	5684	2.4128	3820	4.1563	5352	2.0328	3727
61	2.9134	6058	5513	3.5192	5502	2.3621	3852	4.0694	5224	1.9769	3412
62	2.8801	5637	5676	3.4438	5203	2.3125	3915	3.9641	4916	1.9210	3286
63	2.8340	5444	5596	3.3784	4766	2.2744	3976	3.8550	5283	1.8768	3170
64	2.7907	5125	5450	3.3032	4700	2.2457	4115	3.7732	5055	1.8342	3033
65	2.7414	4727	5230	3.2141	4522	2.2184	4242	3.6663	4542	1.7942	2880
66	2.6942	4588	4975	3.1530	4405	2.1967	4392	3.5935	4061	1.7575	2933
67	2.6460	4351	4637	3.0811	4144	2.1823	4574	3.4955	4548	1.7249	2998
68	2.5959	3965	4485	2.9924	4494	2.1474	4498	3.4418	4283	1.6976	3081
69	2.5425	3926	4255	2.9351	4308	2.1170	4401	3.3659	3638	1.6769	3185
70	2.4827	3794	3909	2.8621	3863	2.0918	4273	3.2484	4343	1.6645	3319

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−	+	
41	5.6820	9658	2.2214	3097	6.6478	9653	1.9117	2937	7.6131	1.6180
42	5.6746	9919	2.2112	3233	6.6665	9156	1.8879	2818	7.5821	1.6061
43	5.6666	9777	2.1696	3047	6.6443	8910	1.8649	2696	7.5353	1.5953
44	5.6575	9572	2.1519	3096	6.6147	8536	1.8423	2567	7.4683	1.5856
45	5.6478	9289	2.1366	3161	6.5767	7988	1.8205	2431	7.3755	1.5774
46	5.6378	8909	2.1043	3043	6.5287	7795	1.8000	2532	7.3082	1.5468
47	5.6448	8435	2.0788	2927	6.4883	7492	1.7861	2650	7.2375	1.5211
48	5.6132	8203	2.0543	2802	6.4335	6994	1.7741	2778	7.1329	1.4963
49	5.5755	7845	2.0311	2915	6.3600	6937	1.7396	2675	7.0537	1.4721
50	5.5303	7320	2.0089	3035	6.2623	6747	1.7054	2565	6.9370	1.4489
51	5.4951	7162	1.9710	2933	6.2113	6637	1.6777	2458	6.8750	1.4319
52	5.4498	6874	1.9330	2821	6.1372	6355	1.6509	2345	6.7727	1.4164
53	5.3912	6398	1.8948	2697	6.0310	6796	1.6251	2225	6.7106	1.4026
54	5.3161	6343	1.8577	2566	5.9504	6558	1.6011	2320	6.6062	1.3691
55	5.2184	6159	1.8211	2423	5.8343	6006	1.5788	2427	6.4349	1.3361
56	5.1458	6030	1.7856	2500	5.7488	5490	1.5356	2316	6.2978	1.3040
57	5.0512	5733	1.7511	2583	5.6245	6065	1.4928	2198	6.2310	1.2730
58	4.9265	6128	1.7184	2682	5.5393	5765	1.4502	2071	6.1158	1.2431
59	4.8267	5871	1.6879	2792	5.4138	5051	1.4087	1935	5.9189	1.2152
60	4.6915	5337	1.6601	2919	5.2252	5867	1.3682	1790	5.8119	1.1892
61	4.5918	4788	1.6357	3065	5.0706	5552	1.3292	1839	5.6258	1.1453
62	4.4557	5293	1.5924	3003	4.9850	6170	1.2921	1896	5.6020	1.1025
63	3.3833	5005	1.5598	2955	4.8838	6963	1.2643	1976	5.5801	1.0667
64	4.2787	4314	1.5309	2911	4.7101	7938	1.2398	2070	5.5039	1.0328
65	4.1205	5065	1.5062	2867	4.6270	6751	1.2195	2184	5.3021	1.0011
66	3.9996	4758	1.4642	2601	4.4754	9355	1.2041	2321	5.4109	0.9720
67	3.9503	5348	1.4251	2507	4.4851	1.0590	1.1744	2282	5.5441	0.9462
68	3.8701	6089	1.3895	2404	4.4790	1.2290	1.1491	2248	5.7080	0.9243
69	3.7297	7014	1.3584	2292	4.4311	2.4798	1.1292	2220	6.9109	0.9072
70	3.6827	5901	1.3326	2167	4.2728	1.8912	1.1159	2199	6.1640	0.8960

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
71	2.4320	3696	3792	2.8016	3415	2.0528	4061	3.1431	4032	1.6467	3458
72	2.3776	3470	3598	2.7246	3872	2.0178	3785	3.1118	4581	1.6393	3638
73	2.3147	3822	3274	2.6969	3648	1.9873	3684	3.0617	5291	1.6189	3603
74	2.2591	3654	3233	2.6245	3022	1.9358	3481	2.9267	6128	1.5877	3518
75	2.1947	3252	3114	2.5199	3655	1.8833	3181	2.8854	5037	1.5652	3443
76	2.1390	2838	3021	2.4228	3330	1.8369	3083	2.7558	7341	1.5286	3242
77	0.0749	3206	2820	2.3955	3888	1.7929	2924	2.7843	8551	1.5005	3013
78	0.0226	3005	3098	2.3231	4427	1.7128	2602	2.7658	1.0122	1.4526	2895
79	1.9649	2431	2959	2.2080	5197	1.6690	2575	2.7277	1.2562	1.4111	2734
80	1.8886	3021	2619	2.1907	4200	1.6267	2503	2.6107	1.6813	1.3764	2502
81	1.8108	2720	2241	2.0828	6391	1.5867	2444	2.7219		1.3423	2437
82	1.7490	3101	2623	2.0591	7423	1.4867	2154	2.8014		1.2713	2248
83	1.6803	3628	2349	2.0431	9002	1.4454	2455	2.9433		1.1999	1967
84	1.5852	4378	1808	2.0230	1.1624	1.4044	2368	3.1854		1.1676	1963
85	1.4982	3267	2208	1.8249	1.5538	1.2774	1985	3.3787		1.0789	1815
86	1.3765	5264	1838	1.9029		1.1927	1631			1.0296	1742
87	1.2858	6063	1998	1.8921		1.0860	1834			0.9026	1461
88	1.1910	7335	2219	1.9245		0.9691	1550			0.8141	1591
89	1.0766	9591	2511	2.0357		0.8255	994			0.7261	1437
90	0.8778	1.4315	1224	2.3093		0.7554	1274			0.6280	1148
91	0.7345		2098			0.5247	711			0.4536	681
92	0.5837		1946			0.3891	636			0.3255	708
93	0.4222		1689			0.2533	552			0.1981	430
94	0.2416		1208			0.1208	483			0.0725	51
95	0.0000		000			0.0000	000			0.0000	00

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		−		+		−		
71	3.5463	8368	1.3009	2207	4.3831		1.0802	1968		0.8834
72	3.5699	9603	1.2755	2263	4.5302		1.0492	1889		0.8603
73	3.5908	1.1354	1.2586	2344	4.7262		1.0242	1808		0.8434
74	3.5395	1.3827	1.2359	2425	4.9222		0.9934	1698		0.8236
75	3.3891	1.7961	1.2209	2512	5.1852		0.9697	1579		0.8118
76	3.4899		1.2044	2652			0.9392	1600		0.7792
77	3.6394		1.1992	2821			0.9171	1641		0.7530
78	3.7780		1.1631	2758			0.8873	1676		0.7197
79	3.9839		1.1377	2702			0.8675	1738		0.6937
80	4.2920		1.1262	2648			0.8614	1843		0.6771
81			1.0986	2515			0.8471	1950		0.6521
82			1.0465	2268			0.8197	2049		0.6148
83			1.0032	2173			0.7859	1998		0.5861
84			0.9713	2058			0.7655	1965		0.5690
85			0.8974	1780			0.7194	1846		0.5348
86			0.8554	1711			0.6843	1721		0.5122
87			0.7565	1481			0.6084	1446		0.4638
88			0.6550	1169			0.5381	1299		0.4082
89			0.5824	1077			0.4747	1134		0.3613
90			0.5132	951			0.4181	930		0.3251
91			0.3855	715			0.3140	724		0.2416
92			0.2547	409			0.2138	494		0.1644
93			0.1551	359			0.1192	233		0.0959
94			0.0674	172			0.0502	106		0.0396
95			0.0000	000			0.0000	000		0.0000

Tabel-

Baare Werthe der Ueberle-

C.

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
16	3.0027	4901		3.4928	5186			4.0114	5925		
17	3.0273	4819		3.5092	5410			4.0502	5865		
18	3.0536	4733		3.5269	5650			4.0920	5797		
19	3.0821	4641		3.5462	5596			4.1058	6030		
20	3.1128	4544		3.5672	5532			4.1204	6280		
21	3.1228	4745	4476	3.5973	5475	2.6752		4.1448	6241		
22	3.1338	4960	4393	3.6298	5412	2.6945		4.1710	6191		
23	3.1459	5189	4306	3.6648	5340	2.7153		4.1988	6134		
24	3.1594	5130	4210	3.6724	5566	2.7384		4.2290	6069		
25	3.1742	5067	4105	3.6809	5803	2.7637		4.2612	5986		
26	3.1910	4994	4287	3.6904	5747	2.7623	4035	4.2651	6211	2.3588	
27	3.2096	4915	4478	3.7011	5682	2.7618	3943	4.2693	6448	2.3675	
28	3.2303	4829	4682	3.7132	5657	2.7621	3844	4.2789	6649	2.3777	
29	3.2315	5038	4620	3.7353	5535	2.7695	3744	4.2888	6986	2.3951	
30	3.2334	5263	4549	3.7597	5453	2.7785	3638	4.3050	7293	2.4147	
31	3.2362	5200	4472	3.7562	5662	2.7890	3806	4.3224	7623	2.4084	3585
32	3.2400	5130	4389	3.7530	5884	2.8011	3981	4.3414	7652	2.4030	3450
33	3.2451	5049	4298	3.7500	6123	2.8153	4171	4.3623	7676	2.3982	3387
34	3.2517	4959	4479	3.7476	6379	2.8038	4092	4.3855	7694	2.3946	3280
35	3.2599	4859	4673	3.7458	6645	2.7926	4009	4.4103	7715	2.3917	3163
36	3.2493	5048	4607	3.7541	6969	2.7886	3925	4.4510	7393	2.3961	3312
37	3.2386	5252	4528	3.7638	6993	2.7858	3837	4.4631	7349	2.4021	3472
38	3.2282	5469	4441	3.7751	7014	2.7841	3739	4.4765	7285	2.4102	3645
39	3.2179	5710	4343	3.7889	7023	2.7836	3903	4.4912	7198	2.3933	3558
40	3.2082	5965	4234	3.8047	7030	2.7848	4079	4.5077	7083	2.3769	3476

le IX.

bensrenten nach Süßmilch.

4%.

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
	älter 15		jünger 15		älter 20		jünger 20		älter 25	jünger 25
		+		—		+		—		
16	4.6039	6694			5.2733	7138			5.9871	
17	4.6367	6647			5.3014	7408			6.0422	
18	4.6717	6590			5.3307	7695			6.1002	
19	4.7088	6524			5.3612	8001			6.1613	
20	4.7484	6449			5.3933	8327			6.2260	
21	4.7689	6694			5.4383	8693			6.3076	
22	4.7901	6956			5.4857	8743			6.3600	
23	4.8122	7236			5.5358	8785			6.4143	
24	4.8359	7530			5.5889	8823			6.4712	
25	4.8598	7855			5.6453	8853			6.5306	
26	4.8862	8194			5.7056	8524			6.5580	
27	4.9141	8226			5.7367	8481			6.5848	
28	4.9438	8251			5.7692	8417			6.6109	
29	4.9874	8568			5.8442	8071			6.6513	
30	5.0343	8321			5.8664	8253			6.6917	
31	5.0847	8003	2.0499		5.8850	8471			6.7321	
32	5.1066	7962	2.0540		5.9028	8696			6.7724	
33	5.1299	7899	2.0595		5.9198	8929			6.8127	
34	5.1549	7812	2.0666		5.9361	9172			6.8533	
35	5.1818	7699	2.0754		5.9517	9424			6.8941	
36	5.1903	7911	2.0649	3134	5.9814	9710	1.7515		6.9524	
37	5.1980	8131	2.0549	3034	6.0111	1.0010	1.7515		7.0121	
38	5.2050	8359	2.0457	2931	6.0409	9912	1.7526		7.0321	
39	5.2110	8597	2.0375	2825	6.0707	9751	1.7550		7.0458	
40	5.2160	8846	2.0293	2700	6.1006	9511	1.7593		7.0517	

Alter der einen Person:	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.	Ueber-lebens-renten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
41	3.1989	6245	4389	3.8234	6705	2.7600	3993	4.4939	7263	2.3607	3376
42	3.1909	6242	4560	3.8151	6635	2.7349	3896	4.4786	7452	2.3453	3273
43	3.1838	6233	4745	3.8071	6548	2.7093	3787	4.4619	7645	2.3306	3204
44	3.1782	6218	4939	3.8000	6437	2.6843	3674	4.4437	7848	2.3169	3296
45	3.1746	6196	5156	3.7942	6299	2.6590	3554	4.4241	8061	2.3036	3431
46	3.1734	5860	5390	3.7594	6439	2.6344	3666	4.4033	8284	2.2678	3339
47	3.1560	5784	5376	3.7344	6606	2.6184	3809	4.3950	8545	2.2375	3236
48	3.1393	5688	5357	3.7081	6781	2.6036	3964	4.3862	8436	2.2072	3125
49	3.1238	5570	5333	3.6808	6967	2.5905	4134	4.3775	8272	2.1771	3003
50	3.1098	5426	5303	3.6524	7164	2.5795	4322	4.3688	8029	2.1473	2870
51	3.0793	5565	4993	3.6358	7397	2.5800	4546	4.3755	7726	2.1254	2977
52	3.0479	5712	4909	3.6191	7648	2.5570	4525	4.3839	7309	2.1045	3095
53	3.0158	5778	4808	3.6036	7541	2.5350	4497	4.3577	7110	2.0853	3227
54	2.9830	6075	4685	3.5905	7355	2.5145	4466	4.3260	6801	2.0679	3373
55	2.9496	6299	4539	3.5795	7090	2.4957	4430	4.2885	6359	2.0527	3538
56	2.9160	6409	4636	3.5569	6869	2.4524	4119	4.2438	6173	2.0405	3722
57	2.8820	6621	4740	3.5441	6454	2.4080	4015	4.1895	5895	2.0065	3679
58	2.8490	6507	4853	3.4997	6244	2.3637	3895	4.1241	5436	1.9742	3633
59	2.8163	6339	4976	3.4502	5931	2.3187	3753	4.0433	5368	1.9434	3585
60	2.7850	6113	5110	3.3963	5463	2.2740	3591	3.9426	5176	1.9149	3533
61	2.7556	5811	5262	3.3367	5295	2.2294	3648	3.8662	5039	1.8646	3232
62	2.7293	5453	5433	3.2746	4971	2.1860	3713	3.7717	4743	1.8147	3118
63	2.6900	5233	5339	3.2133	4592	2.1561	3806	3.6725	5112	1.7755	3010
64	2.6503	4960	5209	3.1463	4535	2.1294	3920	3.5998	4895	1.7374	2876
65	2.6099	4554	5031	3.0653	4367	2.1068	4050	3.5020	4397	1.7018	2735
66	2.5689	4426	4791	3.0115	4259	2.0898	4204	3.4374	3929	1.6694	2791
67	2.5268	4201	4427	2.9469	4009	2.0841	4432	3.3478	4412	1.6409	2858
68	2.4826	3828	4329	2.8654	4359	2.0497	4325	3.3013	4156	1.6172	2943
69	2.4348	3795	4111	2.8143	4183	2.0237	4238	3.2326	3571	1.5999	3050
70	2.3804	3670	3777	2.7474	3750	2.0027	4122	3.1224	4218	1.5905	3154

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten. Die damit verbundene Person ist Jahre älter 15	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. jünger 15	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. älter 20	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. jünger 20	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. älter 25	Unterschiede. jünger 25
		+		−		+		−		
41	5.2202	9107	2.0231	2829	6.1309	9171	1.7402	2688	7.0480	1.4714
42	5.2238	9376	2.0180	2961	6.1614	8710	1.7216	2582	7.0324	1.4634
43	5.2264	9263	2.0102	3067	6.1527	8486	1.7035	2472	7.0013	1.4563
44	5.2285	9085	1.9873	3014	6.1370	8140	1.6859	2354	6.9510	1.4505
45	5.2302	8831	1.9605	2914	6.1133	7621	1.6691	2228	6.8754	1.4463
46	5.2317	8481	1.9339	2805	6.0798	7448	1.6534	2330	6.8246	1.4204
47	5.2495	8038	1.9139	2700	6.0533	7166	1.6439	2447	6.7699	1.3992
48	5.2298	7828	1.8947	2586	6.0126	6692	1.6361	2576	6.6818	1.3785
49	5.2047	7492	1.8768	2422	5.9539	6647	1.6346	2759	6.6186	1.3587
50	5.1717	6998	1.8603	2824	5.8715	6471	1.5779	2382	6.5186	1.3397
51	5.1481	6858	1.8277	2729	5.8339	6373	1.5548	2284	6.4712	1.3264
52	5.1148	6589	1.7950	2624	5.7737	6106	1.5326	2180	6.3843	1.3146
53	5.0687	6135	1.7626	2511	5.6822	6548	1.5115	2068	6.3370	1.3047
54	5.0061	6092	1.7306	2389	5.6153	6325	1.4917	2163	6.2478	1.2754
55	4.9244	5890	1.6989	2253	5.5134	5791	1.4736	2271	6.0925	1.2465
56	4.8611	5805	1.6683	2329	5.4416	5290	1.4354	2169	5.9706	1.2185
57	4.7790	5521	1.6386	2416	5.3311	5863	1.3970	2059	5.9174	1.1911
58	4.6677	5919	1.6109	2513	5.2596	5574	1.3596	1941	5.8170	1.1655
59	4.5801	5678	1.5849	2624	5.1479	4873	1.3225	1814	5.6352	1.1411
60	4.4602	5135	1.5616	2753	4.9737	5680	1.2863	1675	5.5417	1.1188
61	4.3701	4622	1.5414	2899	4.8323	5370	1.2515	1726	5.3693	1.0789
62	4.2460	5126	1.5029	2846	4.7586	5982	1.2183	1784	5.3568	1.0399
63	4.1837	4816	1.4745	2806	4.6683	6772	1.1939	1864	5.3455	1.0075
64	4.0893	4170	1.4498	2772	4.5063	7736	1.1726	1958	5.2799	0.9768
65	3.9417	4910	1.4283	2731	4.4327	6565	1.1552	2073	5.0892	0.9479
66	3.8303	4607	1.3903	2477	4.2910	9147	1.1426	2209	5.2057	0.9217
67	3.7890	5193	1.3551	2389	4.3083	1.0384	1.1162	2176	5.3467	0.8986
68	3.7169	5926	1.3229	2292	4.3095	1.2088	1.0937	2148	5.5183	0.8789
69	3.5897	6793	1.2949	2185	4.2690	1.4599	1.0764	2124	5.7289	0.8640
70	3.5442	5741	1.2751	2096	4.1183	1.6558	1.0655	2108	5.7741	0.8547

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.	Ueberlebensrenten.	Unterschiede.
	Die damit verbundene Person ist Jahre										
	jünger 0			älter 5		jünger 5		älter 10		jünger 10	
		+	−		+		−		+		−
71	2.3353	3574	3671	2.6927	3317	1.9682	3922	3.0244	3910	1.5760	3326
72	2.2860	3359	3486	2.6219	3770	1.9374	3657	2.9989	4452	1.5717	3508
73	2.2280	3709	3172	2.5989	3553	1.9108	3565	2.9542	5156	1.5543	3481
74	2.1775	3547	3138	2.5322	2938	1.8637	3371	2.8260	5985	1.5266	3405
75	2.1178	3153	3026	2.4331	3565	1.8152	3080	2.7896	4903	1.5072	3313
76	2.0669	2744	2946	2.3413	3248	1.7723	2983	2.6661	7182	1.4740	3142
77	2.0073	3168	2746	2.3241	3741	1.7327	2836	2.6982	8392	1.4491	2923
78	1.9596	2929	3026	2.2525	4319	1.6570	2522	2.6844	9996	1.4048	2812
79	1.9063	2362	2896	2.1425	5082	1.6167	2502	2.6507	1.2424	1.3665	2659
80	1.8340	2945	2565	2.1285	4091	1.5775	2429	2.5376	1.6647	1.3346	2433
81	1.7604	2647	2199	2.0251	6259	1.5405	2370	2.6510		1.3035	2374
82	1.7031	3022	2522	2.0053	7290	1.4509	2144	2.7343		1.2365	2194
83	1.6387	3546	2300	1.9933	8861	1.4087	2402	2.8794		1.1685	1919
84	1.5477	4287	1767	1.9764	1.1476	1.3710	2320	3.1240		1.1390	1869
85	1.4651	3184	2165	1.7835	1.5389	1.2486	1945	3.3224		1.0541	1776
86	1.3475	5160	1799	1.8635		1.1676	1598			1.0078	1708
87	1.2612	5958	1961	1.8570		1.0651	1803			0.8848	1433
88	1.1706	7227	2182	1.8933		0.9524	1527			0.7997	1565
89	1.0602	9476	2481	2.0078		0.8121	972			0.7149	1417
90	0.8654	1.4187	1202	2.2841		0.7452	1258			0.6194	1133
91	0.7259		2076			0.5183	700			0.4483	675
92	0.5789		1928			0.3861	629			0.3232	701
93	0.4191		1676			0.2515	548			0.1967	428
94	0.2404		1202			0.1202	481			0.0721	24
95	0.0000		0000			0.0000	000			0.0000	00

Alter der einen Person:	Ueberlebensrenten. älter 15	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. jünger 15	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. älter 20	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. jünger 20	Unterschiede.	Ueberlebensrenten. älter 25	Unterschiede. jünger 25
	Die damit verbundene Person ist Jahre									
		+		−		+		−		
71	3.4154	8185	1.2434	2106	4.2339		1.0328	1887		0.8441
72	3.4441	9420	1.2209	2164	4.3861		1.0045	1812		0.8233
73	3.4698	1.1169	1.2062	2244	4.5867		0.9818	1735		0.8083
74	3.4245	1.3644	1.1861	2326	4.7889		0.9535	1630		0.7905
75	3.2799	1.7780	1.1759	2440	5.0579		0.9319	1515		0.7804
76	3.3843		1.1598	2560			0.9038	1538		0.7500
77	3.5374		1.1568	2730			0.8838	1579		0.7259
78	3.6840		1.1236	2674			0.8562	1615		0.6947
79	3.8931		1.1006	2622			0.8384	1679		0.6705
80	4.2023		1.0913	2575			0.8338	1784		0.6554
81			1.0661	2449			0.8212	1892		0.6320
82			1.0171	2209			0.7962	1993		0.5969
83			0.9766	2122			0.7644	1946		0.5698
84			0.9521	2060			0.7461	1919		0.5542
85			0.8765	1741			0.7024	1805		0.5219
86			0.8370	1677			0.6693	1686		0.5007
87			0.7415	1453			0.5962	1420		0.4542
88			0.6432	1149			0.5283	1276		0.4007
89			0.5732	1061			0.4671	1117		0.3554
90			0.5061	938			0.4123	917		0.3206
91			0.3808	705			0.3103	715		0.2388
92			0.2531	405			0.2126	489		0.1637
93			0.1539	356			0.1183	230		0.0953
94			0.0697	197			0.0500	106		0.0394
95			0.0000	000			0.0000	000		0.0000

Druck von A. Bahn & Comp. in Berlin, Schleuse 4.

Irrthümer.

S. 226 Zeile 15 v. o. lese man $\frac{1}{(1.04)^{19}}$ statt $\frac{1}{(1.04)^{20}}$

= 290 = 6 v. o. = = 0.1183 = 0.1153

= 312 und 313 ad 5 und 6 sind die Abzüge für die Carenzzeit vergessen durch 1.04 zu dividiren. Vgl. S. 210.

= 415, 1. Col. Zeile 6 v. u. lese man 5.7017 statt 5.7021

= 416, 3. Col. v. h. Zeile 4 v. o. lese man 8354 statt 8404

= 416, letzte Col. Zeile 10 v. o. lese man 3112 statt 3108

= 416, = = = 19 v. o. = = 3790 = 3740.

Raedell, Carl

Vollständige Anweisung die Lebensfähigkeit von Versicherungs-Anstalten in Bezug auf das menschliche Leben und Sterben zu untersuchen Im Auftrage des Central-Vereins für das Wohl der arbeitenden Klassen allgemein verstä
ndlich vorgetragen

Berlin 1857